Vektorianalyysi I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2016
Harjoitus 2

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 16.09.2016 klo 19.00.

Kurssisivulta löytyy myös linkki myös tämän viikon Stack-tehtäviin, joissa jatketaan oisttainderivoinnin opettelua. Näitä derivointitehtäviä varten kannattaa lukea kurssikirjan kappaleet 2.3 sekä 2.5.

Tehtäväsarja I

1. Olkoon x, $y \in \mathbb{R}^n$. Käyttäen sisätulon laskusääntöjä todista *suunnikassääntö*:
$$2|x|^2 + 2|y|^2 = |x+y|^2 + |x-y|^2.$$
Piirrä myös kuva, ja selitä mikä on tämän tuloksen geometrinen merkitys.

2. Olkoon x, $y \in \mathbb{R}^n$ ja $|x| = 1$ ja $|y| = 2$. Määritä vektorin $x-y$ suurin ja pienin mahdollinen pituus.

3.* Oletetaan, että jonolle (x_i), $x_i = (x_{1,i}, \ldots, x_{n,i}) \in \mathbb{R}^n$, pätee $|x_i| \leq 1$. Oletetaan, että on olemassa raja–arvo
$$x = \lim_{i\to\infty} x_i.$$
Päteekö $|x| \leq 1$? Anna tarkka todistus, tai keksi vastaesimerkki.

Tehtäväsarja II

4.* Onko funktiolla
$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{2x_1^2 + x_2^2}, \quad x = (x_1, x_2) \neq 0,$$
raja-arvoa kun $x \to 0$? Mitä tarkoitetaan, kun sanotaan että funktiolla on raja–arvo pitkin jokaista origon kautta kulkevaa suoraa? Onko funktiolla f tämä ominaisuus?

5. Onko funktiolla
$$g(x_1, x_2) = \frac{\sin(x_1^2 x_2^2)}{2x_1^2 + x_2^2}, \quad x = (x_1, x_2) \neq 0,$$
raja-arvoa kun $x \to 0$?

6.* Onko funktiolla
$$h(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 x_2}{x_1^4 + x_2^2}, \quad x = (x_1, x_2) \neq 0,$$
raja-arvoa kun $x \to 0$? **Vihje:** Tutki funktion käyttäytymistä pitkin sopivia origon kautta kulkevia käyriä.

Tehtäväsarja III

Olkoon f pisteen $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ympäristössä määritelty reaaliarvoinen funktio, jolla on osittaisderivaatat kaikkien muuttujien suhteen x_0:ssa. Hieman Martion kirjasta poiketen määrittelemme, että funktion gradientti $\nabla f(x_0)$ pisteessä x_0 on vektori
$$\nabla f(x_0) = (\partial_1 f(x_0), \ldots, \partial_n f(x_0)) \in \mathbb{R}^n.$$

7. Laske funktion $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1^2 + x_2) + (1 + e^{x_3})$ gradientti.

8. Perehdy kurssikirjan esimerkkiin 2.4.1, ja laske tarkasti perustellen siinä esitellyn funktion gradientti jokaisessa tason pisteessä. Edelleen pohdi, kuinka paljon gradientti kertoo funktion käytöksestä ilman muita oletuksia funktiosta.

9. Olkoon $f(x_1, x_2) = \sin(x_1 + x_2)$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, ja $g(t) = (e^t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$. Perehdy kurssikirjan kappaleeseen 2.5, ja erityisesti *ketjusääntöön*. Laske huolellisesti ketjusääntöä käyttäen funktion $(f \circ g)(t)$ derivaatta.

Tehtäväsarja IV

Lue kurssikirjan kappale 2.6, ja erityisesti yritä ymmärtää, mitä tarkoitetaan vektoriarvoisen funktion koordinaattifunktioilla ja derivaattamatriisilla.

10. Laske funktion $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$ derivaattamatriisi.

11.* Määritä funktion $g(x_1, x_2) = (\sin(x_1), x_1 + x_2, x_1 x_2)$ derivaattamatriisi.

12. Laske tehtävän 9 funktion $g \circ f$ derivaattamatriisi.