Vektorianalyysi I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2016
Harjoitus 4

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 30.09.2016 klo 19.00.

Muista, että kurssisivulta löytyy linkki tämän viikon Stack-tehtäviin, joissa ensimmäisiä integrointiharjoituksia.

Tehtäväsarja I

1. Laske funktion
$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)e^{x_3}, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$
suunnattu derivaatta pisteesä $(0, 0, 1)$ suuntaan $(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$.

2. (Martion kirjan tehtävä 2.7:1) Osoita, että suunnatulle derivaatalle pätee $\partial_{-v} f(x) = -\partial_v f(x)$.

3. (Martion kirjan tehtävä 2.7:2) Funktio $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on *parillinen*, jos $f(-x) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että jos f on lisäksi derivoituva, niin $\nabla f(-x) = -\nabla f(x)$. Määritä tällöin $\nabla f(0)$.

Tehtäväsarja II

Analyysin kurssilla on todistettu, että suljetulla välillä jatkuva ja sisäpisteissä derivoituva funktio saavuttaa ääriarvonsa joko välin päätepisteissä tai derivaatan nollakohdissa.

Vastaava tulos pätee useamman muuttujan funktiolle seuraavassa muodossa: Olkoon $K \subset \mathbb{R}^n$ suljettu ja *rajoitettu* joukko (joukko on rajoitettu, jos on olemassa $M > 0$ siten, että $|x| \leq M$ jokaisella $x \in K$). Oletetaan, että $f : K \to \mathbb{R}$ on jatkuva, ja jokaisessa sisäpisteessä differentioituva. Tällöin se saavuttaa ääriarvonsa joko gradientin nollakohdissa (eli kriittisissä pisteissä) tai reunalla ∂K.

4. Olkoon $K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \, 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$, ja
$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)(2x_2 - 1).$$
   (a) Määritä K:n reuna ∂K, ja sen sisäpisteiden joukko $K^0 = K \setminus \partial K$.
   (b) Määritä f:n kriittiset pisteet K^0:ssa, ja laske f:n arvot näissä pisteissä.
   (c) Tutki seuraavaksi funktion käytöstä reunalla ∂K. Jakamalla joukko K sopiviin osiin määritä f:n ääriarvot reunapisteissä. **Vihje:** Muista, kuinka yhden muuttujan funktion ääriarvot määrättiin!
   (d) Määritä funktion f maksimi ja minimi joukossa K, sekä pisteet joissa ne saavutetaan.

5.* Tarkastellaan jatkuvaa funktiota
$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)|x|, \ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$
Määritä f:n maksimi ja minimi suljetussa yksikkökiekossa $D = \{x \in \mathbb{R}^2; \, |x| \leq 1\}$. **Vihje**: voit parametrisoida reunan esimerkiksi vaihekulmaa θ käyttäen, $\partial D = \{(\cos(\theta), \sin(\theta)); \, \theta \in [0, 2\pi]\}$.

Tehtäväsarja III

Joissain tilanteissa on myös mahdollista määrätä funktion globaalit ääriarvot (tarkista termin merkitys kurssikirjasta, jos se ei ole selvä) rajoittamattomissa joukoissa. Seuraavissa tehtävissä tästä esimerkki. Tarkastellaan funktiota

$$f(x_1, x_2) = |x|^2 e^{-|x|^2}, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

6.* Määritä f:n kriittiset pisteet, ja tutki ovatko nämä lokaaleja ääriarvoja.

7. Määritä raja–arvo

$$\lim_{|x| \to \infty} f(x),$$

ja päättele funktion f globaali maksimi ja minimi, sekä joukot missä nämä saavutetaan. **Vihje**: Huomaa, että funktio f on *radiaalinen*, eli sen arvot riippuvat vain pisteen x etäisyydestä origosta. Tutki funktion käytöstä kuulissa $\{x \in \mathbb{R}^3; |x| \leq R\}$, ja anna säteen R kasvaa lopulta rajatta.

Tehtäväsarja IV

Lue kurssikirjasta kappale 4.1, ja laske seuraavat integraalit:

8. Olkoon $R = [0, 1] \times [0, 1]$. Laske integraali

$$\int_R x_1 e^{x_1 + x_2} \, dx.$$

9. Olkoon $\tilde{R} = [0, 1] \times [1, 2]$. Laske integraali

$$\int_{\tilde{R}} \sin(\pi x_1 x_2) \, dx.$$