on olemassa sellainen, mahdollisesti äärellinen, jono laatikoita D_i, $i = 1, 2, \ldots$, että

$$\sum_i \mathrm{vol}(D_i) \leq \varepsilon$$

ja

$$N \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i.$$

Yllä

$$\mathrm{vol}(D) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\ldots(b_n - a_n)$$

on laatikon $D = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ tilavuus. Lause 4.2.3 a) pätee myös kun $n \geq 3$.

5.1.1. Lause (Lebesgue). *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakti, ∂A nollajoukko ja $f : A \to \mathbb{R}$ jatkuva. Tällöin integraali*

$$\int_A f \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$$

on olemassa. □

5.1.2. Huomautus. "Säännöllisten" joukkojen A reunat ∂A ovat yleensä nollajoukkoja, vaikkakin on syytä olla tarkkana.

Joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ tilavuus määritellään kaavalla

$$\mathrm{vol}(A) = \int_A 1 \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n,$$

jos integraali on olemassa. Lauseen 5.1.1 perusteella joukolla A on tilavuus, jos $\overline{A}$ on kompakti ja ∂A on nollajoukko. Tällöin pätee $\mathrm{vol}(\overline{A}) = \mathrm{vol}(A)$. Epäoleelliset integraalit käsitellään samoin kuin tapauksessa $n = 2$.

5.2. INTEGRAALIN KÄYTÄNNÖN LASKEMINEN

Integraalien laskemiseksi ovat käytettävissä samat menetelmät kuin tapauksessa $n = 2$. Käsittelemme näitä esimerkkien avulla.

5.2.1. Esimerkki. Lasketaan integraali

$$I = \int_A x_3 \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_3$$

iteroituna integraalina, missä A on joukko, jonka määräävät epäyhtälöt

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq x_3^2, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1, \\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Näistä ensimmäinen epäyhtälö rajaa kartion, toinen edustaa suljettua yksikköpalloa ja kolmas ylempää puoliavaruutta.

Funktio $f(x_1, x_2, x_3) = x_3$ on jatkuva, joukko A on kompakti ja ∂A on nollajoukko, mitä ei ole aivan helppo nähdä. Näin ollen integraali on lauseen 5.1.1 nojalla olemassa, joten saamme

$$\begin{aligned} I &= \iint_{B(0,\frac{1}{\sqrt{2}})} \left(\int_{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}^{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} x_3 \, \mathrm{d}x_3 \right) \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \\ &= \frac{1}{2} \iint_{B(0,\frac{1}{\sqrt{2}})} (1 - 2x_1^2 - 2x_2^2) \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2. \end{aligned}$$

Ympyrä $\partial B(0,1/\sqrt{2}) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1/2\}$ edustaa yksikköpallon pinnan ja kartion leikkauksen projektiota x_1x_2-tasolle. Kiinteällä $(x_1,x_2) \in B(0,1/\sqrt{2})$ muuttuja x_3 on kartiopinnan ja pallopinnan välissä. Tämä antaa integroimisrajat. Napakoordinaattimuunnoksella viimeinen integraali tulee muotoon

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(1-2r^2)r\,dr\,d\varphi \\ &= \pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(1-2r^2)r\,dr = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

5.2.2. Esimerkki. Integraaleja voidaan käsitellä muuttujanvaihdolla kuten tapauksessa $n = 2$. Olkoot $D, D' \subset \mathbb{R}^n$ avoimia, $\overline{D}$ ja $\overline{D'}$ kompakteja, ∂D, $\partial D'$ nollajoukkoja sekä w bijektiivinen C^1-kuvaus, $w : D \to D'$. Jos $f : \overline{D'} \to \mathbb{R}$ on jatkuva, niin

$$\int_{D'} f\,dx_1 \ldots dx_n = \int_D f(w)|\tau(w)|\,dx_1 \ldots dx_n,$$

missä $\tau(w)$ on kuvauksen w jacobiaani eli Jacobin determinantti

$$\tau(w) = \det w' = \begin{vmatrix} \partial_1 w_1 & \cdots & \partial_n w_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 w_n & \cdots & \partial_n w_n \end{vmatrix},$$

ja $w_1, \ldots, w_n$ ovat w:n koordinaattifunktiot.

Tarkastellaan esimerkkinä kuvauksesta w avaruuden $\mathbb{R}^3$ niin sanottua pallokoordinaatistoa

$$\begin{cases} x_1 = r\sin\theta\cos\varphi, \\ x_2 = r\sin\theta\sin\varphi, \\ x_3 = r\cos\theta. \end{cases}$$

Tämän geometrinen tulkinta on seuraava: $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ edustaa vektorin $x = (x_1,x_2,x_3)$ pituutta ja $\theta \in [0,\pi]$ on kulma x:n ja positiivisen x_3-akselin välillä. Kulma $\varphi \in [0,2\pi)$ edustaa vektorin $(x_1,x_2,0)$ ja positiivisen x_1-akselin välistä kulmaa x_1x_2-tasossa.

Olkoon

$$w : [0,\infty) \times [0,2\pi) \times [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$$

edellisen kaavan määrittelemä kuvaus, eli $w(r,\varphi,\theta) = (x_1,x_2,x_3)$. Tämä ei ole bijektio, mutta w:n rajoittuma

$$w : (0,\infty) \times [0,2\pi) \times (0,\pi) \to \mathbb{R}^3 \setminus \{x_3\text{-akseli}\}$$

on. Joukko $(0,\infty) \times [0,2\pi) \times (0,\pi)$ ei ole suljettu eikä avoin, mutta sen reuna ja reunan kuva ovat nollajoukkoja. Suoraviivainen derivointi antaa kuvauksen w Jacobin determinantiksi

$$\begin{aligned} \tau(w)(r,\varphi,\theta) &= \det\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{bmatrix} \\ &= r^2\sin\theta. \end{aligned}$$

Jätämme tämän determinantin kehittämisen harjoitustehtäväksi.

5.2.3. Huomautus. Vastaava muunnos esiintyy myös $\mathbb{R}^n$:ssä. Kun $n = 2$, tämä muunnos on napakoordinaattiesitys, jonka Jacobin determinantti on r.

Lasketaan edellistä muunnosta w käyttäen pallon $\overline{B}(0,R)$ tilavuus. Määritelmän mukaan

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(\overline{B}(0,R)) &= \int_{\overline{B}(0,R)} 1 \,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 \\ &= \int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} 1\cdot r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \\ &= 2\pi\left(\Big/_{\!0}^{\pi} -\cos\theta\right)\left(\Big/_{\!0}^{R}\frac{r^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3.\end{aligned}$$

5.2.4. Esimerkki. Lasketaan toisena esimerkkinä muuttujanvaihdosta integraali

$$I = \int_{B(0,R)} \frac{1}{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3.$$

Joukko $\partial B(0,R)$ on nollajoukko, joten integraali voidaan yhtä hyvin laskea joukon $\overline{B}(0,R)$ yli. Funktio

$$f(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{1+|x|^2}$$

on jatkuva $\mathbb{R}^3$:ssa, joten

$$\begin{aligned} I &= \int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \underbrace{f(w(r,\varphi,\theta))}_{=\frac{1}{1+r^2}}\underbrace{|\tau(w)(r,\varphi,\theta)|}_{=r^2\sin\theta}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \\ &= 2\pi\int_0^R \frac{r^2}{1+r^2}\left(\int_0^\pi \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}r \\ &= 4\pi\int_0^R \underbrace{\frac{r^2}{1+r^2}}_{=1-\frac{1}{1+r^2}}\,\mathrm{d}r = 4\pi(R-\arctan R).\end{aligned}$$

5.2.5. Esimerkki. Kuten tapauksessa $n=2$ voidaan integraali laskea myös tasa-arvopintojen avulla. Kaava saa $\mathbb{R}^n$:ssä muodon

$$\int_A h(f(x_1,\ldots,x_n))\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n = \int_a^b h(t)V'(t)\,\mathrm{d}t,$$

missä $V(t) = \operatorname{vol}\{(x_1,\ldots,x_n)\in A : f(x_1,\ldots,x_n)\le t\}$.

Lasketaan edellinen esimerkki tällä tekniikalla. Nyt $h(t) = 1/(1+t)$ ja $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2+x_2^2+x_3^2$. Funktio $h\circ f$ on tällöin

$$(h\circ f)(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2}.$$

Jos $f\le t$, niin $x_1^2+x_2^2+x_3^2 \le (\sqrt{t})^2$, ja kun $0\le t\le R^2$, niin

$$V(t) = \frac{4\pi}{3}t^{3/2},$$

sillä r-säteisen pallon tilavuus on $4\pi r^3/3$. Derivoimalla saadaan $V'(t) = 2\pi\, t^{1/2}$ ja siten

$$I = \int_0^{R^2}\frac{1}{1+t}V'(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi\int_0^{R^2}\frac{t^{1/2}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

Sijoituksella $t=u^2$ integraali muuttuu muotoon

$$\begin{aligned} I &= 4\pi\int_0^R\frac{u^2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = 4\pi\int_0^R\left(1-\frac{1}{1+u^2}\right)\mathrm{d}u \\ &= 4\pi(R-\arctan R).\end{aligned}$$

5.2.6. Esimerkki. Epäoleellisten integraalien tulkinta on myös samanlaista kuin tasossa. Määrätään epäoleellinen integraali

$$I = \int_{B(0,1)}\frac{1}{|x|^\alpha}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3,$$

missä $\alpha>0$ ja $B(0,1)$ on R^3:n yksikköpallo. Nyt funktio

$$f(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}$$

ei ole määritelty pallossa $B(0,1)$ eikä rajoitettu joukossa $B(0,1)\setminus\{0\}$. Yksi piste, tässä tapauksessa origo 0, on kolmiulotteinen nollajoukko, joten

$$I = \int_{B(0,1)\setminus\{0\}} f\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3,$$

jos epäoleellinen integraali

$$\int_{B(0,1)\setminus\{0\}} f \,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3$$

on olemassa. Havaitaan, että $f \geq 0$. Epäoleellinen integraali I tulkitaan raja-arvona

$$I = \lim_{r\to 0+} \int_{B(0,1)\setminus B(0,r)} \frac{1}{|x|^\alpha} \,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 = \lim_{r\to 0+} I_r.$$

Kun $0 < r < 1$, niin integraali I_r on tavallinen jatkuvan funktion Riemann-integraali ja se kannattaa laskea pallokoordinaatistossa:

$$\begin{aligned} I_r &= \int_r^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{r^\alpha} r^2 \sin\theta \;\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\ &= 4\pi \int_r^1 r^{2-\alpha}\,\mathrm{d}r. \end{aligned}$$

Olkoon $\alpha \neq 3$. Tällöin, kun $r \to 0$,

$$\frac{4\pi}{3-\alpha} \Big/_{r}^{1} r^{3-\alpha} = \frac{4\pi}{3-\alpha}(1 - r^{3-\alpha}) \to \begin{cases} \dfrac{4\pi}{3-\alpha}, \text{ kun } \alpha < 3, \\ \infty, \text{ kun } \alpha > 3. \end{cases}$$

Jos $\alpha = 3$, niin

$$I_r = 4\pi \int_r^1 r^{-1}\,\mathrm{d}r = 4\pi \Big/_{r}^{1} \log r = -4\pi \log r \to \infty,$$

kun $r \to 0$. Siis integraali I suppenee vain, kun $\alpha < 3$.

HARJOITUSTEHTÄVIÄ

5.2:1 Olkoon $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq r^2, 0 \leq x_3 \leq h\}$ sylinteri. Määritä integraali

$$\iiint_A x_3(x_1^2 + x_2^2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3.$$

5.2:2 Määritä ellipsoidin $x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 + x_3^2/c^2 \leq 1$ tilavuus. Käytä hyväksesi muunnosta $w(x_1, x_2, x_3) = (ax_1, bx_2, cx_3)$.