Martingaalit ja harmoninen analyysi / Tuomas Hytönen

Tentti 24.1.2013 (4 h)

Vastaa **neljään** (4) itse valitsemaasi kysymykseen. Kaikki ovat samanarvoisia.

Kirjoita jokaiseen palauttamaasi paperiin **kurssin nimi**, **päivämäärä**, **koko nimesi** sekä joko **opiskelijanumerosi** tai **syntymäaikasi**.

1. Olkoot $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$ joukon Ω σ-algebroita ja $\mu : \mathscr{F} \to [0, \infty]$ mitta, jolla $(\Omega, \mathscr{G}, \mu)$ on σ-äärellinen. Määrittele funktion $f \in L^0(\mathscr{F}, \mu)$ ehdollinen odotusarvo $\mathscr{G}$:n suhteen ja osoita, että se on yksikäsitteinen m.k. (jos on olemassa). Todista lisäksi olemassaolo tapauksessa $f \in L^2(\mathscr{F}, \mu)$.

2. Määrittele käsitteet *martingaali* ja *pysäytysaika* (stopping time). Todista, että jos τ on pysäytysaika ja $n \in \mathbb{Z}$ on vakio, niin myös $\min(n, \tau)$ on pysäytysaika.

   Olkoon $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ martingaali, ja τ kokonaislukuarvoinen pysäytysaika. Määritellään
   $$f_\tau := \sum_{k\in\mathbb{Z}} 1_{\{\tau=k\}} f_k.$$
   Osoita, että myös $(f_{\min(n,\tau)})_{n\in\mathbb{Z}}$ on martingaali.

3. Olkoon $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ martingaali. Määrittele funktio $u_n^{(a,b)}$ siten, että se antaa martingaalin f_n välin (a, b) *ylitysten* (up-crossings) lukumäärän aikavälillä $0 \ldots n$. Oletetaan, että kaikilla lukupareilla a, b $(a < b)$ pätee $u_\infty^{(a,b)} < \infty$ melkein kaikkialla. Osoita, että tällöin raja-arvo $f_\infty := \lim_{n\to\infty} f_n$ on olemassa melkein kaikkialla.

4. Selitä tarkasti kaavoin (ei tarvitse kuitenkaan todistaa), kuinka Hilbertin muunnos (Hilbert transform) voidaan esittää dyadisten siirtojen (dyadic shifts) keskiarvona. Määrittele käyttämäsi käsitteet ja symbolit.

5. Olkoon avaruus Ω reaaliakselin väli $[0, 4)$ Lebesguen mitalla varustettuna. Tarkastellaan funktioita $f = 1_{[0,1)} - 1_{[1,2)}$ ja $g = 1_{[0,2)} - 1_{[2,4)}$. Etsi sellaiset martingaalierotukset d_1, d_2 ja ennustettavat funktiot v_1, v_2 (sopivan suodatuksen suhteen), että $f = d_1 + d_2$ ja g on sen martingaalimuunnos. (Vihje: tähän ei välttämättä ole mitään järjestelmällistä tapaa, mutta tilanne on niin yksinkertainen, että kokeilemalla voi päästä pitkälle.)