Vektorianalyysi I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2016
Harjoitus 1 - Ratkaisuehdotuksia

Kurssisivulta löytyy myös linkki tämän viikon Stack-tehtäviin, joissa kerrataan hieman lineaarialgebraa, sekä lasketaan muutama yksinkertainen osittainderivointi. Näitä derivointitehtäviä varten kannattaa lukea kurssikirjan kappale 2.3.

Tehtäväsarja I

1. Olkoon $f(x) = \sin(x)$ ja $g(x) = (1 + x^2)^{-1}$, $x \in \mathbb{R}$. Laske $(f \circ g)$' ja $(g \circ f)$'.

   Ratkaisuehdotus: Tämä tehtävä ratkeaa käyttämällä yhdistetyn funktion derivoimissääntöä eli ketjusääntöä, joka sanoo, että $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$. Nyt pätee, että $f'(x) = \cos x$ ja $g'(x) = -2x(1 + x^2)^{-2}$ (kunktion g derivaatta on saatu myös käyttämällä ketjusääntöä). Tästä saadaan, että

$$(f \circ g)'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sin\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\right) = \frac{-2x\cos\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{(1+x^2)^2}$$
$$(g \circ f)'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+\sin^2 x}\right) = \frac{-2\sin x\cos x}{(1+x^2)^2}.$$

2.* Tässä tehtävässä kertaamme funktion ääriarvojen (eli maksimien ja minimien) etsimistä.

   (a) Määritä funktion $f(x) = x\sin(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$, lokaalit ääriarvot, sekä mahdollinen globaali maksimi ja minimi. Kuvaajan hahmottelu auttaa!

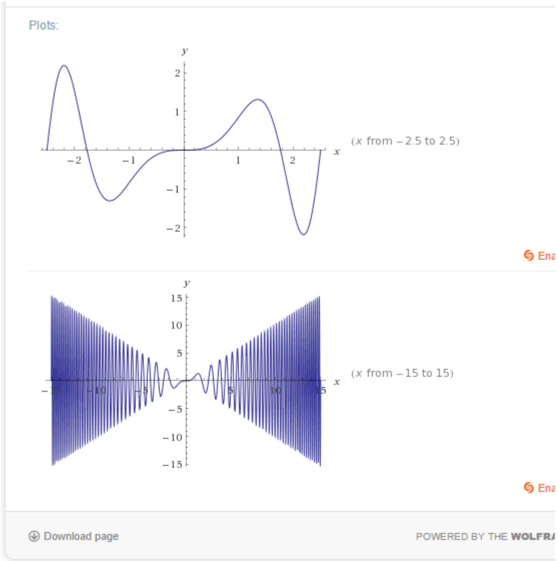
   (b) Muutoin sama tehtävä kuin kohdassa (a), mutta nyt määrittelemme funktion vain suljetulla välillä $[-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}]$.

   Ratkaisuehdotus: Funktion ääriarvot saadaan joko derivaatan nollakohdissa tai määrittelyjoukon reunalla (funktio on kaikkialla derivoituva).

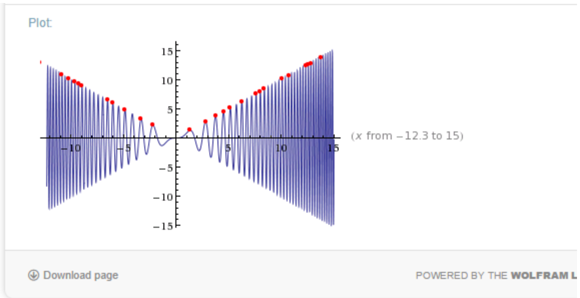
   (a) Fukntion $f(x) = x\sin(x^2)$ derivaatta saadaan tulon derivoimissääntöä käyttämällä. Merkitään $g(x) = x$ ja $h(x) = \sin(x^2)$. Tällöin

$$f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) = \sin x^2 + x \cdot \sin x^2 \cdot 2x = \sin x^2 + 2x^2\cos x^2.$$

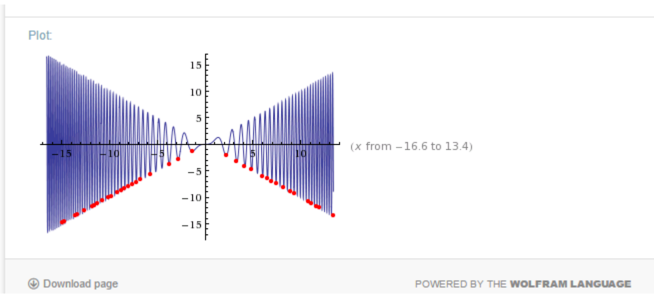
   Valitettavasti yhtälölle $\sin x^2 + 2x^2\cos x^2 = 0$ ei löydy ratkaisua suljetussa muodossa. Funktion $x\sin x^2$ kuvaaja näyttää tältä:



josta nähdään, että funktion lokaalit maksimit ovat kohdissa

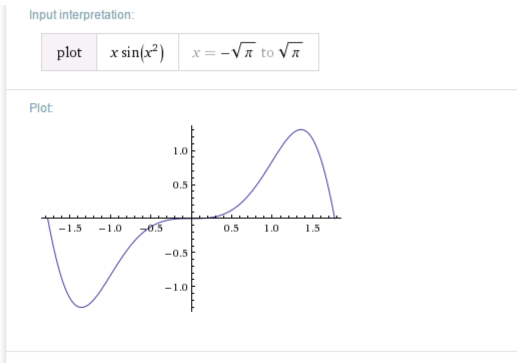


ja lokaalit minimit kohdissa



Funktiolla ei ole globaaleja ääriarvoja.

(b) Katsotaan, miltä kuvaaja näyttää suljetulle välille rajoitettuna:



Nyt ääriarvokohdat ovat globaaleja ääriarvoja, koska välin päätepisteissä funktion arvot on

$$\begin{aligned} f(-\sqrt{\pi}) &= -\sqrt{\pi}\cdot\sin(-\sqrt{\pi})^2 = -\sqrt{\pi}\cdot\sin(\pi) = -\sqrt{\pi}\cdot 0 = 0 \\ f(\sqrt{\pi}) &= \sqrt{\pi}\cdot\sin(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Funtion derivaatalla on nollakohta origossa. Origo ei kuitenkaan ole ääriarvo, koska siinä on satulapiste.

3. Oletetaan, että f on derivoituva pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}$. Onko f jatkuva pisteessä x_0? Anna todistus tai keksi vastaesimerkki.

Ratkaisuehdotus: Osoitetaan, että tehtävän väite pitää paikkansa. Oletetaan siis, että funktio f on derivoituva pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}$ ja että f on määritelty pisteen x_0 ympäristössä. Koska f on derivoituva pisteessä x_0, niin

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} f(x_0+h)-f(x_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot h \\ &= f'(x_0)\cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

joten

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0).$$

Merkitään vielä lopuksi $x = x_0 + h$, jolloin saadaan, että

$$\lim x \to x_0 f(x) = f(x_0).$$

Saimme siis osoitettua, että f on jatkuva pisteessä x_0.

Tehtäväsarja II

4.* Laske integraalit

$$(a)\ \int_0^1 x^2e^x\,dx, \quad (b)\ \int_0^1 x\,e^{x^2}\,dx, \quad (c)\ \int_{-\infty}^{\infty} x^7e^{-x^2}\,dx.$$

Ratkaisuehdotus:

(a) Käytetään osittaisintegrointia. Valitaan $f(x) = x^2$ ja $g'(x) = e^x$. Tällöin

$$\int_0^1 x^2e^x dx = /_0^1 x^2e^x - \int_0^1 2xe^x dx = e\int_0^1 2xe^x dx.$$

Tehdään uusi valinta uutta osittaisintegrointia varten valitsemalla $f(x) = 2x$ ja $g'(x) = e^x$. Saadaan, että

$$\int_0^1 2xe^x dx = /_0^1 2xe^x - \int_0^1 2e^x dx = 2e - 2e + 2 = 2,$$

joten

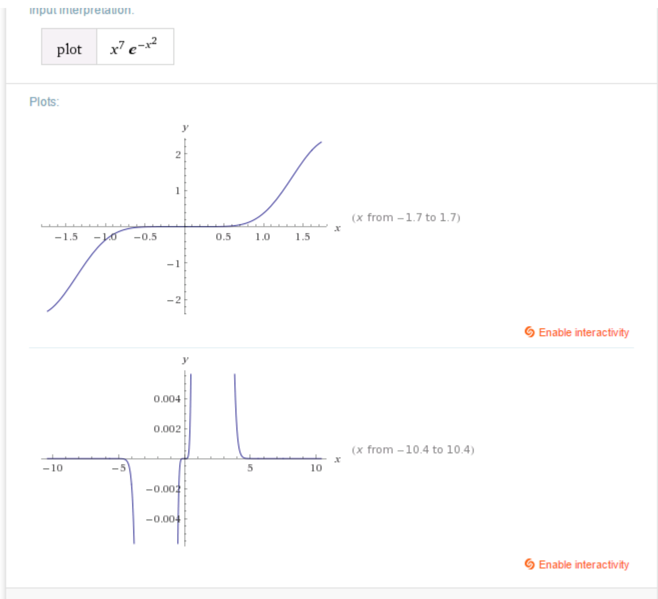
$$\int_0^1 x^2e^x dx = e - 2.$$

(b) Tiedetään, että $\mathrm{D}e^{x^2} = 2xe^{x^2}$, joten $\mathrm{D}1/2e^{x^2} = xe^{x^2}$. Tästä saadaan, että

$$\int_0^1 xe^{x^2}dx = /_0^1 \frac{1}{2}e^{x^2} = \frac{1}{2}(e^1 - e^0) = \frac{1}{2}(e-1).$$

(c) Tehtävä ratkeaa helposti, kun huomataan että funktio $f(x) = x^7 e^{x^{-2}}$ on pariton eli $f(-x) = -f(x)$. Tällöin tiedämme, että

$$\int_{-a}^{a} x^7 e^{x^{-2}} = 0.$$



Integraali voidaan ratkaista myös sijoitusmenetelmällä. Nyt joudumme käyttämään sitä monta kertaa, mutta voimme ottaa avuksi edellisen kohdan ratkaisun. Kirjoitetaan integraali muotoon

$$\int x^6 \cdot xe^{-x^2}dx$$

ja merkitään $f(x) = x^6$, $g'(x) = xe^{-x^2}$. Tällöin saadaan, että

$$\int x^6 \cdot xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}x^6e^{x^{-2}} + \int 6x^5\frac{1}{2}e^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}x^6e^{-x^2} + \int 3x^5e^{-x^2}dx.$$

Merkitään sitten $f(x) = 3x^4$, $g'(x) = xe^{-x^2}$, jolloin

$$\int 3x^4 \cdot xe^{-x^2}dx = -3x^4\frac{1}{2}e^{-x^2} + \int 12x^3\frac{1}{2}e^{-x^2}dx = -\frac{3}{2}x^4e^{-x^2} + \int 6x^3e^{-x^2}dx.$$

Toistetaan sama prosessi vielä muutama kerta, jolloin saadaan

$$\int x^7e^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\left(x^6 + 3x^4 + 6x^2 + 6\right) + C.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} x^7e^{-x^2}dx = &-\frac{1}{2}e^{-a^2}\left((-a)^6 + 3a^4 + 6a^2 + 6\right)\\ &+\frac{1}{2}e^{-a^2}\left((-a)^6 + 3(-a)^4 + 6(-a)^2 + 6\right) = 0.\end{aligned}$$

5. Laske integraali
$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$$
Vihje: Käytä sopivaa sijoitusta.

Ratkaisuehdotus: Käytetään sijoitusmenetelmää ja sijoitetaan $x = \sin t$, $dx = \cos t dt$. Tällöin
$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-sin^2 t}\cos t dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt.\end{aligned}$$
Yllä on käytetty kaavaa $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$. Käyttämällä kaavaa $\cos^2 t = 1/2(1+\cos 2t)$ ja tietoa integraalin ominaisuuksista, voidaan yhtälöä muokata eteenpäin:
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi/2} 1 dt + \int_0^{\pi/2} \cos 2t dt\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos 2t dt.\end{aligned}$$
Käytetään jäljelle jääneen integraalin laskemiseen taas sijoitusta tekemällä sijoitus $t = x/2$, $dt = 1/2dx$. Tästä saadaan, että
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \cos 2t dt &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos x dx \\ &= \frac{1}{2}(\sin\pi - \sin 0) = 0,\end{aligned}$$
joten
$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4}.$$

Tehtäväsarja III

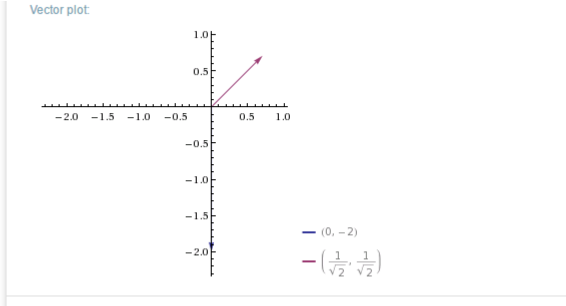
6. Olkoon $a = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ ja $b = (0, -2)$. Laske vektorin $a - b$ pituus.

Ratkaisuehdotus: Ratkaistaan ensin vektori $a - b$:
$$a - b = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) - (0, -2) = (1/\sqrt{2} - 0, 1/\sqrt{2} - (-2)) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2} + 2).$$
Nyt voidaan laskea vektorin $a - b$ pituus:
$$\begin{aligned}\|a-b\| &= \|(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}+2)\| = \sqrt{(1/\sqrt{2})^2 + (1/\sqrt{2}+2)^2} \\ &= \sqrt{1/2 + 1/2 + 4/\sqrt{2} + 4} = \sqrt{5 + 4/\sqrt{2}} = \sqrt{5 + 2\sqrt{2}} \\ &\approx 2.8.\end{aligned}$$

7. Määritä edellisen tehtävän vektorien a ja b välinen kulma sekä päätelemällä kuvasta (piirrä kuva!), että käyttämällä kulman ja sisätulon välistä yhteyttä.

Ratkaisuehdotus: Kulman ja sisätulon välinen yhteys saadaan kaavalla
$$\cos\theta = \frac{a\cdot b}{\|a\|\|b\|}.$$
Vektorin a pituus on 1 ja vektorin b pituus on 2. Niiden sisätulo on
$$a\cdot b = (1/\sqrt{2})\cdot 0 - (1/\sqrt{2})\cdot 2 = -\sqrt{2}.$$

Tästä voidaan sitten laskea, että $\cos\theta = -1/\sqrt{2} \Leftrightarrow \theta = 135\,\text{deg}$. Tämän näkee myös helposti kuvasta:



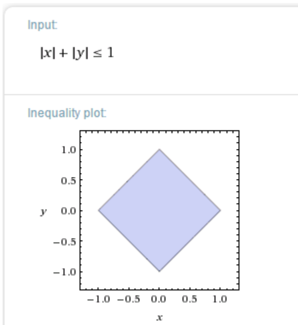
8. Olkoon $x_n = (1 + 1/n, e^{-n})$ ja $y_n = (1 + 1/n, e^n)$, $n \in \{1, 2, \ldots\}$. Määritä jonojen (x_n) ja (y_n) raja–arvot mikäli olemassa, kun $n \to \infty$.

   Ratkaisuehdotus: Avaruuden $\mathbb{R}^2$ jononen suppenemisen tutkimiseen riittää tarkastella ”koordinaattijonoja”. Tiedämmen, että jono $x_n = (a_n, b_n)$ suppenee, jos ja vain jos jonot a_n ja b_n suppenevat. Jos a_n suppenee kohti pistettä a ja b_n suppenee kohti pistettä b, niin x_n suppenee kohti pistettä (a, b). Voidaan käyttää tässä hyväksi Analyysin kursseilta opittuja tietoja raja-arvoista. Tiedetään siis, että $1/n \to 0$, $e^n \to \infty$ ja $e^{-n} \to 0$ kun $n \to \infty$. Tästä seuraa, että $1 + 1/n \to 1$, joten x_n suppenee kohti pistettä $(1, 0)$. Jono y_n ei puolestaan suppene, koska jono e^n ei suppene.

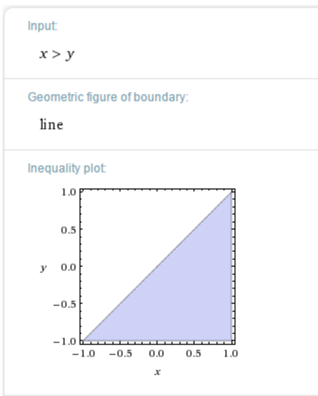
Tehtäväsarja IV

9. Piirrä joukkojen A, B ja C kuvat.

   Ratkaisuehdotus: Joukko A näyttää tältä:



Joukko B on sama joukko, mutta siitä on poistettu origo. Joukko C näyttää tältä:



10.* Mitkä näistä joukoista ovat avoimia, ja mitkä suljettuja?

Ratkaisuehdotus: Avoimien ja suljettujen joukkojen teoriaa selvitellään tarkemmin kurssilla Topologia 1. Tässä riittää, että osaa intuitiivisesti sanoa, että onko joukko avoin tai suljettu. Nopeasti sanottana esimerkiksi joukko $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\}$ on avoin, koska pallon reuna ei kuulu joukkoon ja toisaalta taas joukko $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\}$ on suljettu, koska pallon reuna kuuluu siihen. On kuitenkin tärkeää huomata se, että määritelminä avoin ja suljettu joukko eivät ole toistensa vastakohtia. On nimittäin olemassa joukkoja, jotka ovat samaan aikaan avoimia ja suljettuja ja toisaalta on myös olemassa joukkoja, jotka eivät ole kumpaakaan!

Edellisen tehtävän joukoista joukko A on suljettu. Joukon C kuva on hieman harhaanjohtava, koska nyt joukossa C ei ole pisteitä $x = y$. Se on siis avoin (kuten on kaikki avoimet välit (a, b) $\mathbb{R}$:ssä, koska päätepisteitä voidaan lähestyä mielivaltaisen lähelle). Joukko B on nyt esimerkki joukosta, joka ei ole avoin eikä suljettu. Toisaalta siihen kuuluu neliön reuna, mutta origoa voidaan lähestyä mielivaltaisen lähelle sitä koskaan saavuttamatta. Esimerkiksi jono $(1/n, 0)$ suppenee kohti origoa, mutta B ei sisällä tätä rajapistettä.

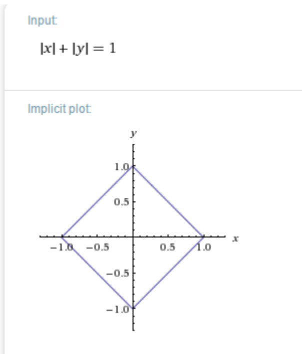
Bonustehtävä: Keksitkö joukon, joka on yhtäaikaa suljettu ja avoin?

11. Määritä joukkojen reunat ∂A, ∂B ja ∂C.

Ratkaisuehdotus: Joukon A reuna ∂A on A:n osajoukko, koska A on suljettu. Nyt

$$\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| = 1\}$$

eli tämä joukko



Joukon C reuna taas vuorostaan ei ole itsensä osajoukko, koska C on avoin. Nyt

$$\partial C = \{(x, y) \mid x = y\}.$$

Joukon B reuna on muuten sama, kuin joukon A reuna, mutta lisättynä origo (koska mikä tahansa origokeskeinen palloympäristö sisältää pisteitä B:stä ja sen komplementista, koska origo itse kuuluu B:n komplementtiin).

Tehtäväsarja V

Lopuksi muutama harjoitustehtävä raja–arvoista. Tätä varten lue kurssikirjan kappale 2.2. Alla merkitsemme $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

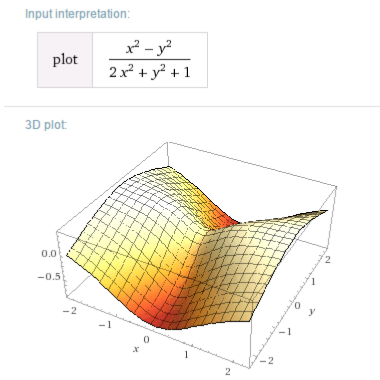
12. Määritä raja–arvo

$$\lim_{x \to 0} \frac{x_1^2 - x_2^2}{2x_1^2 + x_2^2 + 1}.$$

Ratkaisuehdotus: Funktiolla f on raja-arvo a pisteessä 0, jos jokaisella jonolla z_n, $z_n \to 0$, pätee $f(z_n) \to a$. Olkoon siis $z_n = (x_n, y_n)$ jono, joka suppenee kohti origoa. Tämä tarkoittaa, että $x_n \to 0$ ja $y_n \to 0$. Analyysin kurssin tietojen pohjalta tiedetään, että tällöin $x_n^2 \to 0$ ja $y_n^2 \to 0$. Lisäksi $x_n^2 + y_n^2 \to 0$ ja $2x_n^2 + y_n^2 + 1 \to 1$, joten

$$\frac{x_n^2 - y_n^2}{2x_n^2 + y_n + 1} \to \frac{0}{1} = 0.$$

Funktion kuvajaa onkin origossa oikein nätti:



13. Määritä raja–arvo

$$\lim_{x \to 0} \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 + x_2}.$$

Ratkaisuehdotus: Funktiota $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x + y)$ ei ole määritelty origossa. Nyt kuitenkin käy niin, että nimittäjä voidaan sieventää lausekkeesta kokonaan:

$$\frac{x^2 - y^2}{x + y} = \frac{(x + y)(x - y)}{x + y} = x - y.$$

Sitten samalla päättelyllä kuin edellisessä tehtävässä saadaa, että

$$x_n - y_n \to 0,$$

kun $x_n \to 0$, $y_n \to 0$. Funktio näyttää taas aika kivalta: