Vektorianalyysi I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2016
Harjoitus 6 - Ratkaisuehdotuksia

Muista, että kurssisivulta löytyy linkki tämän viikon Stack-tehtäviin.

Tehtäväsarja I

1. (Martio, HT 3.4:1) Millä suoralla sylinterillä, jonka tilavuus on V, on pienin vaipan ja pohjien yhteenlaskettu pinta–ala?

   Ratkaisuehdotus: Merkitään x_1:llä sylinterin pohjan sädettä ja x_2:llä sylinterin korkeutta. Tällöin sylinterin tilavuus on $V = \pi x_1^2 x_2$ ja kokonaispinta-ala $A = 2\pi x_1 x_2 + 2\pi x_1^2$. On siis minimoitava A, kun V pidetään vakiona. Ratkaistaan tehtävä Lagrangen kertoimien avulla määrittelemällä $f(x_1, x_2) = 2\pi x_1 x_2 + 2\pi x_1^2$ ja $g(x_1, g_2) = \pi x_1^2 x_2 - V$. Tästä saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2\pi x_2 + 4\pi x_1 = \lambda 2\pi x_1 x_2 \\ 2\pi x_1 = \lambda \pi x_1^2 \\ \pi x_1^2 x_2 - V = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + 2x_1 = \lambda x_1 x_2 \\ 2x_1 = \lambda x_1^2 \\ \pi x_1^2 x_2 - V = 0. \end{cases}$$

   Koska meitä ei kiinnosta tapaus $x_1 = 0$, niin keskimmäinen yhtälö, $2 = \lambda x_1$, antaa $\lambda = 2/x_1$. Sijoitetaan tämä ylimmäiseen yhtälöön, jolloin

$$\begin{aligned} x_2 + 2x_1 = \frac{2}{x_1} x_1 x_2 &\Leftrightarrow x_2 + 2x_1 = 2x_2 \\ &\Leftrightarrow x_2 = 2x_1. \end{aligned}$$

   Sijoitetaan tämä puolestaan alimpaan yhtälöön, jolloin saadaan, että

$$\begin{aligned} \pi x_1^2 2x_1 = V &\Leftrightarrow 2\pi x_1^3 = V \\ &\Leftrightarrow x_1 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}. \end{aligned}$$

   Tällöin puolestaan $x_2 = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{2\pi}}$. Tehdään vielä tarkistus:

$$\begin{aligned} \pi x_1^2 x_2 &= 2\pi \left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \right)^2 \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2\pi \left(\frac{V}{2\pi} \right)^{2/3+1/3} \\ &= 2\pi \cdot \frac{V}{2\pi} = V, \end{aligned}$$

   kuten pitikin olla.

2.⋆ (Martio, HT 2.9:9) On tehty joukko havaintoja $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, \dots, n$. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(k, m) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - kx_i - m)^2$$

   Olkoon (k_0, m_0) funktion f absoluuttinen minimi. Minkä yhtälön piste (k_0, m_0) toteuttaa? Tässä on kyseessä pienimmän neliösumman metodilla tapahtuva regressiosuoran määrääminen. Absoluuttisen minimin olemassoloa ei tarvitse tutkia.

Ratkaisuehdotus: Tiedetään, että (k_0, m_0) on funktion absoluuttinen minimi, joten merkitään se gradientin nollakohdaksi:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n -2x_i(y_i - k_0 x_i - m_0) = 0 \\ \sum_{i=1}^n -2(y_i - k_0 x_i - m_0) = 0. \end{cases}$$

Ratkaistaan alemmasta yhtälöstä m_0:

$$m_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - k \sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

Tästä saadaan, että

$$m_0 = \bar{y} - k\bar{x},$$

missä $\bar{y}$ ja $\bar{x}$ ovat lukujen y_i ja x_i keskiarvot. Sijoitetaan tämä ylempään yhtälöön:

$$\sum_{i=1}^n -2x_i(y_i - k_0 x_i - \bar{y} + k_0 \bar{x}) = 0$$
$$\sum_{i=1}^n x_i((y_i - \bar{y}) - k_0(x_i - \bar{x})) = 0.$$

Tästä voidaan yhtälönpyörittelyllä saada ratkaisuksi

$$k_0 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n x_i(x_i - \bar{x})}.$$

3. (Martio, HT 3.4:4) Etsi funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

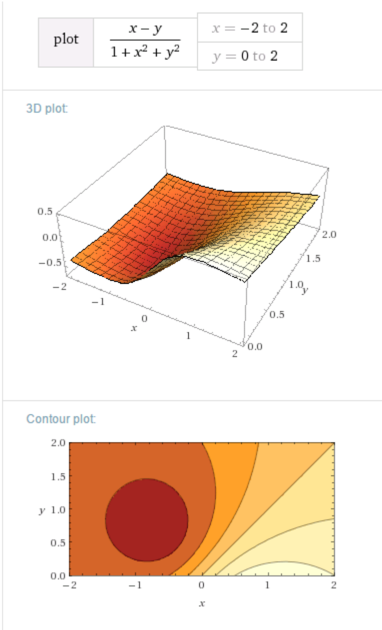
$$f(x, y) = \frac{x - y}{1 + x^2 + y^2},$$

suurin ja pienin arvo ylemmässä puolitasossa $y \geq 0$.

Ratkaisuehdotus: Lasketaan funktion gradientin nollakohdat:

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= \left(\frac{1}{1 + x^2 + y^2} - \frac{2x(x - y)}{(1 + x^2 + y^2)^2}, \frac{-1}{1 + x^2 + y^2} - \frac{2y(x - y)}{(1 + x^2 + y^2)^2} \right) = (0, 0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x^2 + y^2 + 2xy = 0 \\ -1 - x^2 + y^2 - 2xy = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \\ (x, y) = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) \end{cases} . \end{aligned}$$

Näistä pisteistä vain ensimmäinen on ylemmällä puolitasolla. Katsotaan, miltä kuvaaja näyttää:



Tuo ylin piste $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ näyttäisi siis olevan minimi.

Katsotaan vielä mitä reunalla tapahtuu. Nyt

$$f(x,0) = \frac{x}{1+x^2}$$

ja tämän funktion derivaatan nollakohta on

$$f'(x,0) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Funktion arvo pisteessä $(-1,0)$ on -1/2 ja pisteessä $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ se on $-1/(2\sqrt{2})$, joten $(-1,0)$ ei ole minimi. Piste $(1,0)$ on taasen maksimi. Nämä ovat myös globaaleja ääriarvoja.

Tehtäväsarja II

4. Olkoon $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 \leq y \leq 2x^2,\ 0 \leq x \leq 1\}$. Laske integraali

$$\int_D x^2 + y\, dxdy.$$

Ratkaisuehdotus: Lasketaan iteroituna integraalina:

$$\begin{aligned}
\int_D x^2 + y\, dxdy &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{2x^2} x^2 + y\, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\Big/_{x^2}^{2x^2} x^2 \cdot y + \frac{1}{2}y^2 \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(x^2 \cdot 2x^2 + \frac{1}{2}(2x^2)^2 - x^2 \cdot x^2 - \frac{1}{2}(x^2)^2 \right) dx \\
&= \int_0^1 \frac{5}{2}x^4\, dx = \frac{5}{2} \Big/_0^1 \frac{1}{5}x^5 = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{5} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

5.⋆ (Martio, HT 4.4:5) Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuva. Näytä, että

$$2\int_a^b \int_x^b f(x)f(y)\, dydx = \left(\int_a^b f(x)\, dx \right)^2.$$

Ratkaisuehdotus: Merkitään F, missä $F' = f$ eli F on f:n integraalifunktio. Tällöin

$$\int_x^b f(x)\,dx = F(b) - F(x).$$

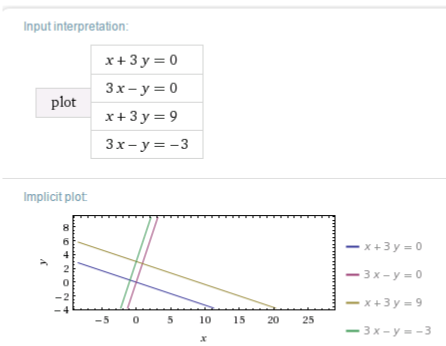
Lasketaan tämän avulla:

$$\begin{aligned}
2\int_a^b \int_x^b f(x)f(y)\,dxdy &= 2\int_a^b (F(b) - F(x))f(x)\,dx \\
&= 2\int_a^b F(b)f(x)\,dx - 2\int_a^b F(x)f(x)\,dx \\
&= 2F(b)\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b D(F(x))^2\,dx \\
&= 2F(b)(F(b) - F(a)) - F(b)^2 + F(a)^2 \\
&= 2F(b)^2 - 2F(b)F(a) - F(b)^2 + F(a)^2 \\
&= F(b)^2 - 2F(b)F(a) + F(a)^2 \\
&= (F(b) - F(a))^2 \\
&= \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2.
\end{aligned}$$

Tehtäväsarja III

6. Piirrä kuva alueesta D

   Ratkaisuehdotus: Kyseessä on neljän suoran rajaama alue:



7. Tarkastellaan muuttujanvaihtoa $u = x + 3y$, $v = 3x - y$. Määritä joukon D kuva $D' = F(D)$ kuvauksessa $F : (x, y) \mapsto (u, v)$, sekä laske käänteiskuvaus F^{-1}. Piirrä myös alue D'.

   Ratkaisuehdotus: Merkitään $F(x, y) = (u, v) = (x + 3y, 3x - y)$. Neljän suoran leikkauspisteet on $(0, 0)$, $(3/10, -9/10)$, $(3, 0)$ ja $(27/10, 9/10)$. Näiden kuvapisteet on puolestaan $(0, 0)$, $(0, -3)$, $(9, -3)$ ja $(9, 0)$ joten D' on sitten tavallinen suorakulmio

$$D' = \{(u, v) \mid 0 \le u \le 9, -3 \le v \le 0\}.$$

   Käänteiskuvaukseksi saadaan

$$F^{-1} = \left(\frac{u + 3v}{10}, \frac{3u - v}{10}\right).$$

   Käänteiskuvaus on ratkaistu yhtälöryhmästä

$$\begin{cases} u = x + 3y \\ v = 3x - y. \end{cases}$$

8.* Laske kuvausten F ja F^{-1} Jacobin determinantit, sekä määritä integraalin

$$\int_D x + y\, dxdy$$

arvo.

Ratkaisuehdotus: Lasketaan Jacobin determinantit eli derivaattamatriisen determinantit. Lasketaan se ensin kuvaukselle F. Kuvauksen F derivaattamatriisi on

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

ja sen determinantti on $1 \cdot (-2) - 3 \cdot 3 = -11$. Kuvauksen F^{-1} derivaattamatriisi on

$$\begin{bmatrix} 1/10 & 3/10 \\ 3/10 & -1/10 \end{bmatrix}$$

ja sen determinantti on $-1/10$. Näiden tietojen avulla voidaan laskea integraalin arvo:

$$\begin{aligned}
\int_D x + y\, dxdy &= \int_{-3}^{0} \int_{0}^{9} f(F^{-1}(u,v))|\det(F^{-1})'|\, dudv \\
&= \int_{-3}^{0} \int_{0}^{9} \left(\frac{u+3v}{10} + \frac{3u-v}{10} \right) \cdot \frac{1}{10} dudv \\
&= \int_{-3}^{0} \int_{0}^{9} \frac{4u+2v}{10} \cdot \frac{1}{10} dudv \\
&= \int_{-3}^{0} \left(\frac{1}{100} \Big/_{0}^{9} 2u^2 + 2vu \right) dv \\
&= \frac{1}{100} \int_{0}^{3} 162 + 18v\, dv = -\frac{1}{100} \Big/_{0}^{3} 162v + 9v^2 \\
&= \frac{1}{100} \cdot 405 = \frac{405}{100}
\end{aligned}$$

Näin loppukevennyksenä mainittakoon, että kaikki mallivastausten kuvat on piirretty wolfram alphalla. Sillä on myös kätevä tarkastaa integraalien arvoja ja gradientteja yms. Kaiken tämän lisäksi sieltä löytyy myös tällaisia helmiä: