

Vektorianalyysi I

Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos

Syksy 2016

Harjoitus 7

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 21.10.2016 klo 19.00.

Muista, että kurssisivulta löytyy linkki tämän viikon Stack-tehtäviin, joissa pääasiassa kertaustehtäviä.

Tehtäväsarja I

Seuraavissa tehtävissä on tarkoitus vaihtaa integrointijärjestystä iteroiduissa integraaleissa (joudut siis muuntamaan integrointirajoja). Laske myös integraalien arvot.

1.

$$\int_0^1 \left(\int_1^{e^x} dy \right) dx.$$

2.

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^x dy \right) dx.$$

3.

$$\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx \right) dy.$$

4.*

$$\int_0^1 \left(\int_y^1 x^2 e^{xy} dx \right) dy.$$

Tehtäväsarja II

5. Olkoon $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, y \geq 0\}$. Piirrä kuva joukosta A , ja laske sen jälkeen integraalit

$$\int_A y \, dx dy, \quad \int_A x^3 y \, dx dy.$$

6.* (Martio, HT 5.2:1) Olkoon $A = \{(x, y, z); 0 \leq x^2 + y^2 \leq r^2, 0 \leq z \leq h\}$ sylinteri. Määritä integraali

$$\int_A z(x^2 + y^2) \, dx dy dz.$$

Tehtäväsarja III

Seuraavia tehtäviä varten lue kurssikirjasta \mathbb{R}^3 :n napakoordinaatteja käsittelevä kohta sivuilta 130–131.

7. Osoita, että \mathbb{R}^3 :n napakoordinaattimuunnoksen Jacobin determinantti $= r^2 \sin \theta$.

8.* (Martio, HT 5.2:2) Laske ellipsoidin $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leq 1$ tilavuus. Käytä hyväksesi muunnosta $w(x, y, z) = (ax, by, cz)$.