Vektorianalyysi I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2016
Harjoitus 3

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 23.09.2016 klo 19.00.

Muista, että kurssisivulta löytyy linkki tämän viikon Stack-tehtäviin, joissa mm. lisää gradienttiin ja sen geometriseen merkitykseen liittyviä tehtäviä.

Tehtäväsarja I

1. Pyri selittämään omin sanoin, miksi yhden muuttujan funktiolle derivaatan olemassaolo takaa funktion jatkuvuuden, ja miksi sama pätee useamman muuttujan funktiolle, joka on differentioituva.

2. Tarkastellaan jatkuvaa funktiota
$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)|x|, \ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$
Onko f:llä osittaisderivaatat origossa? Perustele vastauksesi huolella.

3.* Onko edellisen tehtävän funktio differentioiutuva jokaisessa tason pisteessä? Perustele jälleen vastauksesi huolella. **Vihje**: Tutustu kurssikirjan lauseeseen 2.5.2.

Tehtäväsarja II

4. (Martion kirjan tehtävä 2.6:1) Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ja $f = (f_1, f_2)$. Osoita, että jos f_1 ja f_2 ovat differentioituvia pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}^2$, niin f on differentioituva pisteessä x_0.

5. Olkoon $f(x_1, x_2) = (x_1^1 + x_2^2, x_1^2 - x_2^2)$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, ja $g(y_1, y_2) = (\sin(y_1), \cos(y_2))$, $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Laske ketjusääntöä käyttäen funktioiden $f \circ g$ ja $g \circ f$ derivaattamatriisit.

Tehtäväsarja III

Olkoon f pisteen $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ympäristössä määritelty derivoituva funktio. Sanomme, että x_0 on f:n *kriittinen piste*, jos $\nabla f(x_0) = 0$.

6. Määritä seuraavien funktioiden kriittiset pisteet:

   (a) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $x \in \mathbb{R}^2$,
   (b) $g(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$, $x \in \mathbb{R}^2$,
   (c) $h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2$, $x \in \mathbb{R}^2$,
   (d) $k(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2$, $x \in \mathbb{R}^3$.

7. Kuvaile omin sanoin edellisen tehtävän funktioiden käytöstä kriittisten pisteiden ympäristössä.

8. Perehdy kurssikirjan lauseeseen 2.9.5 ja sen todistukseen. Osaatko omin sanoin kuvailla, miksi lause pätee, ja mikä on todistuksen keskeinen idea? Päteeko lauseen käänteinen suunta, eli jos x_0 on kriittinen piste, niin onko se välttämättä lokaali ääriarvokohta? Anna todistus, tai keksi vastaesimerkki.