

Vektorianalyysi I

Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos

Syksy 2016

Harjoitus 1

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 09.09.2016 klo 19.30

Kurssisivulta löytyy myös linkki tämän viikon Stack-tehtäviin, joissa kerrataan hieman lineaarialgebraa, sekä lasketaan muutama yksinkertainen osittainderivointi. Näitä derivointitehtäviä varten kannattaa lukea kurssikirjan kappale 2.3.

Tehtäväsarja I

Tässä tehtäväsarjassa palautamme mieleen yhdenmuuttujan funktion differentiaalilaskentaa. Tukena voit käyttää kurssin *Differentiaalilaskenta* materiaalia

1. Olkoon $f(x) = \sin(x)$ ja $g(x) = (1 + x^2)^{-1}$, $x \in \mathbb{R}$. Laske $(f \circ g)'$ ja $(g \circ f)'$.
- 2.* Tässä tehtävässä kertaamme funktion ääriarvojen (eli maksimien ja minimien) etsimistä.
 - (a) Määritä funktion $f(x) = x \sin(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$, lokaalit ääriarvot, sekä mahdollinen globaali maksimi ja minimi. Kuvaajan hahmottelu auttaa!
 - (b) Muutoin sama tehtävä kuin kohdassa (a), mutta nyt määrittelemme funktion vain suljetulla välillä $[-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}]$.
3. Oletetaan, että f on derivoituva pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}$. Onko f jatkuva pisteessä x_0 ? Anna todistus tai keksi vastaesimerkki.

Tehtäväsarja II

Tässä tehtäväsarjassa palautamme mieleen yhdenmuuttujan funktion integraalilaskentaa. Tukena voit käyttää kurssin *Integraalilaskenta* materiaalia

- 4.* Laske integraalit

$$(a) \int_0^1 x^2 e^x dx, \quad (b) \int_0^1 x e^{x^2} dx, \quad (c) \int_{-\infty}^{\infty} x^7 e^{-x^2} dx.$$

5. Laske integraali

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$

Vihje: Käytä sopivaa sijoitusta.

Tehtäväsarja III

Lue kirjasta kappaleet 1.1 ja 1.2, joissa käsitellään avaruuden \mathbb{R}^n geometriaa ja konvergenssia

6. Olkoon $a = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ ja $b = (0, -2)$. Laske vektorin $a - b$ pituus.
7. Määritä edellisen tehtävän vektorien a ja b välinen kulma sekä päätelemällä kuvasta (piirrä kuva!), että käyttämällä kulman ja sisätulon välistä yhteyttä.
8. Olkoon $x_n = (1 + 1/n, e^{-n})$ ja $y_n = (1 + 1/n, e^n)$, $n \in \{1, 2, \dots\}$. Määritä jonojen (x_n) ja (y_n) raja-arvot mikäli olemassa, kun $n \rightarrow \infty$.

Tehtäväsarja IV

Lue kurssikirjan kappale 1.3, joissa käsitellään kurssilla tarvittavia topologisia käsitteitä, erityisesti avoimia ja suljettuja joukkoja.

Seuraavissa tehtävissä

$$A = \{(x_1, x_2); |x_1| + |x_2| \leq 1\}, \quad B = \{(x_1, x_2); 0 < |x_1| + |x_2| \leq 1\}, \quad C = \{(x_1, x_2); x_1 > x_2\}.$$

9. Piirrä joukkojen A , B ja C kuvat.

10.* Mitkä näistä joukoista ovat avoimia, ja mitkä suljettuja?

11. Määritä joukkojen reunat ∂A , ∂B ja ∂C .

Tehtäväsarja V

Lopuksi muutama harjoitustehtävä raja-arvoista. Tätä varten lue kurssikirjan kappale 2.2. Alla merkitsemme $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

12. Määritä raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x_1^2 - x_2^2}{2x_1^2 + x_2^2 + 1}.$$

13. Määritä raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 + x_2}.$$