1. Euklidinen avaruus $\mathbb{R}^n$

1.1. $\mathbb{R}^n$:n struktuuri

Euklidinen avaruus $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, \ldots$, määritellään joukkona

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n\},$$

missä $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ on luvun n pituinen reaalilukujono. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ pisteille eli vektoreille käytetään merkintää

$$x = \overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

ja x_i:tä kutsutaan x:n i. *koordinaatiksi*. Emme yleensä käytä vektorin päällä viivaa. Kaksi $\mathbb{R}^n$:n vektoria, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ja $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, ovat samat silloin ja vain silloin kun $x_i = y_i$ jokaisella $i = 1, \ldots, n$. Havaitaan, että $\mathbb{R}^1$ on samaistettavissa $\mathbb{R}$:n kanssa.

Avaruus $\mathbb{R}^n$ on *reaalinen vektori-* eli *lineaariavaruus*, kun määritellään vektoreiden x ja y summa

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

ja reaaliluvulla λ kertominen

$$\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n);$$

nolla-alkio $\mathbb{R}^n$:ssä on nollavektori, merkitään $0 = \overline{0} = (0, \ldots, 0)$. Käytämme $\mathbb{R}^n$:ssä lineaarialgebran tietoja.

Vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ *standardiyksikkövektorit* ovat

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, \ldots, 0), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0), \\ &\ \vdots \\ e_n &= (0, \ldots, 0, 1). \end{aligned}$$

Jokainen vektori $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ voidaan yksikäsitteisellä tavalla esittää muodossa

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n.$$

Vektoreiden kertolasku ei yleensä ole määritelty, paitsi kun $n = 1$, jolloin se on tavallinen reaalilukujen kertolasku. Avaruudessa $\mathbb{R}^2$ eli tasossa voidaan käyttää vektoreiden kertolaskuna kompleksista kertolaskua. Tätä emme kuitenkaan käytä tällä kurssilla. Myöhemmin käytämme $\mathbb{R}^3$:ssa vektoreiden $x, y \in \mathbb{R}^3$ ristituloa $x \times y$ muutamassa yhteydessä.

Avaruudessa $\mathbb{R}^n$ määriteltyä *pistetuloa* $x \cdot y$ ei pidä sekoittaa kertolaskuun. Pistetulo liittää vektoripariin $x, y \in \mathbb{R}^n$ reaaliluvun $x \cdot y$ kaavalla

$$x \cdot y = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n.$$

Pistetulo toteuttaa yhtälöt

$$x \cdot y = y \cdot x,$$
$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Vektorin $x \in \mathbb{R}^n$ *pituus* määritellään kaavalla

$$|x| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \geq 0$$

ja kahden vektorin x ja y välinen *etäisyys* kaavalla

$$d(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Havaitaan, että $|x| = 0$ täsmälleen silloin kun $x = 0$ eli kun x on nollavektori.

Vektoreiden x ja y *välinen kulma* $\theta \in [0, \pi]$ on kulma, joka toteuttaa yhtälön

(1.1.1) $$\cos\theta = \begin{cases} \dfrac{x \cdot y}{|x||y|} & \text{, kun } |x| \neq 0 \neq |y|, \\ 1 & \text{, kun } |x| = 0 \text{ tai } |y| = 0. \end{cases}$$

1.1.2. Huomautus. Kulman θ olemassaolon ehtona on

$$\frac{x \cdot y}{|x||y|} \in [-1, 1].$$

Palaamme tähän myöhemmin.

Seuraavassa tarkastelemme joitakin pistetulon, pituuden ja etäisyyden ominaisuuksia.

A) Cauchy-Schwartzin epäyhtälö:

(1.1.3) $$|x \cdot y| \leq |x||y|$$

eli

$$|x_1y_1 + \ldots + x_ny_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}.$$

Todistus. Voidaan olettaa, että $x \neq 0 \neq y$, koska muuten kaava (1.1.3) on selvä. Olkoon $t \in \mathbb{R}$. Tällöin pätee

$$\begin{aligned} 0 \leq |tx + y|^2 &= (tx + y) \cdot (tx + y) \\ &= t^2x \cdot x + tx \cdot y + ty \cdot x + y \cdot y \\ &= t^2|x|^2 + 2tx \cdot y + |y|^2 \end{aligned}$$

Nyt $t \mapsto t^2|x|^2 + 2tx \cdot y + |y|^2 \geq 0$ on toisen asteen polynomi, jonka graafi on t-akselin yläpuolella ja jolla voi olla enintään yksi nollakohta. Näin ollen sen diskriminantti $D = b^2 - 4ac$ toteuttaa epäyhtälön $D \leq 0$ eli

$$D = b^2 - 4ac = 4(x \cdot y)^2 - 4|x|^2|y|^2 \leq 0.$$

Tästä seuraa

$$(x \cdot y)^2 \leq |x|^2 |y|^2,$$

mikä puolestaan on yhtäpitävää epäyhtälön

$$|x \cdot y| \leq |x||y|$$

kanssa. □

1.1.4. Huomautus. Edellä käytimme tietoa

$$\alpha^2 \leq \beta^2 \gamma^2 \quad \Leftrightarrow \quad |\alpha|^2 \leq |\beta|^2 |\gamma|^2 \quad \Leftrightarrow \quad |\alpha| \leq |\beta||\gamma|.$$

Cauchy-Schwartzin epäyhtälöstä seuraa, että kaavan (1.1.1) kulma θ on hyvin määritelty.

B) Etäisyydellä on seuraavat ominaisuudet:

(i) $|x| \geq 0$ ja $|x| = 0$ täsmälleen silloin kun $x = 0$,
(ii) $|\lambda x| = |\lambda||x|$ jokaisella $\lambda \in \mathbb{R}$,
(iii) kolmioepäyhtälö

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Todistus. Kohdat (i) ja (ii) ovat selviä, kohdan (iii) jätämme harjoitustehtäväksi. □

C) Kohdalla B) (iii) on yleistykset

(I) $|x + y + \ldots + w| \leq |x| + |y| + \ldots + |w|$,
(II) kolmioepäyhtälön vasen puoli

$$|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x + y|.$$

Todistus. Kohta (I) on selvä. Kohdan (II) ensimmäinen epäyhtälö on myös selvä, koska jokaisella reaaliluvulla α pätee $\alpha \leq |\alpha|$. Epäyhtälöstä

$$|x| = |(x + y) - y| \leq |x + y| + |y|$$

seuraa $|x| - |y| \leq |x + y|$ ja epäyhtälöstä

$$|y| = |(y + x) - x| \leq |x + y| + |x|$$

seuraa $|y| - |x| \leq |x + y|$. Yhdistämällä nämä saadaan

$$||x| - |y|| \leq |x + y|,$$

mikä päättää todistuksen. □

D) Havaitaan, että jokaisella $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ pätee

$$|x_i| \leq |x| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|.$$

Todistus. Selvästi $|x_i| \leq \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = |x|$. Oikean puolen todistamiseksi esitetään x muodossa

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n,$$

jolloin kohdan C) (I) ja tiedon $|e_i| = 1$, $i = 1, \ldots, n$, nojalla

$$\begin{aligned} |x| &= |x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n| \leq |x_1 e_1| + \ldots + |x_n e_n| \\ &= |x_1||e_1| + \ldots + |x_n||e_n| = |x_1| + \ldots + |x_n|. \end{aligned}$$

□

HARJOITUSTEHTÄVIÄ

1.1:1 Olkoon $x, y \in \mathbb{R}^n$ ja $|x| = |y| = 1$. Mikä on vektorin $x - y$ suurin mahdollinen pituus?

1.1:2 Todista kolmioepäyhtälö $|x+y| \leq |x|+|y|$ avaruudessa $\mathbb{R}^n$. *Vihje*: Käytä hyväksi tietoa $|x+y|^2 = (x+y)\cdot(x+y)$ ja Cauchy-Schwartz -epäyhtälöä $|x \cdot y| \leq |x||y|$.

1.2. KONVERGENSSI $\mathbb{R}^n$:SSÄ

Olkoon $x_1, x_2, \ldots$ jono $\mathbb{R}^n$:n pisteitä (huomaa, että x_i ei ole pisteen x koordinaatti) eli

$$x_i = (x_{i,1}, \ldots, x_{i,n}),\ i = 1, 2, \ldots.$$

Merkitsemme vektorijonoa $x_1, x_2, \ldots$ kuten reaalilukujonoakin (x_i):llä.

1.2.1. Esimerkki. Määrittelemällä $x_i = (1/i, 1/(i+1)) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2, \ldots$, saadaan jono (x_i) tason $\mathbb{R}^2$ pisteitä.

Olkoon $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Jono (x_i) *konvergoi eli suppenee kohti pistettä* x_0, jos

$$|x_i - x_0| \to 0, \tag{1.2.2}$$

kun $i \to \infty$. Tällöin sanomme, että x_0 on jonon (x_i) *raja-arvo*. Huomaa, että kaavassa (1.2.2) esiintyy tavallinen reaalilukujen raja-arvo. Toisin sanoen pisteiden x_i etäisyys pisteestä x_0 lähestyy nollaa, kun $i \to \infty$. Merkitään lyhyesti $x_i \to x_0$, $i \to \infty$, tai vain $x_i \to x_0$.

1.2.3. Huomautus. Vektorijonon suppenemisen määritelmä on oleellisesti sama kuin reaalilukujonon, sillä reaalilukujonolle (x_i) seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:

(i) $x_i \to x_0$,
(ii) $|x_i - x_0| \to 0$.

1.2.4. Lause. *Pätee: $x_i \to x$, $i \to \infty$ jos ja vain jos $x_{i,j} \to x_j$ jokaisella $j = 1, \ldots, n$. Toisin sanoen jono (x_i) konvergoi kohti pistettä x jos ja vain jos jokainen pisteiden x_i koordinaattien muodostama jono $(x_{i,j})$, $j = 1, \ldots, n$, konvergoi kohti pisteen x vastaavaa koordinaattia x_j.*

Todistus. $\boxed{\Rightarrow}$ Kiinnitetään $j = 1, \ldots, n$. On osoitettava, että $x_{i,j} \to x_j$. Ominaisuuden D) nojalla

$$|x_{i,j} - x_j| \leq |x_i - x| \to 0,$$

mistä väite seuraa.

$\boxed{\Leftarrow}$. Tunnetusti lukujonoille pätee, että ehdoista $x_n \to 0$, $y_n \to 0$, ..., $z_n \to 0$ seuraa $x_n + y_n + \ldots + z_n \to 0$. Oletetaan, että $x_{i,j} \to x_j$ jokaisella j, jolloin $|x_{i,j} - x_j| \to 0$, kun $i \to \infty$. Koska tämä pätee kaikilla $j = 1, \ldots, n$, niin

$$|x_{i,1} - x_1| + |x_{i,2} - x_2| + \ldots + |x_{i,n} - x_n| \to 0,$$

kun $i \to \infty$. Näin ollen ominaisuuden D) nojalla

$$|x_i - x| \leq |x_{i,1} - x_1| + \ldots + |x_{i,n} - x_n| \to 0,$$

kun $i \to \infty$, mistä väite seuraa. □

Lauseen 1.2.4 nojalla $\mathbb{R}^n$:n pistejonon (x_i) konvergenssi palautuu reaalilukujen konvergenssin käsitteeseen. Esimerkin 1.2.1 jonolle $x_i = (1/i, 1/(i+1))$, $i = 1, 2, \ldots$ pätee, että $x_i \to 0 = (0, 0)$, kun $i \to \infty$, sillä $1/i \to 0$ ja $1/(i+1) \to 0$. Havaitaan, että jonon (x_i) raja-arvo on yksikäsitteinen (johtuen lauseesta 1.2.4 ja raja-arvon yksikäsitteisyydestä $\mathbb{R}$:ssä).

Pistejono (x_i), $x_i \in \mathbb{R}$, *hajaantuu eli divergoi*, jos se ei suppene. Pistejono hajaantuu siis täsmälleen silloin, kuin ainakin yksi reaalilukujonoista

$$(x_{i,j}),\ j = 1, \dots, n,$$

hajaantuu.

Konvergenssin käsite syvenee topologian kurssilla

HARJOITUSTEHTÄVIÄ

1.2:1 Osoita määritelmän nojalla, että jonolle $x_i = (1/i, 1/i)$ pätee $x_i \to (0,0)$, kun $i \to \infty$.

1.2:2 Suppeneeko vai hajaantuuko jono $x_i = (1/i, (i^2+1)/i)$?

1.3. $\mathbb{R}^n$:N JOUKOT

Eräs avaruuden $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, perusvaikeuksista on, ettei siellä ole samanlaista "luonnollista" järjestystä kuin reaaliakselilla. Tästä seuraa, ettei $\mathbb{R}^n$:ssä ole yhtä luonnollista joukkoa kuin $\mathbb{R}$:n väli.

Etäisyyden avulla on mahdollista määritellä joitakin $\mathbb{R}^n$:n perusjoukkoja. Jos $x \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$, niin joukkoa

$$B(x,r) = B^n(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}$$

kutsutaan $\mathbb{R}^n$:n x-keskiseksi, r-säteiseksi *avoimeksi palloksi* tai kuulaksi. Nimitystä kiekko käytetään, kun $n = 2$. Joukkoa $B(0,1)$ kutsutaan avoimeksi yksikköpalloksi. Kun $n = 1$, niin määritelmän nojalla $B(x,r)$ on avoin väli $(x - r, x + r)$ ja $B(0,1)$ avoin väli $(-1,1)$. Kun $n = 2$, niin $B(0,1) = \{y \in \mathbb{R}^2 : y_1^2 + y_2^2 < 1\}$.

Pallon $B(x,r)$ reunaa

$$\begin{aligned}\partial B(x,r) = S(x,r) = S^{n-1}(x,r) &= \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| = r\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n : (y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2 = r^2\}\end{aligned}$$

kutsutaan ($n-1$ -ulotteiseksi) x-keskiseksi, r-säteiseksi palloksi $\mathbb{R}^n$:ssa. Selvyyden vuoksi käytämme joukosta $S(x,r)$ usein nimitystä *pallokuori*. Kun $n = 2$, niin $S(x,r)$ on x-keskinen, r-säteinen ympyrä.

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ joukkojen tehokas käyttö vaatii joitakin topologian peruskäsitteitä. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ mielivaltainen joukko. Joukko A on *suljettu*, jos jokaisella suppenevalla jonolla (x_i), missä $x_i \in A$ ja $x_i \to x_0$, pätee $x_0 \in A$. Sanomme, että A *sisältää kaikki rajapisteensä.*

1.3.1. Esimerkki. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ suljettu pallo, joka määritellään joukkona

$$\overline{B}(x,r) = \overline{B}^n(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| \leq r\},$$

on $\mathbb{R}^n$:n suljettu osajoukko. Tämän todentamiseksi olkoon (x_i) jono, missä $x_i \in \overline{B}(x,r)$ ja $x_i \to x_0$. On näytettävä $x_0 \in \overline{B}(x,r)$. Koska $x_i \in \overline{B}(x,r)$, niin pätee $|x_i - x| \leq r$ ja siis $|x_i - x|^2 \leq r^2$. Tämä merkitsee sitä, että $\alpha_i = (x_{i,1} - x_1)^2 + \dots + (x_{i,n} - x_n)^2 \leq r^2$. Koska $x_{i,j} \to x_{0,j}$ kun $i \to \infty$ jokaisella $j = 1, 2, \dots, n$, niin lukujonolla (α_i) on raja-arvo $\alpha_0 = (x_{0,1} - x_1)^2 + \dots + (x_{0,n} - x_n)^2$ ja $\alpha_0 \leq r^2$. Tämä merkitsee, että $|x_0 - x|^2 \leq r^2$ ja siis $|x_0 - x| \leq r$.

1.3.2. Huomautus. Edellä käytettiin epäyhtälön säilymisen periaatetta eli jos $\alpha_i \to \alpha_0$ ja $\alpha_i \leq r^2$, niin $\alpha_0 \leq r^2$

Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ määritellään *avoimeksi*, jos $\mathbb{R}^n \setminus A$ on suljettu.

1.3.3. Lause. *Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on avoin täsmälleen silloin, kuin jokaisella $x \in A$ on olemassa sellainen $r > 0$, että $B(x,r) \subset A$.*

Todistus. $\boxed{\Leftarrow}$ On näytettävä, että ehdosta seuraa, että $\mathbb{R}^n\backslash A$ on suljettu. Olkoon (x_i) jono pisteitä $x_i \in \mathbb{R}^n\backslash A$ ja $x_i \to x_0$. On osoitettava, että $x_0 \in \mathbb{R}^n\backslash A$. Tällöin on kaksi mahdollisuutta: $x_0 \in \mathbb{R}^n\backslash A$, jolloin väite on todistettu, tai $x_0 \in A$, mikä on näytettävä mahdottomaksi.

Jos $x_0 \in A$, niin olettamuksen nojalla on olemassa $r > 0$ siten, että $B(x_0, r) \subset A$. Toisaalta $x_i \in \mathbb{R}^n\backslash A$ ja siis $x_i \notin B(x_0, r)$, mistä seuraa, että $|x_i - x_0| \geq r$. Nyt $x_i \not\to x_0$, sillä $x_i \to x_0$ tarkoittaa, että $|x_i - x_0| \to 0$. Saatiin haluttu ristiriita.

$\boxed{\Rightarrow}$ harjoitustehtävä. □

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ joukko. Joukon A *reuna* ∂A on joukko

$$\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall r > 0\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset \text{ ja } B(x,r) \cap (\mathbb{R}^n\backslash A) \neq \emptyset\}.$$

Joukon A reuna on siis niiden pisteiden x joukko, joiden jokainen palloympäristö kohtaa sekä A:n että A:n komplementin. Jos A on avoin, niin ∂A:n pisteet eivät milloinkaan ole A:n pisteitä. Tämä seuraa lauseesta 1.3.3. Toisaalta jos A on suljettu, niin $\partial A \subset A$. Jätämme tämän todistamisen harjoitustehtäväksi.

1.3.4. Esimerkki. Olkoon A *yksiö*, eli $A = \{x_0\}$. Tällöin $A = \partial A = \{x_0\}$. Piste x_0 kuuluu ∂A:han, sillä jokaisella $r > 0$ pallo $B(x_0, r)$ sisältää A:n pisteitä (pisteen x_0), ja selvästi myös $\mathbb{R}^n\backslash A$:n pisteitä.

Jos $x \neq x_0$, niin $x \notin \partial A$, sillä jos $r = |x - x_0| > 0$, niin pallo $B(x, r)$ ei sisällä x_0:aa eikä siis A:n pisteitä. Siten x_0 on ∂A:n ainoa piste ja siis $\partial A = \{x_0\}$.

1.3.5. Lause. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Tällöin*

(i) *∂A on suljettu ja*
(ii) *$A \cup \partial A$ on suljettu.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Joukkoa $A \cup \partial A$ sanotaan A:n *sulkeumaksi* ja merkitään $\overline{A}$. Lauseen 1.3.5 nojalla se on suljettu joukko. Itse asiassa se on pienin suljettu joukko, joka sisältää A:n.

1.3.6. Esimerkki. Olkoon $B(x_0, r)$ avoin pallo $\mathbb{R}^n$:ssä. Havaitaan, että $\partial B(x_0, r) = S(x_0, r) = \{y : |y - x_0| = r\}$. Nyt sulkeuman määritelmän nojalla

$$\overline{B(x_0, r)} = B(x_0, r) \cup S(x_0, r) = \{y : |y - x_0| \leq r\}.$$

Näin ollen $\overline{B}(x_0, r) = \overline{B(x_0, r)}$ todella on "suljettu pallo".

1.3.7. Huomautus. Tapauksessa $n = 1$

$$B(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r),$$
$$S(x_0, r) = \{x_0 - r, x_0 + r\},$$
$$\overline{B}(x_0, r) = [x_0 - r, x_0 + r].$$

Topologian tärkeimpiä käsitteitä on kompaktius. Euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$ tämä voidaan määritellä seuraavasti. Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on *kompakti*, jos jokaisella jonolla (x_i), $x_i \in A$, on sellainen osajono (x_{i_j}), että $x_{i_j} \to x_0$ ja $x_0 \in A$. Toisin sanoen jokaisesta jonosta A:n pisteitä voidaan valita osajono, joka suppenee kohti A:n pistettä.

1.3.8. Huomautus. Tapauksessa $n = 1$ pätee: Jos $x_i \in [a, b]$, $i = 1, 2, \ldots$, niin on olemassa osajono $x_{i_j} \to x_0$ ja $x_0 \in [a, b]$. Osajono (x_{i_j}) löydetään esimerkiksi välin $[a, b]$ "puolitusmenetelmällä". Siis suljettu väli $[a, b]$ on reaaliakselin $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ kompakti osajoukko.

Sanomme joukkoa $A \subset \mathbb{R}^n$ *rajoitetuksi*, jos $A \subset B(0, r)$ jollakin $r > 0$.

1.3.9. Lause. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Tällöin A on kompakti täsmälleen silloin, kun A on suljettu ja rajoitettu.*

Todistus. $\boxed{\Leftarrow}$ Olkoon (x_i) jono A:n pisteitä. On ensiksi näytettävä, että tällä jonolla on suppeneva osajono. Jokainen reaalilukujono $(x_{i,j})$, $j = 1, 2, \ldots, n$, on rajoitettu ($|x_{i,j}| \leq |x_i| < r$), joten sille voidaan niin sanotulla välin puolitusmenetelmällä valita suppeneva osajono. Valitaan reaalilukujonosta $(x_{i,1})$ suppeneva osajono $(x_{i_j,1})$, sitten jonosta $(x_{i_j,2})$ suppeneva osajono ja jatketaan näin ottamalla lopulta jonosta $(x_{i,n})$ suppeneva osajono $(x_{k_i,n})$. Nyt kaikki jonot $(x_{k_i,j})$, $j = 1, 2, \ldots, n$, suppenevat, koska suppenevan jonon jokainen osajono suppenee. Toisin sanoen löytyy sellaiset luvut $x_j \in \mathbb{R}$, että

$$x_{k_i,j} \to x_j,\ i \to \infty,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Asetetaan $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Tällöin $x_{k_i} \to x$ kun $i \to \infty$, sillä $x_i \to x$ tarkoittaa, että pisteen x_i jokainen koordinaatti konvergoi kohti x:n vastaavaa koordinaattia, vertaa lause 1.2.4.

On näytetty, että jonolla (x_i) on osajono (x_{k_i}) joka suppenee kohti x:ää. On vielä näytettävä, että $x \in A$. Olettamuksen nojalla A on suljettu, joten jonon (x_{k_i}) raja-arvo x kuuluu A:han.

$\boxed{\Rightarrow}$ Harjoitustehtävä. □

1.3.10. Esimerkki. Suljettu pallo $\overline{B}(x_0, r)$ on kompakti, sillä se on suljettu ja selvästi rajoitettu.

Avoimet, suljetut ja kompaktit joukot selvitetään tarkemmin topologian kurssilla.

HARJOITUSTEHTÄVIÄ

1.3:1 Todista lause 1.3.5: Joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ reuna ∂A sekä sen sulkeuma $\overline{A} = A \cup \partial A$ ovat suljettuja.

1.3:2 Todista lauseen 1.3.3. toinen puoli: Olkoon joukko A avoin. Tällöin jokaisella $x \in A$ on olemassa sellainen $r > 0$, että $B(x, r) \subset A$.

1.3:3 Olkoon

$$\mathbb{Q}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$$

avaruuden $\mathbb{R}^2$ rationaalipisteiden joukko ja a joukon $\mathbb{Q}^2$ piste. Tällöin avoin pallo $B(a, r)$ sisältää jokaisella $r > 0$ sekä joukon $\mathbb{Q}^2$ että sen komplementin pisteitä, joten joukko $\mathbb{Q}^2$ ei ole avoin. Koska $\mathbb{Q}^2$ ei ole avoin, se on suljettu. Mikä virhe tässä päättelyssä tehdään ja mitä todella voit päätellä joukosta $\mathbb{Q}^2$?

1.3:4 Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ diskreetti joukko, toisin sanoen joukko, jonka pisteet ovat erillisiä eli jokaisella $x \in A$ on olemassa sellainen $r > 0$, että pallo $B(x, r)$ sisältää joukon A pisteistä ainoastaan pisteen x. Tutki, onko joukko A avoin tai suljettu.

1.3:5 Todista lauseen 1.3.9 toinen puoli: Jos $A \subset \mathbb{R}^n$ on kompakti, niin se on suljettu ja rajoitettu.

1.3:6 Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ suljettu. Osoita, että $\partial A \subset A$.

2. Reaaliarvoiset funktiot $\mathbb{R}^n$:ssä

2.1. Funktiot $\mathbb{R}^n$:ssä

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ joukko ja $u : A \to \mathbb{R}$ *reaaliarvoinen funktio* eli *kuvaus* joukossa A, toisin sanoen jokaiseen $x \in A$ on liitetty yksikäsitteinen reaaliluku $u(x) \in \mathbb{R}$. Usein kirjoitetaan $u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$, eli $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Funktioiden kuvaajien eli graafien luonnostelu on $\mathbb{R}^n$:ssä, $n \geq 2$, hankalampaa kuin reaaliakselilla $\mathbb{R}$. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ funktion graafi on aina avaruuden $\mathbb{R}^{n+1}$ osajoukko. Yksiulotteisessa tapauksessa reaaliarvoisen funktion graafi on siis tasossa $\mathbb{R}^2$, jolloin se on helppo hahmotella.

2.1.1. Esimerkki. Olkoon $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $u(x) = |x|$, pisteen x etäisyys origosta. Tapauksessa $n = 2$ funktion u graafi on $\mathbb{R}^3$:n osajoukko

$$\{(x_1, x_2, u(x_1, x_2)) \in \mathbb{R}^3 : \ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Tämä on $\mathbb{R}^3$:n kartio, jonka kärki on origossa.

2.1.2. Esimerkki. Olkoon $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$, luvun x_1 ensimmäinen desimaali. Tällöin u ei ole funktio, sillä jos $x_1 = 1,00\ldots = 0,99\ldots$, niin $u(x) = 0$ tai $u(x) = 9$, eikä siis u:n arvo pisteessä x ole yksikäsitteisesti määrätty.

2.1.3. Esimerkki. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^2$ sekä $c \in \mathbb{R}$. Joukkoa

$$C = C_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}$$

kutsutaan f:n *tasa-arvokäyräksi*. Joukon C ei tarvitse olla "käyrä"; yleiselle kuvaukselle f se voi olla $\mathbb{R}^2$:n mielivaltainen joukko. Tässä tapauksessa C on helposti määrättävissä:

$$f(x, y) = x^2 - y^2 = c \quad \Leftrightarrow \quad (x - y)(x + y) = c.$$

Jos $c = 0$, niin $x - y = 0$ tai $x + y = 0$, mikä merkitsee, että C_0 muodostuu suorasta $x = y$ tai $x = -y$. Jos $c \neq 0$, niin C_c koostuu kahdesta hyperbelin kaaresta $x^2 - y^2 = c$.

Huomaa, että esimerkissä 2.1.3 käytimme merkinnän (x_1, x_2) sijaan merkintää (x, y). Tämä on yleinen käytäntö $\mathbb{R}^2$:ssa. Vastaavasti avaruudessa $\mathbb{R}^3$ pisteiden tavallinen esitystapa on (x, y, z).

2.1.4. Esimerkki. Olkoon $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Nyt on mahdotonta piirtää f:n graafia, koska tämä on $\mathbb{R}^4$:n osajoukko

$$\{(x, y, z, f(x, y, z)) \in \mathbb{R}^4 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}.$$

Olkoon $f(x, y, z) = x^2 - z$. Nyt voi luonnostella funktion f *tasa-arvopinnat* eli joukot

$$\begin{aligned} C_c &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = c\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - z = c\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - c\}. \end{aligned}$$

Joukko C_c on parabolinen sylinteri.

HARJOITUSTEHTÄVIÄ

2.1:1 Missä tason $\mathbb{R}^2$ joukossa $\ln(xy)$ määrittelee funktion? Missä joukossa funktio saa arvon 0? Luonnostele tämän funktion tasa-arvojoukkoja.

2.1:2 Olkoon $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{|x|}$. Luonnostele f:n graafi. Mitä voidaan sanoa funktion f arvoista joukossa $\mathbb{R}^2 \backslash B(0, \ln 2)$.

2.1:3 Olkoon $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Mitä vikaa on funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} |x|^3/x_1, \text{ kun } x \neq 0, \\ 0, \text{ kun } x = 0, \end{cases}$$

määrittelyssä?

2.2. RAJA-ARVOT JA JATKUVUUS

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $f : A \to \mathbb{R}$ sekä $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ja $a \in \mathbb{R}$. Funktiolla f on raja-arvo a pisteessä x_0, jos jokaisella jonolla (x_i), jolla $x_i \in A$, $x_i \to x_0$ ja $x_i \neq x_0$, pätee

$$f(x_i) \to a. \tag{2.2.1}$$

Merkitsemme $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$. Toisinaan käytetään myös merkintää

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A \backslash \{x_0\}}} f(x) = a.$$

Jono $(f(x_i))$ on reaalilukujono ja kaavassa (2.2.1) esiintyy tavallinen reaalilukujonon raja-arvo.

2.2.2. Huomautus. Jotta määritelmä olisi mielekäs, tulee olla $x_0 \in \overline{A}$. Mikäli tämä ei päde, niin $x_0 \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{A}$. Joukko $\mathbb{R}^n \backslash \overline{A}$ on avoin, joten on olemassa sellainen $r > 0$, että $B(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n \backslash \overline{A}$. Lisäksi $\overline{A} = A \cup \partial A$, joten $A \subset \overline{A}$ ja erityisesti $B(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n \backslash A$. Näin ollen ei ole olemassa sellaista joukon A jonoa (x_i), että $x_i \to x_0$. Vastaava päättely pätee myös, kun x_0 on joukon A erillinen piste, toisin sanoen kun jollakin $r > 0$ pätee $B(x_0, r) \cap A = \{x_0\}$.

2.2.3. Esimerkki. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

Tutkitaan, onko raja-arvo $\lim_{x\to 0} f(x)$ olemassa. Ensinnäkin kysymys on mielekäs, koska $0 \in \overline{\mathbb{R}^2\setminus\{0\}} = \mathbb{R}^2$. Tutkitaan raja-arvoa katsomalla, miten f käyttäytyy pisteissä $f(x_i)$ kun jono (x_i) valitaan sopivasti. Valitaan ensin

$$x_i = (1/i, 0) \in \mathbb{R}^2\setminus\{0\}.$$

Nyt $x_i \to 0 = (0,0)$, sillä

$$|x_i - 0| = \sqrt{(1/i-0)^2 + (0-0)^2} = 1/i \to 0.$$

Toisaalta

$$f(x_i) = f(1/i, 0) = \frac{2\cdot 1/i \cdot 0}{1/i^2 + 0^2} = 0,$$

joten $f(x_i) \to 0$. Valitaan seuraavaksi

$$y_i = (1/i, 1/i) \in \mathbb{R}^2\setminus\{0\}.$$

Nyt myös $y_i \to 0$ ja

$$f(y_i) = f(1/i, 1/i) = \frac{2\cdot 1/i \cdot 1/i}{1/i^2 + 1/i^2} = \frac{2}{1+1} = 1,$$

joten vakiojonona $(f(y_i))$ toteuttaa $f(y_i) \to 1$. Tästä voimme päätellä, ettei f:llä ole raja-arvoa origossa, sillä raja-arvon on oltava sama jokaisella jonolla.

2.2.4. Huomautus. Raja-arvon määritelmä on sama kuin tapauksessa $n = 1$. Ainoa ero on, että nyt f voi olla määritelty $\mathbb{R}$:n mielivaltaisessa joukossa A. Huomaa, että tällä määritelmällä tulevat toispuoleiset raja-arvot välin päätepisteissä käsiteltyä samalla kertaa.

2.2.5. Esimerkki. Olkoon $f : \mathbb{R}^2\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}.$$

Osoitamme, että $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Olkoon $(x_i, y_i) \to (0,0)$, $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$. On näytettävä: $f(x_i, y_i) \to 0$.

Todistus 1.

$$|f(x_i, y_i) - 0| = f(x_i, y_i) = \frac{x_i^2 y_i^2}{x_i^2 + y_i^2}$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Jos $x_i \to 0$, niin $x_i^2 \to 0$. Näin ollen on olemassa sellainen i_ε, että $x_i^2 < \varepsilon$ kun $i > i_\varepsilon$. Tästä seuraa

$$|f(x_i, y_i) - 0| = \frac{x_i^2 y_i^2}{x_i^2 + y_i^2} \le \frac{\varepsilon\, y_i^2}{y_i^2} = \varepsilon, \text{ kun } i > i_\varepsilon,$$

joten väite pätee.

Edellisessä todistuksessa on virhe. Viimeinen arvio on mieletön, koska tässä tapauksessa y_i voi olla 0, sillä vaikka $(x_i, y_i) \neq 0$, voi olla $y_i = 0$. Päättely voidaan kuitenkin korjata seuraavasti.

Todistus 2. Koska $\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta = (\alpha-\beta)^2 \ge 0$, niin $2\alpha\beta \le \alpha^2+\beta^2$. Näin ollen pätee $2x_iy_i \le x_i^2 + y_i^2$. Tästä seuraa

$$\frac{x_i^2y_i^2}{x_i^2+y_i^2} = \frac{2x_iy_i\cdot x_iy_i}{2(x_i^2+y_i^2)} \le \frac{x_iy_i}{2} \to 0, \text{ kun } i \to \infty,$$

sillä jos $x_i \to 0$, $y_i \to 0$, niin $x_iy_i \to 0$. □

Tarkastellaan seuraavaksi jatkuvuuden käsitettä avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$ ja $x_0 \in A$. Kuvaus f on *jatkuva pisteessä* x_0, jos

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

2.2.6. Huomautus. Akateeminen tapaus: jos x_0 on kuvauksen f määrittelyjoukon A erillinen piste, niin f on automaattisesti jatkuva pisteessä x_0.

Jatkuvuudelle saadaan yhtäpitävä karakterisaatio myös pistejonojen kautta. Kuvaus f on jatkuva pisteessä $x_0 \in A$ täsmälleen silloin, kun kaikilla jonoilla (x_i), joilla $x_i \in A$ ja $x_i \to x_0$ pätee $f(x_i) \to f(x_0)$.

Huomaa, että tässä x_i saa olla myös x_0, mutta riittää tarkastella jonoja (x_i), joilla pätee $x_i \neq x_0$ jokaisella i.

2.2.7. Esimerkki. Tarkastellaan esimerkin 2.2.5 funktiota

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \; f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}.$$

Funktion jatkuvuutta origossa ei voida tutkia, koska kuvaus f ei ole määritelty origossa. Pisteissä $(x,y) \neq (0,0)$ jatkuvuuden tutkiminen on mielekästä.

Olkoon $(x_i, y_i) \to (x,y)$, $(x_i,y_i) \neq (0,0)$. Koska $x_i \to x$ ja $y_i \to y$, niin $x_i^2 \to x^2$ ja $y_i^2 \to y^2$. Näin ollen $x_i^2y_i^2 \to x^2y^2$. Samoin $x_i^2 + y_i^2 \to x^2+y^2 \neq 0$. Tästä seuraa, että

$$\frac{x_i^2y_i^2}{x_i^2+y_i^2} \to \frac{x^2y^2}{x^2+y^2},$$

ja siis

$$|f(x_i,y_i) - f(x,y)| = \left| \frac{x_i^2y_i^2}{x_i^2+y_i^2} - \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \right| \to 0,$$

joten f on jatkuva pisteissä $(x,y) \neq (0,0)$.

Määritellään $f(0,0) = 0$. Nyt f on jatkuva myös origossa, koska esimerkin 2.2.5 nojalla

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0).$$

Jos määritellään $f(0,0) = a \neq 0$, niin saatu funktio ei ole jatkuva origossa.

2.2.8. Esimerkki. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = ax^ny^n + bx^ny^{n-1} + \cdots + cx + dy + \alpha$. Tällaista funktiota sanotaan *polynomiksi* $\mathbb{R}^2$:ssa ja se on selvästi jatkuva jokaisessa $\mathbb{R}^2$:n pisteessä.

Funktiota $f : A \to \mathbb{R}$ sanotaan *jatkuvaksi joukossa* A, jos f on jatkuva joukon A jokaisessa pisteessä.

Raja-arvoa ja jatkuvuutta käsitellään tarkemmin topologian kurssilla.

HARJOITUSTEHTÄVIÄ

2.2:1 Osoita, että jos

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a, \; \lim_{x\to x_0} g(x) = b,$$

niin

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = a+b.$$

Muotoile väite oikein kiinnittämällä huomiota kuvausten määrittelyjoukkoihin.

2.2:2 Olkoon $f : \mathbb{R}^2\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x^2y/(x^4+y^2)$. Osoita, että funktiolla f ei ole raja-arvoa origossa.

2.2:3 Olkoon $f : \mathbb{R}^2\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$. Mitä tarkoitetaan kun sanotaan, että f:llä on raja-arvo pitkin jokaista origon kautta kulkevaa suoraa? Osoita, että tehtävän 2.2:2 funktiolla f on tämä ominaisuus.

2.2:4 Olkoon $f : \mathbb{R}^2\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

Onko olemassa raja-arvoa

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)?$$

2.2:5 Olkoon $f : A \to \mathbb{R}$ jatkuva, missä $A \subset \mathbb{R}^2$ on kompakti joukko. Osoita, että f on *tasaisesti jatkuva*, toisin sanoen jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta > 0$, että $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ kun $x, y \in A$ ja $|x-y| < \delta$. *Vihje*: Tee vastaoletus.

2.3. Osittaisderivaatat

Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja $f : D \to \mathbb{R}$. Kiinnitetään piste $x_0 \in D$. Koska D on avoin, on olemassa sellainen $r > 0$, että $B(x_0, r) \subset D$. Siten f on määritelty pisteissä $x_0 + y$, kun $|y| < r$. Kiinnitetään $j = 1, 2, \ldots, n$. Nyt funktio $h \mapsto f(x_0 + he_j)$ on määritelty ainakin, kun $h \in (-r, r)$. Jos raja-arvo

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + he_j) - f(x_0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_{0,1}, x_{0,2}, \ldots, x_{0,j} + h, \ldots, x_{0,n}) - f(x_0)}{h}\end{aligned}$$

on olemassa, niin sitä kutsutaan *funktion f osittaisderivaataksi muuttujan x_j suhteen* pisteessä x_0 ja merkitään

$$\partial_j f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \mathrm{D}_j f(x_0) = \mathrm{D}_j f(x_{0,1}, \ldots, x_{0,n}).$$

Määritelmän nojalla $\partial_j f(x_0) \in \mathbb{R}$, jos se on olemassa.

Osittaisderivaatan geometrinen merkitys on helppo tulkita. Yksinkertaisuuden vuoksi tarkastellaan tapausta tasossa, eli kun $n = 2$, ja osittaisderivaattaa $\partial_1 f(x_0)$. Funktio f rajoitetaan suoran

$$L = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = x_0 + te_1, t \in \mathbb{R}\},$$

ja D:n leikkaukseen, toisin sanoen tarkastellaan reaaliarvoista funktiota

$$s \overset{g}{\mapsto} f(s, x_{0,2}).$$

Tämä on määritelty ainakin välillä $(x_{0,1} - r, x_{0,1} + r)$. Lasketaan tämän funktion derivaatta, jos sellainen on olemassa, pisteessä $x_{0,1}$. Saadaan

$$\begin{aligned}g'(x_{0,1}) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x_{0,1} + h) - g(x_{0,1})}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_{0,1} + h, x_{0,2}) - f(x_{0,1}, x_{0,2})}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + he_1) - f(x_0)}{h}\\ &= \partial_1 f(x_0).\end{aligned}$$

Osittaisderivaatan laskeminen palautuu siis aivan tavallisen yksiulotteisen derivaatan laskemiseen.

Ylläolevat merkinnät ovat turhan monimutkaisia. Siirtymällä käyttämään tason $\mathbb{R}^2$ pisteille merkintää (x, y) tarkastellaan funktiota

$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

pisteen $(x_0, y_0) \in D$ lähellä. Asetetaan kuten yllä $g(s) = f(s, y_0)$, mutta käytetään s:n tilalla x:ää, $g(x) = f(x, y_0)$. Nyt $\partial_1 f(x_0, y_0) = g'(x_0)$ ja vastaavasti $\partial_2 f(x_0, y_0) = h'(y_0)$, missä $h(y) = f(x_0, y)$.

Havaitaan siis, että osittaisderivaatan laskeminen pisteessä

$$x_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, \ldots, x_{0,n})$$

muuttujan x_j, $j = 1, \ldots, n$, suhteen palautuu seuraavaan. Tarkastellaan välillä $(x_{0,j} - r, x_{0,j} + r)$ määriteltyä funktiota

$$s \mapsto f(x_{0,1}, \ldots, x_{0,j-1}, s, x_{0,j+1}, \ldots, x_{0,n})$$

ja muodostetaan sen derivaatta pisteessä $x_{0,j}$.

2.3.1. Esimerkki. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$. Määrätään $\partial_1 f(x_0, y_0)$. Pitää derivoida funktio $s \mapsto f(s, y_0)$ pisteessä x_0. Tämä on funktio $g(s) = sy_0$. Nyt $g'(s) = y_0$ ja siis $\partial_1 f(x_0, y_0) = y_0$. Tämä voidaan tehdä helpommin muuttamalla merkintöjä. Osittaisderivaatan $\partial_1 f(x_0, y_0)$ määräämiseksi pitää derivoida $x \mapsto f(x,y) = xy$. Derivointi x:n suhteen, pitäen y:tä vakiona, antaa $\partial_1 f(x,y) = y$. Vastaavasti $\partial_2 f(x,y) = x$, sillä funktion $s \mapsto xs$ derivaatta pisteessä y on x.

2.3.2. Esimerkki. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = |x|$. Mikä on $\partial_2 f(x,y)$? Tämän määräämiseksi pitää derivoida funktio $y \mapsto f(x,y) = |x|$, kun x on kiinnitetty. Tämä on vakiofunktio. Siis $\partial_2 f(x,y) = 0$ jokaisella $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Määrätään seuraavaksi $\partial_1 f(x,y)$. Pitää siis derivoida funktio $x \mapsto f(x,y) = |x|$, kun y on kiinnitetty.

$$\partial_1 f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & \text{kun } x \neq 0, \\ \text{ei määritelty, kun } x = 0. \end{cases}$$

Näin ollen osittaisderivaattaa $\partial_1 f(0,y)$ ei ole olemassa.

2.3.3. Esimerkki. Olkoon

$$f(x,y) = \frac{1}{x} + \cos(xy) + e^{\sin(x+y)}.$$

Tämä lauseke määrittelee funktion $f : \underbrace{\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}}_{\text{avoin joukko}} \to \mathbb{R}$.
Määrätään $\partial_2 f(x,y)$ kun $x \neq 0$, toisin sanoen y-akselin ulkopuolella. Tätä varten kiinnitetään $x \neq 0$ ja derivoidaan funktio

$$y \mapsto \frac{1}{x} + \cos(xy) + e^{\sin(x+y)}.$$

Tämän derivaatta on

$$\begin{aligned} \partial_2 f(x,y) &= 0 - \sin(xy) \cdot x + e^{\sin(x+y)} \cos(x+y) \cdot 1 \\ &= -x \sin(xy) + \cos(x+y) e^{\sin(x+y)}. \end{aligned}$$

Korkeammissa ulottuvuuksissa osittaisderivaatat lasketaan täysin vastaavasti.

2.3.4. Esimerkki. Olkoon $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1 x_2 + x_3 e^{x_4}$. Määrätään $\partial_3 f(x)$. Kiinnitetään x_1, x_2, x_4 ja derivoidaan funktio

$$x_3 \mapsto x_1 x_2 + x_3 e^{x_4}.$$

Tämän derivaatta on $e^{x_4} = \partial_3 f(x)$.

2.3.5. Huomautus. Sovelluksissa f ei usein ole määritelty $\mathbb{R}^n$:n avoimessa joukossa ($\mathbb{R}^n$:ssä esiintyy derivaatta myös päätepisteissä). Esimerkiksi funktio voi olla määritelty $\mathbb{R}^2$:n "suljetussa" neliössä. Tällöin on mielekästä tutkia osittaisderivaattoja myös neliön reunalla. Määritelmä muistuttaa toispuoleisia derivaattoja päätepisteissä.

HARJOITUSTEHTÄVIÄ

2.3:1 Muodosta funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^{xy}\cos(x+y)$, osittaisderivaatat $\partial_1 f(x,y)$ ja $\partial_2 f(x,y)$.

2.3:2 Muodosta funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sin^2 x + \cos^2 y$, osittaisderivaatat $\partial_1 f(x,y)$ ja $\partial_2 f(x,y)$.

2.3:3 Anna esimerkki funktiosta $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, jolla $\partial_1 f(x,y) = 0$ jokaisella $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, mutta f ei ole jatkuva.

2.4. DERIVOITUVUUS JA TANGENTTITASO

Tapauksessa $n = 1$ pätee $\partial_1 f(x) = f'(x)$. Jos f:llä on derivaatta $f'(x)$ pisteessä x, niin f on jatkuva pisteessä x.