

Vektorianalyysi I

Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos

Syksy 2016

Harjoitus 6

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 14.10.2016 klo 19.00.

Muista, että kurssisivulta löytyy linkki tämän viikon Stack-tehtäviin.

Tehtäväsarja I

Aluksi kolme ääriarvot tehtävää suoraan kurssikirjasta.

1. (Martio, HT 3.4:1) Millä suoralla sylinterillä, jonka tilavuus on V , on pienin vaipan ja pohjien yhteenlaskettu pinta-ala?

2.* (Martio, HT 2.9:9) On tehty joukko havaintoja $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, \dots, n$. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(k, m) = \sum_{i=1}^n (y_i - kx_i - m)^2$$

Olkoon (k_0, m_0) funktion f absoluuttinen minimi. Minkä yhtälön piste (k_0, m_0) toteuttaa? Tässä on kyseessä pienimmän neliösumman metodilla tapahtuva regressiosuoran määrittäminen. Absoluuttisen minimin olemassoloa ei tarvitse tutkia.

3. (Martio, HT 3.4:4) Etsi funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \frac{x - y}{1 + x^2 + y^2},$$

suurin ja pienin arvo ylemmässä puolitasossa $y \geq 0$.

Tehtäväsarja II

4. Olkoon $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 \leq y \leq 2x^2, 0 \leq x \leq 1\}$. Laske integraali

$$\int_D x^2 + y \, dx dy.$$

5.* (Martio, HT 4.4:5) Olkoon $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva. Näytä, että

$$2 \int_a^b \int_x^b f(x)f(y) \, dy dx = \left(\int_a^b f(x) \, dx \right)^2.$$

Tehtäväsarja III

Lue kurssikirjan kappale 4.5, joka käsittelee muuttujanvaihtoa integraaleissa, ja ratkaise seuraavat tehtävät. Tarkastellaan suorien $x + 3y = 0$, $3x - y = 0$, $x + 3y = 9$ ja $3x - y = -3$ rajoittamaa tasoaluetta D .

6. Piirrä kuva alueesta D

7. Tarkastellaan muuttujanvaihtoa $u = x + 3y$, $v = 3x - y$. Määritä joukon D kuva $D' = F(D)$ kuvauksessa $F : (x, y) \mapsto (u, v)$, sekä laske käänteiskuvaus F^{-1} . Piirrä myös alue D' .

8.* Laske kuvausten F ja F^{-1} Jacobin determinantit, sekä määritä integraalin

$$\int_D x + y \, dx dy$$

arvo.