Lagrangen kertomista

Palautetaan mieliin luennoilla esitetty ääriarvo–ongelma: oletetaan että $K \subset \mathbb{R}^n$ on suljettu ja rajoitettu, $f : K \to \mathbb{R}$ jatkuva ja sisäpisteissä differentioituva. Tehtävänä on etsiä f:n mahdolliset lokaalit maksimit ja minimit joukossa K. Osoitimme, että f:n saavuttaa lokaalit ääriarvonsa joko reunalla ∂K, tai K:n sisäpisteissä, jotka ovat f:n kriittisiä pisteitä.

Kriitisten pisteiden, eli gradientin ∇f nolla-kohtien löytäminen on suoraviivaista derivointia. Sen sijaan f:n mahdollisten reunalla sijaitsevien maksimien ja minimien etsiminen saattaa olla hyvinkin hankalaa. Luennoilla tutkimme tilannetta kun $n = 2$. Ratkaisimme ongelman etsimällä reunakäyrälle parametriesityksen $t \mapsto (x_1(t), x_2(t))$, ja sen avulla palautimme reunalla olevien ääriarvojen etsimisen yhden muuttujan funktion $t \mapsto f((x_1(t), x_2(t))$ ääriarvojen määräämiseen.

Sopivan parametrisoinnin löytäminen ei aina onnistu. Lisäksi korkeammissa dimensioissa reunapinnan dimensio on > 1, ja siten yhden muuttujan differentiaalilaskennnan menetelmät eivät riittä.

Esitämme nyt lyhyesti **Lagrangen kertoimina** tunnetun menetelmän, joka on usein erittäin tehokas tapa ns. **sidottujen ääriarvo–ongelmien** ratkaisuun. Täsmälliset (implisiittifunktiolauseeseen perustuvat) todistukset esitämme vasta kurssin toisessa osassa. Nyt sensijaan perustelemme geometrisesti miksi menetelmä toimii, sekä laskemme yhden esimerkin.

Oletus: Jatkossa oletamme ilman erillistä mainintaa, että kaikki tarkasteltavat funktiot ovat jatkuvasti derivoituvia määrittelyjoukoissaan.

A. Sidotut ääriarvo–ongelmat. Oletetaan, että tehtävänä on määrätä funktion f ääriarvot jonkin toisen funktion g määräämässä joukossa

$$N_g = \{x \in \mathbb{R}^n;\ g(x) = 0\}.$$

Jos esim. $g(x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2 - 1$, niin joukko N_g on $\mathbb{R}^n$:n yksikköympyrän kehä

$$x_1^2 + \ldots x_n^2 = 1.$$

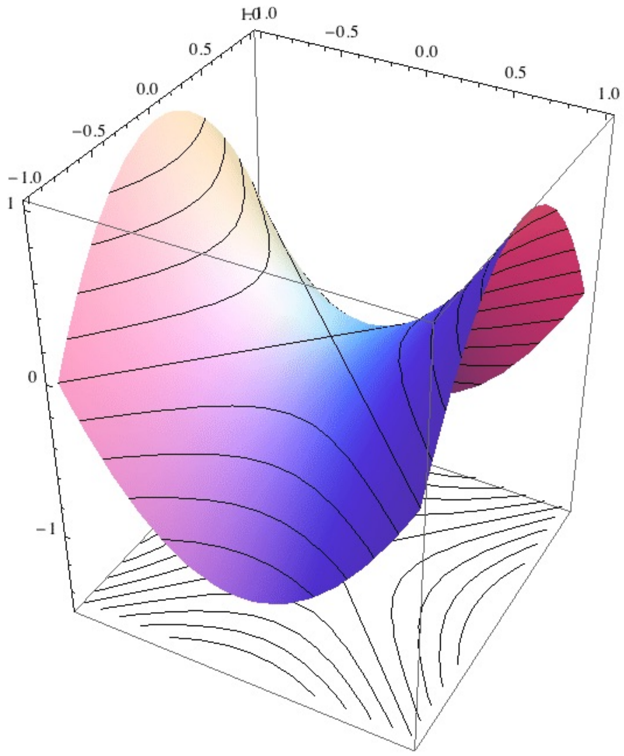
Kutsumme tälläista ongelmaa *siodotuksi ääriarvo–ongelmaksi.* Jos esim. alueen K reuna voidaan esittää joukkona $\{g(x) = 0\}$ jollain sopivalla g, niin funktion f reunalla sijaitsevien ääriarvojen määrääminen on sidottu ääriarvo–ongelma.

B. Tasa–arvopinnat. Useamman muuttujan funktion f kuvaajan hahmottelu onnistuu hyvin käyttämällä sen *tasa–arvopintoja*

$$F_c = \{x; f(x) = c\}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

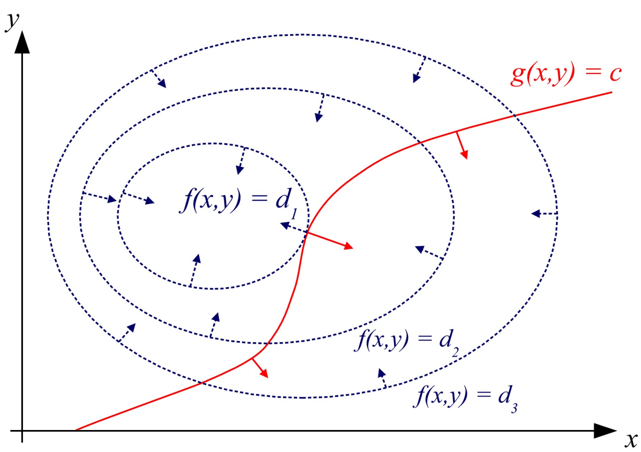
Eli F_c on kaikkien niiden pisteiden joukko, jossa f saa arvon c. Voi hyvin käydä niin, että jollain sopivalla c:n arvolla $F_c = \emptyset$, yksittäinen piste, kokonainen pinta tai jopa koko f:n määrittelyjoukko.

Funktion f kuvaajan hahmottelu tasa–arvopintojen avulla tapahtuu samaan tapaan kuin kartoissa maaston korkeus on kuvattu korkeuskäyrien avulla: korkeuskäyrähän on merenpinnasta mitatun korkeuden tasa–arvokäyrä.



Kuva: http://i.stack.imgur.com

C. Sidotut äärriarvot tasa–arvopintojen avulla. Pyritään nyt määrämään funktion f ääriarvot funktion g nolla–joukossa (joka siis on myöskin eräs tasa–arvopinta) N_g. Oletetaan kuvassa yksinkertaisuuden vuoksi, että $n = 2$, ja piirretään f:n tasa–arvokäyrät samaan kuvaan g:n nollajoukon kanssa. Allaolevassa kuvassa $c = 0$.



Kuva: https://commons.wikimedia.org

Tehtävänä on siis löytää f:n ääriarvot kuljettaessa pitkin g:n tasa–arvokäyrää. Oletetaan, että olet löytänyt tälläisen ääriarvokohdan. Tarkastelleen tässä kohdassa g tasa–arvokäyrän tangenttia. Jos tämä ei ole myös f:n tähän pisteeseen piirretyn tasa–arvokäyrän tangentti, niin kulkemalla g tasa–arvokäyrää pitkin joko eteen– tai taaksepäin, löytäisit sekä f:n suurempia että pienempiä arvoja. Mieti tämä huolella ylläolevaa kuvaa apuna käyttäen.

Olemme siis tehneet seuraavan havainnon [1]: Funktion f sidotussa ääriarvokohdassa f:n ja g:n tasa–arvopintojen täytyy sivuta toisiaan tangentiaalisesti. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että niiden sivuamispisteeseen piirretyt normaalit n_f ja n_g ovat yhdensuuntaiset

[1] Olettaen tietenkin että kaikki tarvittavat tangentit ovat olemassa; tästä lisää kurssin II–osassa

Tästä havainnosta ei ole paljon iloa, ellei ole olemassa tehokasta tapaa laskea tasa–arvopintojen normaalivektoreita. Onneksi tämä on helppoa.

D. Tasa–arvopinnan normaali. Tarkastellaan funktiota f sen tasa–arvopinnalla $S = \{x; f(x) = c\}$. Liikutaan pisteestä $x \in S$ pisteeseen $x + \Delta x \in S$ pitkin pinta S. Käyttämällä f:n differentioituvuutta saamme

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \nabla f(x) \cdot \Delta x + |\Delta x|\varepsilon(\Delta x).$$

Toisaalta, koska liikuimme pitkin tasa–arvopintaa S, niin $f(x + \Delta x) = f(x)$, ja voimme kirjoittaa yllöolevan yhtälön muotoon

$$\nabla f(x) \cdot \frac{\Delta x}{|\Delta x|} + \varepsilon(\Delta x) = 0.$$

Kun $|\Delta x| \to 0$, niin vektori $\Delta x/|\Delta x|$ lähestyy f:n tasa–arvopinnan erästä tangenttivektoria $\tau(x)$ pisteessa x, ja pätee

$$\nabla f(x) \cdot \tau(x) = 0.$$

Voimme käydä näin läpi kaikki mahdolliset tangenttisuunnat, ja päädymme siis siihen, että $\nabla f(x)$ on kohtisuorassa kaikkia tasa–arvopinnan pisteeseen x piirrettyjä tangentteja vastaan, eli funktion f **tasa–arvopinnan normaali pisteessä x on gradientin $\nabla f(x)$ suuntainen!**.

Edellä joudumme olettamaan, että $\nabla f(x) \neq 0$. Sisäpisteissä kriittiset pisteet eivät aiheuta ongelmia, mutta etsittäessä sidotun ääriarvongelman ratkaisuja, eli ääriarvoja reunalla, mahdolliset reunalla sijaitsevat kriittiset pisteet täytyy tarkastella aina erikseen.

E. Lagrangen kertoimet. Oletetaan nyt, että x_0 on funktion f lokaali ääriarvo joukossa $\{g(x) = 0\}$. Tässä pisteessä siis f:n ja g:n tasa–arvopintojen normaalit ovat samasuuntaiset, eli on olemassa $\lambda \in \mathbb{R}$ siten, että

$$n_f = \lambda n_g,$$

eli gradienttien avulla

$$\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0). \tag{1}$$

Lisäksi pätee siis sidosehto

$$g(x_0) = 0. \tag{2}$$

Yhtälöt (1) ja (2) muodostavat yhdessä (yleensä epälineearisen) yhtälösysteemin, jossa on $n+1$ yhtälöä. Tavoitteena on ratkaista x_0 ja λ, eli myös tuntemattomia on $n + 1$ kappaletta. Parametria λ kutsutaan **Lagrangen kertoimeksi**. Huomaa, että yhtälöt (1) ja (2) antavat vain välttämättömän ehdon ääriarvon olemassaololle. Ne eivät vielä takaa, että mahdollinen ratkaisupiste x_0 on ääriarvo.

F. Esimerkki Määrätään funktion $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ ääriarvot ellipisin kehällä $\{(x_1, x_2);\ x_1^2 + 2x_2^2 = 1\}$. Nyt siis

$$g(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 1.$$

Lasketaan gradientit:

$$\nabla f(x) = (x_2, x_1), \quad \nabla g(x) = 2(x_1, 2x_2).$$

Yhtälöt (1) ja (2) saavat siis muodon

$$x_2 = 2\lambda x_1, \quad x_1 = 4\lambda x_2,$$

$$x_1^2 + 2x_2^2 - 1 = 0.$$

Ylemmästä saamme

$$x_1 = 4\lambda x_2 = 4\lambda(2\lambda x_1), \quad x_2 = 2\lambda x_1 = 2\lambda(4\lambda x_1),$$

eli

$$x_1 = 8\lambda^2 x_1, \quad x_2 = 8\lambda^2 x_2.$$

Pätee siis joko $x_1 = x_2 = 0$ tai $1 - 8\lambda^2 = 0$. Toisaalta, sidosehdon nojalla $x_1^2 + 2x_2^2 - 1 = 0$, joten ei voi olla $x_1 = x_2 = 0$, ja saamme näin ratkaistua Lagrangen kertoimen λ,

$$\lambda = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Edelleen,

$$x_2 = 2\lambda x_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} x_1,$$

ja sijoittamalla tämä sidosehtoon saamme

$$1 = x_1^2 + 2(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = x_1^2 + x_1^2 = 2x_1^2,$$

eli $x_1 = \pm 1/\sqrt{2}$, ja siten $x_2 = \pm 1/2$. Mahdollsia ääriarvopisteitä ovat siis

$$(1/\sqrt{2}, 1/2), \quad (-1/\sqrt{2}, 1/2), \quad (1/\sqrt{2}, -1/2), \quad (-1/\sqrt{2}, -1/2).$$

Näissä pisteissä f saa arvot

$$f((1/\sqrt{2}, 1/2)) = f((-1/\sqrt{2}, -1/2) = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad f((-1/\sqrt{2}, 1/2)) = f((1/\sqrt{2}, -1/2)) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Maksimi $1/2\sqrt{2}$ saavutetaan siis pisteissä $(1/\sqrt{2}, 1/2)$ ja $(-1/\sqrt{2}, -1/2)$ ja minimi $-1/2\sqrt{2}$ puolestaan pisteissä $(-1/\sqrt{2}, 1/2)$ ja $(1/\sqrt{2}, -1/2)$.