Vektorianalyysi I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2016
Harjoitus 2 - Ratkaisuehdotuksia

Kurssisivulta löytyy myös linkki myös tämän viikon Stack-tehtäviin, joissa jatketaan oisttainderivoinnin opettelua. Näitä derivointitehtäviä varten kannattaa lukea kurssikirjan kappaleet 2.3 sekä 2.5.

Tehtäväsarja I

1. Olkoon x, $y \in \mathbb{R}^n$. Käyttäen sisätulon laskusääntöjä todista *suunnikassääntö*:

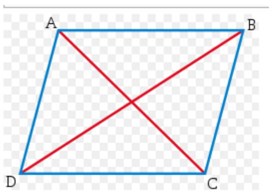
$$2|x|^2 + 2|y|^2 = |x + y|^2 + |x - y|^2.$$

Piirrä myös kuva, ja selitä mikä on tämän tuloksen geometrinen merkitys.

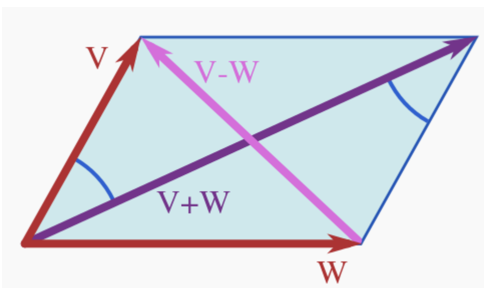
Ratkaisuehdotus: Tämä ratkaistaan ihan mekaanisesti laskemalla:

$$\begin{aligned}
|x + y|^2 + |x - y|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle + \langle x - y, x - y\rangle \\
&= \langle x, x + y\rangle + \langle y, x + y\rangle + \langle x, x - y\rangle - \langle y, x - y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\
&= 2\langle x, x\rangle + 2\langle y, y\rangle \\
&= 2|x|^2 + 2|y|^2.
\end{aligned}$$

Suunnikassääntö voidaan tulkita niin, että seuraavassa kuvassa sinisten janonen neilöiden summa on sama on sama kuin punaisten janojen neliöiden summa:

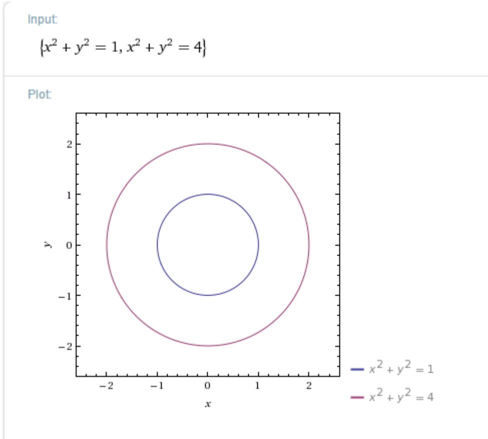


ja vastaavasti seuraavasta kuvasta näkee janojen ja vektoreiden vastaavuuden:



2. Olkoon x, $y \in \mathbb{R}^n$ ja $|x| = 1$ ja $|y| = 2$. Määritä vektorin $x - y$ suurin ja pienin mahdollinen pituus.

Ratkaisuehdotus: Kyseessä on siis ne vektorit joiden etäisyys origosta on joko 1 tai 2. Seuraavassa kuvassa on tilanne avaruudessa $\mathbb{R}^2$:



Käsiä heiluttemalla voidaan kuvasta nähdä, että pisteiden x ja y lyhyin mahdollinen etäisyys on 1 ja suurin mahdollinen etäisyys on 3.

Lasketaan tämä formaalisti. Jos $x = (x_1, y_1)$ ja $y = (y_1, y_2)$, niin

$$\begin{aligned}|x - y| &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2} \\ &= \sqrt{x_1^2 - 2x_1y_1 + y_1^2 + x_2^2 - 2x_2y_2 + y_2^2} \\ &= \sqrt{|x|^2 + |y|^2 - 2x_1y_1 - 2x_2y_2} \\ &= \sqrt{5 - 2x_1y_1 - 2x_2y_2}.\end{aligned}$$

Sijoitetaan $x = (1, 0)$. Tällöin

$$|x - y| = \sqrt{5 - 2y_1}.$$

Nyt voidaan tutkia funktion $f(z) = \sqrt{5 - 2z}$ ääriarvoja välillä $[0, 2]$ ja saadaan, että minimi saavutetaan kohdassa $z = 2$ ja maksimi kohdassa $z = 0$. Tällöin pienin etäisyys pisteiden x ja y on 1 ja suurin 3, koska pienin etäisyys pisteestä $x = (1, 0)$ on pisteeseen $y = (2, 0)$ ja suurin etäisyys pisteeseen $y = (0, 3)$.

3.* Oletetaan, että jonolle (x_i), $x_i = (x_{1,i}, \dots, x_{n,i}) \in \mathbb{R}^n$, pätee $|x_i| \leq 1$. Oletetaan, että on olemassa raja–arvo

$$x = \lim_{i \to \infty} x_i.$$

Päteekö $|x| \leq 1$? Anna tarkka todistus, tai keksi vastaesimerkki.

Ratkaisuehdotus: Osoitetaan, että väite pitää paikkaansa. Tehdään tämä vastaoletuksen kautta eli oletetaan, että

$$x = \lim_{i \to \infty} x_i,$$

$|x_i| \leq 1$ ja $|x| > 1$. Merkitään $x = (x_1, \dots, x_n)$. Koska jono suppenee kohti pistettä x, niin $x_{i,j}$ suppenee kohti pistettä x_j. Tämä tarkoittaa, että $|x_{i,j} - x_j| \to 0$, kun $i \to \infty$.

Tiedetään, että $|x| > 1$, joten $|x| > |x_{i,j}$. Käyttämällä hyväksi kolmioepäyhtälöä saadaan, että

$$|x_{i,j} - x_j| \geq ||x_{i,j}| - |x_j|| = |x_j| - |x_{i,j}| > 0.$$

Nyt jos valitaan $\epsilon = (|x_j| - |x_{i,j}|)/2$, niin saadaan

$$|x_j| - |x_{i,j}| \leq |x_{i,j} - x_j| < \epsilon = (|x_j| - |x_{i,j}|)/2,$$

mikä on ristiriita sen kanssa, että $|x_{i,j} - x_j|$ pitäisi saada epsilonia pienemmäksi. Siis vastaväite johtaa ristiriitan, joten $|x| \leq 1$.

Tehtäväsarja II

4.* Onko funktiolla

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{2x_1^2 + x_2^2}, \quad x = (x_1, x_2) \neq 0,$$

raja-arvoa kun $x \to 0$? Mitä tarkoitetaan, kun sanotaan että funktiolla on raja–arvo pitkin jokaista origon kautta kulkevaa suoraa? Onko funktiolla f tämä ominaisuus?

Ratkaisuehdotus: Funktion raja-arvon tutkiminen tapauksessa $\mathbb{R}^2$ eroaa $\mathbb{R}$:n tapauksessa siinä, että raja-arvoehdokasta voidaan lähestyä ylinumeroituvan monesta suunnasta (vrt. $\mathbb{R}$:ssä oikean- ja vasemmanpuoleinen raja-arvo). Jos halutaan tutkia, että onko funktiolla raja-arvoa origossa, niin helpointa on aloittaa tutkia miten funktio käyttäytyy, kun origoa lähestytään suoraa pitkin. Jos funktiolla olisi raja-arvo origossa, niin tulisi sen olla sama lähestyttiimpä origoa mitä tahansa suoraa pitkin.

Tutkitaan mitä käy, kun funktio lähestyy origoa suoraa $(x, 0)$ pitkin:

$$f(x, 0) = \frac{x \cdot 0}{2x^2 + 0^2} = 0.$$

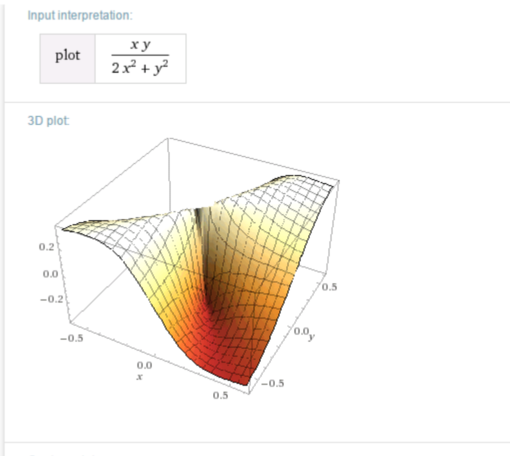
Funktio siis menee nollaan. Tutkitaan sitten suoraa (x, x):

$$f(x, x) = \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

Tehdään vielä viimeinen lasku suoraa $(x, 3x)$ pitkin:

$$f(x, 2x) = \frac{3x^2}{11x^2} = \frac{3}{11}.$$

Saatiin siis eri vastaukset riippuen siitä, mitä suoraa pitkin origoa saavuttiin. Funktiolla ei siis ole raja-arvoa origossa. Funktion kuvaaja näyttää muuten tältä:



5. Onko funktiolla

$$g(x_1, x_2) = \frac{\sin(x_1^2 x_2^2)}{2x_1^2 + x_2^2}, \quad x = (x_1, x_2) \neq 0,$$

raja-arvoa kun $x \to 0$?

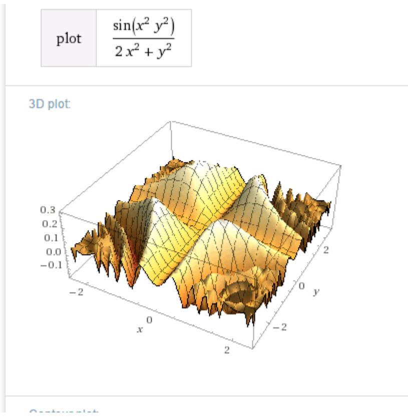
Ratkaisuehdotus: Osoitetaan, että funktiolla on origossa raja-arvo 0. Olkoon $z_i = (x_i, y_i)$ jono, joka suppenee kohti origoa. Nyt täytyy siis näyttää, että $f(z_i) \to 0$. Lähdetään tutkimaan:

$$f(z_i) = f(x_i, y_i) = \frac{\sin(x_i^2 y_i^2)}{2x_i^2 + y_i^2} \leq \frac{x_i^2 y_i^2}{2x_i^2 + y_i^2} \leq \frac{x_i^2 y_i^2}{x_i^2 + y_i^2}.$$

Tässä käytettiin tietoa siitä, että $\sin x \leq x$. Nyt lopputehtävä vastaa suoraan Martion kirjan esimerkkiä 2.2.5. Koska $x_i^2 + y_i^2 \geq 2x_i y_i$, niin

$$\frac{x_i^2 y_i^2}{x_i^2 + y_i^2} = \frac{2x_i y_i x_i y_i}{2(x_i^2 + y_i^2)} \leq \frac{x_i y_i}{2} \to 0,$$

kun $i \to \infty$. Funktion kuvaaja näyttää tältä:



6.* Onko funktiolla

$$h(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 x_2}{x_1^4 + x_2^2}, \quad x = (x_1, x_2) \neq 0,$$

raja-arvoa kun $x \to 0$? **Vihje:** Tutki funktion käyttäytymistä pitkin sopivia origon kautta kulkevia käyriä.

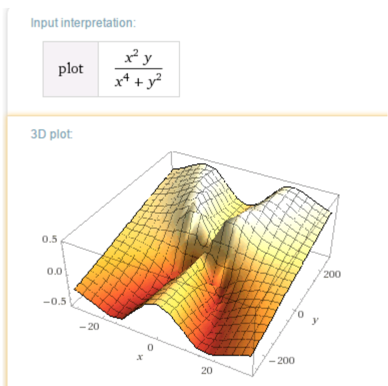
Ratkaisuehdotus: Osoitetaan, että funktiolla ei ole raja-arvoa tutkimalla paraabeleja (x, ax^2). Nyt

$$h(x, x^2) = \frac{x^2 x^2}{x^4 + x^4} = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2},$$

mutta

$$h(x, 3x^2) = \frac{x^2 3x^2}{x^4 + 9x^4} = \frac{3x^4}{10x^4} = \frac{3}{10}.$$

Vielä formaalimmin ilmaisten: On olemassa kaksi jonoa (x_i, x_i^2) ja $(x_i, 3x_i^2)$, jotka kummatkin suppenevat kohti origoa, mutta $h(x_i, x_i^2) \to 1/2$ ja $h(x_i, 3x_i^2) \to 3/10$, joten funktiolla h ei ole raja-arvoa origossa. Funktio näyttää tältä:



Tehtäväsarja III

7. Laske funktion $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1^2 + x_2) + (1 + e^{x_3})$ gradientti.

   Ratkaisuehdotus: Tehtäväannon määritelmän mukaan funktion f gradientti $\nabla f(x)$ on vektori

   $$\nabla f(x) = (\partial_1 f(x), \partial_2 f(x), \partial_3 f(x),$$

   missä $x = (x_1, x_2, x_3)$. Lasketaan siis funktion f osittaisderivaatat. Ne ovat

   $$\begin{aligned}\partial_1 f(x_1, x_2, x_3) &= 2x_1 \cos(x_1^2 + x_2)\\ \partial_2 f(x_1, x_2, x_3) &= \cos(x_1^2 + x_2)\\ \partial_3 f(x_1, x_2, x_3) &= e^{x_3},\end{aligned}$$

   joten

   $$\nabla f(x) = (2x_1 \cos(x_1^2 + x_2), \cos(x_1^2 + x_2), e^{x_3}).$$

8. Perehdy kurssikirjan esimerkkiin 2.4.1, ja laske tarkasti perustellen siinä esitellyn funktion gradientti jokaisessa tason pisteessä. Edelleen pohdi, kuinka paljon gradientti kertoo funktion käytöksestä ilman muita oletuksia funktiosta.

   Ratkaisuehdotus: Jaetaan tarkastelu neljään eri tapaukseen: 1) $(x, y) = (0, 0)$, 2) $(x, y) = (0, y)$ missä $y \neq 0$, 3) $(x, y) = (x, 0)$ missä $x \neq 0$ ja 4) (x, y) missä $x \neq 0$ ja $y \neq 0$. Kerrataan vielä osittaisderivaatan määritelmä: jos raja-arvo

   $$\lim_{h\to 0} \frac{f(x + he_j) - f(x)}{h}$$

   on olemassa, niin se on funktion f osittaisderivaatta muuttujan x_j suhteen pisteessä x (kirjasta löytyy vielä tarkat vaatimuksen h:n suhteen, ks. kappale 2.3.)

   1) Olkoon $(x, y) = (0, 0)$. Tällöin

      $$\lim_{h\to 0} \frac{f((x, y) + he_1) - f(x, y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0,$$

      joten $\partial_1 f(0, 0) = 0$. Samoin myös $\partial_2 f(0, 0) = 0$.

   2) Olkoon $(x, y) = (0, y)$, missä $y \neq 0$. Tällöin

      $$\lim_{h\to 0} \frac{f((x, y) + he_1) - f(x, y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0 + h, y) - f(0, y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1 - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h},$$

      mutta tätä raja-arvoa ei ole olemassa. Ei siis ole olemassa osittaisderivaattaa $\partial_1 f(0, y)$. Katsotaan vielä onko sillä toista osittaiderivaattaa:

      $$\lim_{h\to 0} \frac{f((x, y) + he_2) - f(x, y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0, y + h) - f(0, y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0,$$

      joten $\partial_2 f(0, y) = 0$.

   3) Tämä on symmetrinen edellisen kohdan kanssa eli toinen osittaisderivaatta on olemassa, mutta toista ei.

   4) Olkoon (x, y) sellainen, että $x \neq 0 \neq y$. Tällöin

      $$\lim_{h\to 0} \frac{f((x, y) + he_1) - f(x, y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1 - 1}{h} = 0,$$

      joten $\partial_1 f(x, y) = 0$. Samoin myös $\partial_2 f(x, y) = 0$.

Kirjassa mainitaan, että funktio ei ole jatkuva origossa. Sillä on kuitenkin olemassa osittaisderivaatat origossa, joten osittaisderivaattojen olemassaolosta ei voida vetää mitään johtopäätöksiä funktion jatkuvuudesta.

9. Olkoon $f(x_1, x_2) = \sin(x_1 + x_2)$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, ja $g(t) = (e^t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$. Perehdy kurssikirjan kappaleeseen 2.5, ja erityisesti *ketjusääntöön*. Laske huolellisesti ketjusääntöä käyttäen funktion $(f \circ g)(t)$ derivaatta.

   Ratkaisuehdotus: Kyseessä on tilanne, jossa $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Käytetään siis kirjan lausetta 2.5.9. (näin voidaan tehdä, koska $g'(t)$ on olemassa jokaisessa pisteessä t ja f on derivoituva). Lauseen mukaan

$$(f \circ g)'(t) = \nabla f(g(t)) \cdot g'(t).$$

   Lasketaan gradientti ja $g'(t)$, joka on määritelty $g'(t) = (g_1'(t), g_2'(t))$. Nyt

$$\nabla f(x_1, x_2) = (\cos(x_1 + x_2), \cos(x_1 + x_2)$$

   ja $g'(t) = (e^t, 2t)$, joten

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(t) = \nabla f(g(t)) \cdot g'(t) &= (\cos(e^t + t^2), \cos(e^t + t^2)) \cdot (e^t, 2t) \\ &= e^t \cos(e^t + t^2) + 2t \cos(e^t + t^2).\end{aligned}$$

Tehtäväsarja IV

10. Laske funktion $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$ derivaattamatriisi.

    Ratkaisuehdotus: Derivaattamatriisi on matriisi, johon tulee funktion osittaisderivaat. Matriisin koko riippuu siitä, että minkä avaruuksien välillä kuvaus on määritelty. Tässä tehtävässä $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, joten derivaattamatriisi on muotoa 2×2. Se on määritelmän mukaan

$$f'(x) = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(x) & \partial_2 f_1(x) \\ \partial_1 f_2(x) & \partial_2 f_2(x) \end{bmatrix}.$$

    Tässä siis $f_1(x) = x_1 + x_2$ ja $f_2(x) = x_1 - x_2$. Laskemalla osittaisderivaatat saadaan, että

$$f'(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

11.* Määritä funktion $g(x_1, x_2) = (\sin(x_1), x_1 + x_2, x_1 x_2)$ derivaattamatriisi.

    Ratkaisuehdotus: Nyt $g_1(x) = \sin(x_1)$, $g_2(x) = x_1 + x_2$ ja $g_3(x) = x_1 x_2$. Funktio g on kuvaus avaruudesta $\mathbb{R}^2$ avaruuteen $\mathbb{R}^3$, joten sen derivaattamatriisi on muotoa

$$g'(x) = \begin{bmatrix} \partial_1 g_1(x) & \partial_2 g_1(x) \\ \partial_1 g_2(x) & \partial_2 g_2(x) \\ \partial_1 g_3(x) & \partial_2 g_3(x) \end{bmatrix}.$$

    Laskemalla osittaisderivaatat saadaan, että

$$g'(x) = \begin{bmatrix} \cos(x_1) & 0 \\ 1 & 1 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix}.$$

12. Laske tehtävän 9 funktion $g \circ f$ derivaattamatriisi.

Ratkaisuehdotus: Lause 2.6.6. antaa ketjusäännön kaikkein yleisimmässä tapauksessa. Se on aivan sama kuin yhden muuttyjan tapauksessa, jossa ulkofunktion derivaatta kerrotaan sisäfunktion derivaatalla. Nyt kertolaskuna on vain matriisikertolasku. Siis

$$\begin{aligned}
(g \circ f)'(x) &= g'(f(x)) \cdot f'(x) \\
&= \begin{bmatrix} g_1'(\sin(x_1 + x_2)) \\ g_1'(\sin(x_1 + x_2)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(x_1 + x_2) & \cos(x_1 + x_2)) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^{\sin(x_1+x_2)} \\ 2\sin(x_1 + x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(x_1 + x_2) & \cos(x_1 + x_2) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^{\sin(x_1+x_2)} \cdot \cos(x_1 + x_2) & e^{\sin(x_1+x_2)} \cdot \cos(x_1 + x_2) \\ 2\sin(x_1 + x_2) \cdot \cos(x_1 + x_2) & 2\sin(x_1 + x_2) \cdot \cos(x_1 + x_2) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Nyt tuloksena on 2×2-matriisi, koska kuvauksen g derivaattamatriisi on muotoa 2×1 ($g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$) ja kuvauksen f derivaattamatriisi on muotoa 1×2 ($f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$).