Vektorianalyysi I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2016
Harjoitus 5 - Ratkaisuehdotuksia

Muista, että kurssisivulta löytyy linkki tämän viikon Stack-tehtäviin, joissa lisää integrointiharjoituksia.

Tehtäväsarja I

Aluksi pari helppoa integrointia. Näistä ensimmäinen on Harjoituksen 4 viimeinen tehtävä, tällä kertaa siten kun sen alunperin piti olla :)

1. Olkoon $\tilde{R} = [0,1] \times [1,2]$. Laske integraali

$$\int_{\tilde{R}} x_2 \sin(\pi x_1 x_2)\, dx.$$

Ratkaisuehdotus: Lasketaan iteroituna integraalina:

$$\begin{aligned}\int_{\tilde{R}} x_2 \sin(\pi x_1 x_2)\, dx &= \int_1^2 \int_0^1 \frac{1}{\pi} \pi x_2 \sin(\pi x_1 x_1)\, dx_1 dx_2 = \int_1^2 \frac{1}{\pi} \int_0^1 \pi x_2 \sin(\pi x_1 x_1)\, dx_1 dx_2 \\ &= \int_1^2 \left(\frac{1}{\pi} /_0^1 - \cos(\pi x_1 x_2) \right) dx_2 = \int_1^2 \frac{1}{\pi} (-\cos(\pi x_2) + \cos(0))\, dx_2 \\ &= \frac{1}{\pi} \int_1^2 -\cos(\pi x_2) + 1\, dx_2 = \frac{1}{\pi^2} \int_1^2 -\pi \cos(\pi x_2) + \pi\, dx_2 \\ &= \frac{1}{\pi^2}(-\sin(2\pi) + 2\pi + \sin(\pi) - \pi) = \frac{1}{\pi^2} \cdot \pi = \frac{1}{\pi}.\end{aligned}$$

2.* Olkoon T tasokolmio, jonka kärkipisteet ovat $(0,0)$, $(2,0)$ ja $(2,1)$. Laske integraali

$$\int_T x_1^2 + x_2^2\, dx.$$

Ratkaisuehdotus: Lasketaan tämäkin iteroituna integraalina. Koska nyt ei intergroida laatikon yli, täytyy integroimisrajoihin kiinnittää hieman huomiota. Kyseessä on integrointi tason kolmion yli, joten voidaan valita x_1:n integroimisväliksi $[0,2]$ ja x_2:n väliksi $[0, x_1/2]$ (piirrä kuva!). Täten

$$\begin{aligned}\int_T x_1^2 + x_2^2\, dx &= \int_0^2 \int_0^{x_1/2} x_1^2 + x_2^2\, dx_2 dx_1 = \int_0^2 \left(/_0^{x_1/2} x_1^2 \cdot x_2 + \frac{1}{3} x_2^3 \right) dx_1 \\ &= \int_0^2 \frac{x_1^3}{2} + \frac{1}{24} x_1^3\, dx_1 = \int_0^2 \frac{13}{24} x_1^3\, dx_1 = /_0^2 \frac{13}{96} x_1^4 = \frac{13}{96} \cdot 16 \\ &= \frac{13}{6}.\end{aligned}$$

Tehtäväsarja II

3.* Laske integraali

$$\int_Q (x_1 + x_2) e^{x_3}\, dx,$$

missä $Q = [0,1] \times [0,1] \times [-1,1]$.

Ratkaisuehdotus: Lasketaan iteroituna integraalina:

$$\begin{aligned}\int_Q (x_1+x_2)e^{x_3}\,dx &= \int_0^1\int_0^1\int_{-1}^1 (x_1+x_2)e^{x_3}\,dx_3dx_2dx_1 = \int_0^1\int_0^1 \Big((x_1+x_2)/_{-1}^1 e^{x_3}\Big)\,dx_2dx_1\\ &= \int_0^1\int_0^1 (x_1+x_2)(e-e^{-1})dx_2dx_1 = \int_0^1 \Big(/_0^1 x_1(e-e^{-1})x_2 + \frac{1}{2}x_2^2(e-e^{-1})\Big)\,dx_1\\ &= \int_0^1 x_1(e-e^{-1}) + \frac{1}{2}(e-e^{-1})dx_1 = /_0^1 \frac{1}{2}x_1^2(e-e^{-1}) + \frac{1}{2}(e-e^{-1})x_1\\ &= e-e^{-1}.\end{aligned}$$

4. Olkoon $Q=[-1,1]\times[0,1]\times[-1,1]$. Laske integraali

$$\int_Q x_1e^{x_2^2+x_3^2}\,dx.$$

Ratkaisuehdotus: Lasketaan iteroituna integraalina:

$$\begin{aligned}\int_Q x_1e^{x_2^2+x_3^2}dx &= \int_{-1}^1\int_0^1\int_{-1}^1 x_1e^{x_2^2+x_3^2}\,dx_1dx_2dx_3 = \int_{-1}^1\int_0^1\Big(e^{x_2^2+x_3^2}\int_{-1}^1 x_1\,dx_1\Big)\,dx_2dx_3\\ &= \int_{-1}^1\int_0^1 e^{x_2^2+x_3^2}\cdot 0\,dx_2dx_3 = \int_{-1}^1\int_0^1 0\,dx_2dx_3 = \int_{-1}^1 0\,dx_3 = 0.\end{aligned}$$

Tehtäväsarja III

5. Määritä funktion $f(x_1,x_2)=x_1^2-x_2^2$ suurin ja pienin arvo joukossa $\{(x_1,x_2);x_1^2+x_2^2=1\}$ sekä käyttäen Lagrangen kertoimia, että sopivaa parametriesitystä joukolle $\{(x_1,x_2);x_1^2+x_2^2=1\}$.

Ratkaisuehdotus: Lasketaan ääriarvot ensin viime viikolta tutulla tavalla eli parametrisoidaan joukko $\{(x_1,x_2);x_1^2+x_2^2=1\}=\{(\cos(\theta),\sin(\theta);\theta\in[0,2\pi]\}$. Tällöin

$$f(\cos(\theta),\sin(\theta)) = \cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)$$

ja tämän funktion derivaatan nollakohdat saadaan yhtälöstä

$$-2\sin(\theta)\cos(\theta)-2\cos(\theta)\sin(\theta)=0 \Leftrightarrow -4\cos(\theta)\sin(\theta)=0.$$

Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $\cos(\theta)=0$ tai $\sin(\theta)=0$ eli pisteissä $(0,1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$ ja $(0,-1)$.

Ratkaistaan tehtävi sitten Lagrangen kertoimien avulla. Reunaehto on nyt $g(x)=x_1^2+x_2^2-1=0$ ja $\nabla f(x_1,x_2)=(2x_1,-2x_2)$, $\nabla g(x_1,x_2)=(2x_1,2x_2)$. Tällöin saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases}2x_1=\lambda 2x_1\\ -2x_2=\lambda 2x_2\\ x_1^2+x_2^2-1=0.\end{cases}$$

Ylin yhtälö on totta, jos $\lambda=1$ tai $x_1=0$. Jos $x_1=0$, niin sidosehdosta $x_1^2+x_2^2=1$ saadaan, että $x_2=\pm1$. Jos taas $\lambda=1$, niin yhtälö $-2x_2=2x_2$ toteutuu vain, kun $x_2=0$ ja sidosehdosta saadaan taas, että tällöin $x_1=\pm1$.

6.* Määritä funktion $f(x_1,x_2,x_3)=x_2$ suurin ja pienin arvo joukossa $\{(x_1,x_2,x_3);x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1+2x_2+2x_3=6\}$. Osaatko päätellä lopputuloksen myös suoraan sopivasta kuvasta?

Ratkaisuehdotus: Ratkaistaan tämä Lagrangen kertoimien avulla. Nyt $\nabla f(x_1,x_2,x_3)=(0,1,0)$ ja

$$g(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1+2x_2+2x_3=6 \Leftrightarrow (x_1+1)^2+(x_2+1)^2+(x_3+1)^2=9,$$

joten reunaehdoksi saadaan $(x_1+1)^2+(x_2+1)^2+(x_3+1)^2-9=0$ ja

$$\nabla g(x_1,x_2,x_3)=(2x_1+2,2x_2+2,2x_3+2).$$

Tällöin yhtälöryhmäksi tulee

$$\begin{cases} 0=\lambda(2x_1+2)\\ 1=\lambda(2x_2+2)\\ 0=\lambda(2x_3+2)\\ (x_1+1)^2+(x_2+1)^2+(x_3+1)^2-9=0. \end{cases}$$

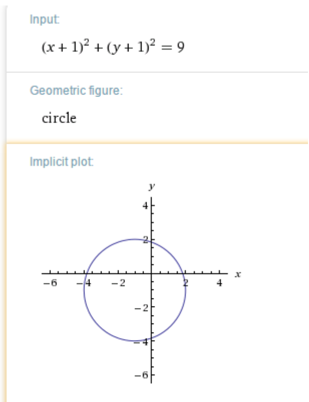
Ylin yhtälö toteutuu, kun $\lambda=0$ tai $2x_1+2=0 \Leftrightarrow x_1=-1$. Yhtälöllä $1=\lambda(2x_2+2)$ ei kuitenkaan ole ratkaisua, jos $\lambda=0$. Yhtälöstä $0=\lambda(2x_2+2)$ saadaa siten myöskin, että $x_3=-1$. Täten voidaan sidosehdosta ratkaista, että

$$0^2+(x_2+1)^2+0^2=9 \Rightarrow x_2+1=\pm 3 \Rightarrow x_2=-4 \text{ tai } 2.$$

Joukko

$$(x_1+1)^2+(x_2+1)^2+(x_3+1)^2=9$$

on $(-1,-1,-1)$-keskinen 3-säteinen kuula. Tältä se näyttäisi tasossa:



Jos meillä olisi nyt tehtävänä etsiä funktion $f(x_1,x_2)=x_2$ suurin ja pienin arvo kyseisellä ympyrällä, niin kuvasta näkee, että suurin arvo 2 ja pienin -4.