takia $\pm$ ei vaikuta kyseisessä pisteessä saatuun f:n arvoon. Pisteessä $(0,0)$ funktio f saa arvon 0, pisteessä $(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$ arvon 5 ja pisteessä $(1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$ arvon 20.

Yhdistämällä yllä olevat tulokset havaitaan, että funktio f saa minimiarvonsa pisteessä $(0,0)$ ja maksimiarvonsa pisteissä

$$\pm(1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5}).$$

Pieni lisäanalyysi kertoo, että näissä pisteissä ääriarvot ovat aitoja. Pisteen $(0,0)$ tapauksessa tämä selviää kriittisten pisteiden avalyysin avulla, mutta pisteiden $\pm(1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$ osalta vaaditaan lisäpäättelyä. Lisäanalyysi kertoo, että funktion f määräämä toisen asteen muoto on positiivisesti definiitti, vertaa kappale 2.9.

HARJOITUSTEHTÄVIÄ

3.4:1 Millä suoralla sylinterillä, jonka tilavuus on $V > 0$, on pienin vaipan ja pohjien yhteenlaskettu pinta-ala?

3.4:2 Määritä funktion $f(x,y) = xy$ maksimiarvo joukossa $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 4\}$.

3.4:3 Lagrangen kertoimia voidaan käyttää myös moniulotteisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Ratkaise tehtävä 2.9:6 käyttäen Lagrangen kertoimia.

3.4:4 Etsi funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$f(x,y) = \frac{x-y}{1+x^2+y^2},$$
suurin ja pienin arvo ylemmässä puolitasossa $y \geq 0$.

4. INTEGROINTI TASOSSA

4.1. INTEGRAALIN MÄÄRITTELY SUORAKAITEEN YLI

Euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$ integrointiväliä $[a,b]$ vastaa "laatikko", joka on n:n välin karteesinen tulo. Riemann-integraali laatikon yli ei oleellisesti eroa Riemann-integraalista yksiulotteisen välin $[a,b]$ yli. Vaikeuksia integroimisessa $\mathbb{R}^n$:ssä tuottaa integroiminen yli monimutkaisempien joukkojen kuin laatikoiden. Näihin tilanteisiin joudutaan useissa käytännön sovelluksissa. Käsittelemme tässä luvussa tapausta $n = 2$ ja palaamme tapaukseen $n \geq 3$ luvussa 5. Lähdemme liikkeelle $\mathbb{R}^2$:n suljetusta suorakaiteesta eli kaksiulotteisesta laatikosta

$$D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x_1 \leq b, c \leq x_2 \leq d\} = [a,b] \times [c,d],$$

missä $a < b$ ja $c < d$.

Suorakaiteen D *ositus* eli *jako* $\{R_{ij}\}$ muodostuu välien $[a,b]$ ja $[c,d]$ osituksista: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$, $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = d$, missä suorakaiteet $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, muodostavat joukon D osituksen $\{R_{ij}\}$.

Suorakaiteen R_{ij} pinta-ala $\Delta(R_{ij})$ määritellään luonnollisella tavalla sivujen pituuksien tulona, siis

$$\Delta(R_{ij}) = \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\Delta x_i}\underbrace{(y_j - y_{j-1})}_{\Delta y_j}.$$

Käytämme tässä merkintää $\Delta(R_{ij})$; myöhemmin kuitenkin siirrymme merkintään area(R_{ij}). Suorakaiteen R_{ij} läpimitalla tarkoitetaan sen lävistäjän pituutta

$$d(R_{ij}) = (\Delta x_i^2 + \Delta y_j^2)^{1/2},$$

ja jaon $\{R_{ij}\}$ normilla $\|R_{ij}\|$ tarkoitetaan suorakaiteiden R_{ij} suurinta läpimittaa eli

$$\|R_{ij}\| = \max\{d(R_{ij}) : 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq m\}.$$

Olkoon $f : D \to \mathbb{R}$ rajoitettu funktio. Funktion f *Riemannin summa jaossa* $\{R_{ij}\}$ on

$$\begin{aligned} R(f,\ R_{ij}) &= \sum_{i,j} f(\xi_{ij})\,\Delta(R_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_{ij})\,\Delta(R_{ij}), \end{aligned}$$

missä $\xi_{ij} \in R_{ij}$. Huomaa, että $R(f,\ R_{ij})$ riippuu myös pisteiden ξ_{ij} valinnasta, vaikka emme erikseen merkitse tätä riippuvuutta.

4.1.1. Määritelmä. Rajoitettu funktio f on *Riemann-integroituva* yli suorakaiteen D, jos on olemassa luku $I \in \mathbb{R}$, jolle pätee seuraava ehto: jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|R(f, R_{ij}) - I| < \varepsilon,$$

kun ositus $\{R_{ij}\}$ toteuttaa ehdon $\|R_{ij}\| < \delta$. Merkitään

$$I = \int_D f\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_D f\ \mathrm{d}A = \iint_D f\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D f(x,y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Kuten yhden muuttujan funktion tapauksessa on mahdollista muodostaa myös funktioon f liittyvät ylä- ja alasummat

$$S(f, R_{ij}) = \sum_{i,j} \sup\{R(f, R_{ij}) : \xi_{ij} \in R_{ij}\}\ \text{(yläsumma)},$$

$$s(f, R_{ij}) = \sum_{i,j} \inf\{R(f, R_{ij}) : \xi_{ij} \in R_{ij}\}\ \text{(alasumma)}.$$

Nämä ovat molemmat olemassa, koska f on rajoitettu.

Seuraavien lauseiden todistukset eivät poikkea yksiulotteisesta tapauksesta.

4.1.2. Lause. *Olkoon $f : D \to \mathbb{R}$ rajoitettu. Tällöin f on Riemann-integroituva yli D:n täsmälleen silloin, kun jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen ositus $\{R_{ij}\}$, että $S(f, R_{ij}) - s(f, R_{ij}) < \varepsilon$.* □

4.1.3. Lause. *Olkoon $f : D \to \mathbb{R}$ jatkuva. Tällöin f on Riemann-integroituva.* □

4.1.4. Huomautus. Lauseen 4.1.3 todistus vastaa täysin yksiulotteisen vastineen todistusta. Todistus perustuu f:n tasaiseen jatkuvuuteen, sillä kompaktissa joukossa, kuten joukossa D, jatkuva funktio on tasaisesti jatkuva.

4.1.5. Esimerkki. Integraalin määritelmää 4.1.1 on hankala käyttää integraalin arvon määräämiseen. Joskus se kuitenkin onnistuu. Olkoon $D = [a,b] \times [c,d]$ ja $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \alpha$ vakiofunktio. Nyt

$$\int_D f\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \alpha\ \underbrace{\mathrm{area}(D)}_{(b-a)(d-c)},$$

sillä jokaisella Riemannin summalla on tämä sama vakioarvo $\alpha\,\mathrm{area}(D)$.

Integraalin laskeminen *iteroituna integraalina* on yksi tärkeimmistä moniulotteisten integraalien määrittämismenetelmistä. Olkoon $D = [a,b] \times [c,d]$ ja $f : D \to \mathbb{R}$ jatkuva. Tällöin kiinteällä $x \in [a,b]$ funktio $y \mapsto f(x,y)$ on jatkuva välillä $[c,d]$ ja integraali

$$\int_c^d f(x,y)\ \mathrm{d}y$$

on olemassa. Vastaavasti kiinteällä $y \in [c, d]$ integraali

$$\int_a^b f(x, y)\, dx$$

on olemassa.

4.1.6. Lause. *Olkoon $f : D \to \mathbb{R}$ jatkuva. Tällöin*

$$\int_D f\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy\right)\, dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx\right)\, dy.$$

Todistus. Luonnostelemme todistuksen idean. Valitaan $\xi_{ij} = (x_i, y_j) \in \mathbb{R}_{ij}$. Tällöin

$$\begin{aligned}\int_D f(x, y)\, dx\, dy &\approx R(f, R_{ij}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\xi_{ij}) \underbrace{\Delta(R_{ij})}_{\Delta x_i \Delta y_j} \\ &= \sum_{i=1}^m \Delta x_i \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) \Delta y_j \\ &\approx \sum_{i=1}^m \Delta x_i \int_c^d f(x_i, y)\, dy \approx \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx.\end{aligned}$$

Todistuksessa käytetään tietoa, että funktio

$$x \mapsto \int_c^d f(x, y)\, dy$$

on jatkuva ja siis integroituva yli välin $[a, b]$. Funktion jatkuvuus on suhteellisen helppo nähdä; se perustuu funktion f tasaiseen jatkuvuuteen joukossa D. Tämä jätetään harjoitustehtäväksi. Toisen yhtälön todistus menee samoin. □

Iteroidussa integraalissa on syytä muistaa, mitkä rajat kuuluvat millekin muuttujalle. On huomattava, että yleisesti ei päde

$$\int_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx,$$

kun f on Riemann-integroituva. Syy tähän on, että iteroitujen integraalien ei tarvitse olla olemassa. Integraalit ovat olemassa, kun f on jatkuva. Edellinen todistus käyttää tätä tietoa. Lauseen 4.1.6 kaava pätee yleisemminkin.

4.1.7. Lause. *Olkoon $f : D \to \mathbb{R}$ rajoitettu ja integraali*

$$\int_D f\, dx\, dy$$

olemassa, toisin sanoen f on Riemann-integroituva. Jos integraali

$$\int_a^b f(x, y)\, dx$$

on olemassa kaikilla $y \in [c, d]$ ja funktio

$$y \mapsto \int_a^b f(x, y)\, dx$$

on Riemann-integroituva välillä $[c, d]$, niin

$$\int_D f\, dx\, dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy.$$

Sama pätee, jos x:n ja y:n roolit oletuksissa vaihdetaan. □

Integraalille pätevät samat ominaisuudet kuin yksiulotteisessa tapauksessa. Näiden todistukset ovat suurelta osin samat.

4.1.8. Lause. *Olkoon $D = [a, b] \times [c, d]$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ja olkoot funktiot $f, g : D \to \mathbb{R}$ Riemann-integroituvia. Tällöin*

a)
$$\int_D (f + g)\, dx\, dy = \int_D f\, dx\, dy + \int_D g\, dx\, dy,$$

b)
$$\int_D \lambda f\, dx\, dy = \lambda \int_D f\, dx\, dy,$$

c) *jos* $f(x,y) \leq g(x,y)$ *jokaisella* $(x,y) \in D$, *niin*

$$\int_D f \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \leq \int_D g \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

d)

$$\int_D f \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \leq \int_D |f| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

e) *jos* $D_1, \ldots, D_n \subset D$ *ovat oleellisesti pistevieraita suorakaiteita ja* $\bigcup_{i=1}^{n} D_i = D$, *niin*

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{D_i} f \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_D f \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

□

Oleellisesti pistevierailla suorakaiteilla on yhteisiä pisteitä korkeintaan reunoillaan. Huomaa, että kaikki suorakaiteet ovat suljettuja.

4.1.9. Esimerkki. Olkoon $D = [1,3] \times [0,1]$. Lasketaan

$$\iint_D \frac{x}{(1+xy)^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Nyt funktio

$$f(x,y) = \frac{x}{(1+xy)^2}$$

on jatkuva joukossa D. Tämä nähdään siitä, että nimittäjä on kahden muuttujan polynomi eikä saa arvoa nolla joukossa D. Näin ollen

integraali voidaan laskea iteroituna integraalina:

$$\begin{aligned}
\iint_D f \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y &= \int_1^3 \int_0^1 \frac{x}{(1+xy)^2} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= \int_1^3 \left(\Big/_{0}^{1} - \frac{1}{1+xy} \right) \mathrm{d}x = \int_1^3 \left(1 - \frac{1}{1+x} \right) \mathrm{d}x \\
&= \Big/_{1}^{3} (x - \ln(1+x)) = 2 - \ln 2.
\end{aligned}$$

HARJOITUSTEHTÄVIÄ

4.1:1 Olkoon $D = [0,1] \times [0,1]$ ja $f(x,y) = 0$, kun $x \in [0,1]$ on rationaalinen ja 1 muulloin. Tutki integraalin

$$\iint_D f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

olemassaoloa.

4.1:2 Olkoon $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(t,s) = \iint_{[0,t] \times [0,s]} (x+y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Määritä pisteet, joissa f saa suurimman ja pienimmän arvonsa joukossa $[0,1] \times [0,1]$.

4.1:3 Olkoon $D = [0,1] \times [0,1]$ ja $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $f(x,y) = x$, kun $(x,y) \in \partial D$. Määritä integraali

$$\iint_D \partial_1 f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

4.1:4 Olkoon $D = [0,1] \times [0,1]$. Osoita integraalin määritelmän perusteella, että

$$\iint_D x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \leq 1.$$

4.1:5 Olkoon $D = [0,1] \times [0,1]$. Määritä integraali

$$\iint_D (x^2 + xy)\, dx\, dy.$$

4.1:6 Olkoon $D = [0,1] \times [0,1]$. Määritä integraali

$$\iint_D e^{xy}\, dx\, dy.$$

4.1:7 Osoita, että jos $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ on jatkuva, niin funktio

$$x \mapsto \int_c^d f(x,y)\, dy$$

on jatkuva välillä $[a,b]$.

Vihje: Harjoitustehtävä 2.2:5.

4.2. Integrointi yleisten joukkojen yli

Seuraava teoria tulee kyseeseen myös kun $n = 1$, mutta tätä teoriaa ei juuri erikseen käsitellä. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ rajoitettu joukko ja $f : A \to \mathbb{R}$ rajoitettu funktio. Huomaa, että f:n ei tarvitse olla jatkuva. Koska A on rajoitettu, on olemassa sellainen suorakaide D, että $D \supset A$.

4.2.1. Määritelmä. Asetetaan

$$\int_A f\, dx\, dy = \int_D \tilde{f}\, dx\, dy,$$

missä

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{, kun } x \in A \\ 0 & \text{, kun } x \in D \setminus A, \end{cases}$$

jos jälkimmäinen integraali on olemassa. On suhteellisen helppoa nähdä, että integraalin määrittely ei riipu valitusta suorakaiteesta D.

Huomaa, että $\tilde{f}$ on harvoin jatkuva, vaikka f olisi jatkuva A:ssa. Koska integraali

$$\int_D \tilde{f}\, dx\, dy$$

sitten on olemassa? Tähän ei riitä funktion f jatkuvuus A:ssa, vaan on otettava huomioon joukon A reunan ∂A monimutkaisuus.

Emme käsittele tätä ongelmaa syvällisemmin, vaan annamme siihen käytännön tarpeita tyydyttävän vastauksen. Tätä ei ole periaatteessa vaikea todistaa. Vastausta varten tarvitsemme *Lebesguen nollajoukon* käsitteen. Tässä tarkoitamme nollajoukolla *Lebesguen mitan* suhteen nollamittaista joukkoa.

Joukko $N \subset \mathbb{R}^2$ on nollajoukko, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen, mahdollisesti äärellinen, jono suorakaiteita $R_i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$, että

$$\sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{(b_i - a_i)(d_i - c_i)}_{\text{area}(R_i)} \le \varepsilon$$

ja

$$N \subset \bigcup_i R_i,$$

toisin sanoen suorakaiteet R_i *peittävät* N:n.

4.2.2. Esimerkki. Jana $I = \{(t,0) : 0 \le t \le 1\}$ on nollajoukko tasossa $\mathbb{R}^2$, sillä suorakaide

$$R = [0,1] \times [-\varepsilon/2,\ \varepsilon/2],\ \varepsilon > 0$$

peittää I:n, toisin sanoen $I \subset R$, ja

$$\text{area}(R) = 1 \cdot (\varepsilon/2 + \varepsilon/2) = \varepsilon.$$

Nollajoukon osajoukko on selvästi nollajoukko. Lisäksi, jos joukko A ei ole nollajoukko ja $A \subset B$, niin joukko B ei myöskään ole nollajoukko. Tämän todistamisen jätämme harjoitustehtäväksi.

4.2.3. Lause (Lebesgue). a) *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ kompakti, ∂A nollajoukko ja $f : A \to \mathbb{R}$ jatkuva. Tällöin integraali*

$$\int_A f \, dx \, dy$$

on olemassa.

b) *Olkoon $f : A \to \mathbb{R}$ rajoitettu ja $A \subset \mathbb{R}^2$ kompakti nollajoukko. Tällöin*

$$\int_A f \, dx \, dy = 0.$$

□

4.2.4. Huomautus. Lauseen 4.2.3 kohdassa a) ei tarvitse olettaa, että f on rajoitettu, koska jatkuva funktio on kompaktissa joukossa aina rajoitettu. Kohdassa b) oletus funktion f rajoittuneisuudesta tarvitaan: Riemann-integraali voidaan kohdistaa vain rajoitettuihin funktioihin. Sitä ei ole määritelty rajoittamattomille funktioille, esimerkiksi

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$$

ei ole Riemann-integraali. Se on niin sanottu epäoleellinen integraali, joka lasketaan raja-arvona

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx.$$

Epäoleelliseen integraaliin palaamme kappaleessa 4.7.

Lauseen 4.1.8 antamat integraalin perusominaisuudet yleistyvät suorakaiteesta yleisemmille joukoille seuraavan lauseen avulla.

4.2.5. Lause. a) *Olkoot funktiot $f, g : A \to \mathbb{R}$ integroituvia rajoitetun joukon $A \subset \mathbb{R}^2$ yli ja olkoon $\lambda \in \mathbb{R}$. Tällöin*

a$_1$)

$$\int_A (f+g) \, dx \, dy = \int_A f \, dx \, dy + \int_A g \, dx \, dy,$$

a$_2$)

$$\int_A \lambda f \, dx \, dy = \lambda \int_A f \, dx \, dy,$$

a$_3$) *jos $f(x,y) \le g(x,y)$ jokaisella $(x,y) \in D$, niin*

$$\int_A f \, dx \, dy \le \int_A g \, dx \, dy.$$

b) *Olkoon funktio $f : A \to \mathbb{R}$ integroituva yli joukon A,*

$$A_1, \ldots, A_k \subset A,$$

∂A_i nollajoukko jokaisella $i = 1, \ldots, k$, $A_i \cap A_j \subset \partial A_i \cap \partial A_j$, $i \ne j$, ja

$$\bigcup_{i=1}^k A_i = A.$$

Tällöin

$$\sum_{i=1}^k \int_{A_i} f \, dx \, dy = \int_A f \, dx \, dy$$

□

4.2.6. Huomautus. Ominaisuutta b) sanotaan kirjallisuudessa usein integraalin *additiivisuudeksi.*

Riemann-integraali antaa mahdollisuuden määritellä joukon $A \subset \mathbb{R}^2$ pinta-alan. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ rajoitettu joukko. Jos integraali

$$\int_A dx \, dy \tag{4.2.7}$$

on olemassa, niin sitä sanotaan A:n *Jordanin mitaksi*, kaksiulotteisessa tapauksessa siis *pinta-alaksi*, ja merkitään $\text{area}(A)$. Integraali (4.2.7) tarkoittaa siis integraalia

$$\int_D \chi_A \, dx \, dy,$$

missä D on joukon A sisältävä suorakaide ja χ_A joukon A *karakteristinen funktio*, toisin sanoen

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in A, \\ 0, & \text{kun } x \notin A, \end{cases}$$

Seuraava lause antaa riittävän ja välttämättömän ehdon pinta-alan $\text{area}(A)$ olemassaololle.

4.2.8. Lause (Lebesgue). *Rajoitetulla joukolla $A \subset \mathbb{R}^2$ on pinta-ala täsmälleen silloin, kun ∂A on nollajoukko. Tällöin*

$$\text{area}(A) = \int_{\overline{A}} 1 \, dx \, dy, \tag{4.2.9}$$

missä $\overline{A} = A \cup \partial A$ on joukon A sulkeuma. □

Huomaa, että koska A on rajoitettu, myös $\overline{A}$ on rajoitettu. Näin ollen se on suljettuna joukkona kompakti.

4.2.10. Huomautus. Funktio $f : \overline{A} \to \mathbb{R}$, $f(x) \equiv 1$, on jatkuva kompaktissa joukossa $\overline{A}$ ja lauseen 4.2.3 a) mukaan kaavan (4.2.9) integraali on olemassa, koska olemme olettaneet, että ∂A on nollajoukko. Lauseiden 4.2.3 b) ja 4.2.5 b) nojalla

$$\int_{\overline{A}} 1 \, dx \, dy = \int_{\partial A \setminus A} 1 \, dx \, dy + \int_A 1 \, dx \, dy = \int_A 1 \, dx \, dy.$$

Jos $A = [a, b] \times [c, d]$, niin olemme määritelleet A:n pinta-alaksi $\text{area}(A) = (b - a)(d - c)$. Koska $\mathbb{R}^2$:n jana on nollajoukko, myös ∂A, eli suorakaiteen reuna, on nollajoukko, ja lauseen 4.2.8 nojalla suorakaiteella on yllämainittu pinta-ala. Lauseesta 4.2.8 havaitaan myös, että joukon A sisäpisteiden joukko $\text{int}A = (a, b) \times (c, d)$ toteuttaa yhtälön $\text{area}(\text{int}A) = \text{area}(A)$, sillä $\overline{\text{int}A} = A$.

Yllä on käsitelty integrointia tasossa eli $\mathbb{R}^2$:ssa. Tilannetta on syytä verrata tarkemmin tuttuun yksiulotteiseen tapaukseen. Rajoitetulla joukolla $A \subset \mathbb{R}$ on Jordanin pituus, toisin sanoen *yksiulotteinen Jordanin mitta* $l(A)$, jos Riemann-integraali

$$l(A) = \int_a^b \chi_A(t) \, dt$$

on olemassa. Tässä $[a, b]$ on suljettu väli, joka sisältää joukon A. Lebesguen lause 4.2.8 pätee myös yksiulotteisessa tapauksessa ja kertoo, että rajoitetulla joukolla $A \subset \mathbb{R}$ on pituus täsmälleen silloin, kun A:n reuna ∂A on yksiulotteinen nollajoukko. Tämä merkitsee, että jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa sellaiset välit $[a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \ldots$, että $\partial A \subset \bigcup_i [a_i, b_i]$ ja

$$\sum_i (b_i - a_i) < \varepsilon.$$

Olkoon $\mathbb{Q}$ rationaalilukujen joukko ja $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Tällöin A on rajoitettu joukko, mutta χ_A ei ole Riemann-integroituva välillä $[0, 1]$. Tämä on helppo nähdä yksiulotteisten ylä- ja alasummien avulla, sillä jokainen yläsumma on 1 ja jokainen alasumma 0. Tämä seuraa tietysti myös Lebesguen lauseesta 4.2.8, koska $\partial A = [0, 1]$ ja siten ∂A ei ole yksiulotteinen nollajoukko. Yhtäsuuruus $\partial A = [0, 1]$ on helppo nähdä: jokaisen $x \in [0, 1]$ jokainen ympäristö sisältää sekä joukon $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$

että joukon $[0,1]\setminus\mathbb{Q}$ pisteitä, joten $x \in \partial A$ joukon A reunan määritelmän perusteella. Jätämme harjoitustehtäväksi näyttää, että $[0,1]$ ei ole yksiulotteinen nollajoukko. Koska $\mathbb{Q}$ on *numeroituva* joukko, nähdään helposti, että A itse on yksiulotteinen nollajoukko. Joukko A ei kuitenkaan ole kompakti, joten lauseen 4.2.3 b) yksiulotteista versiota ei voida käyttää.

Riemann-integraalin avulla määritellyillä pituuden, pinta-alan ja tilavuuden käsitteillä on vikana, että harvoilla avaruuksien $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$ joukoilla on Jordanin mitta, toisin sanoen pituus, pinta-ala tai tilavuus. Pääasiassa H. Lebesguen 1900-luvun alussa kehittämä mitta- ja integraaliteoria pystyy vastaamaan näihin kysymyksiin paremmin kuin edellä esitelty Riemann-integraaliin perustuva teoria. Esimerkiksi Lebesguen teoria antaa joukolle $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ pituudeksi 0, vaikka joukolla A ei ole pituutta edellä esitetyn teorian valossa.

HARJOITUSTEHTÄVIÄ

4.2:1 Olkoot $A, B \subset \mathbb{R}^2$ ja $A \subset B$. Osoita, että jos joukko A ei ole nollajoukko, niin myöskään joukko B ei ole nollajoukko.

4.2:2 Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuva ja N funktion f graafi, toisin sanoen

$$N = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b]\}.$$

Näytä, että N on nollajoukko avaruudessa $\mathbb{R}^2$.

4.3. RIEMANNIN SUMMA YLEISESSÄ JOUKOSSA

Olkoon D kompakti joukko $\mathbb{R}^2$:ssa ja ∂D nollajoukko. Joukon D jaolla $\{D_i\}$ osiin D_i, $i = 1, \ldots, k$, tarkoitetaan seuraavaa:

a) Joukot D_i ovat kompakteja,
b) Joukkojen D_i reunat ∂D_i ovat nollajoukkoja,
c) $D_i \cap D_j \subset \partial D_i \cap \partial D_j$, $i \neq j$, toisin sanoen joukot D_i ja D_j ovat oleellisesti pistevieraita ja
d) $\bigcup D_i = D$.

Jaon $\{D_i\}$ normi $\|\{D_i\}\| = \max\{d(D_i)\}$, missä $d(D_i)$ on joukon D halkaisija eli läpimitta, toisin sanoen $d(D_i) = \sup\{|x-y| : x, y \in D_i\}$. Seuraavan lauseen todistus perustuu jatkuvan funktion tasaiseen jatkuvuuteen kompaktissa joukossa.

4.3.1. Lause. *Jos $f : D \to \mathbb{R}$ on jatkuva, niin*

$$\sum_{i=1}^{k} f(x_i, y_i)\mathrm{area}(D_i) \to \int_D f \, dx\, dy, \tag{4.3.2}$$

kun $\|\{D_i\}\| \to 0$ *ja* $(x_i, y_i) \in D_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$. □

4.3.3. Huomautus. Lause 4.3.1 on käytännössä tärkeä, kun pyritään approksimoimaan integraalin arvoa. Raja-arvo (4.3.2) tarkoittaa seuraavaa: Jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta > 0$, että kun $\|\{D_i\}\| < \delta$, niin

$$\left| \sum_{i=1}^{k} f(x_i, y_i)\, \mathrm{area}(D_i) - \int_D f \, dx\, dy \right| < \varepsilon,$$

missä (x_i, y_i) ovat mitä hyvänsä D_i:n pisteitä.

4.4. Integraalin käytännön laskeminen

Usein tulee tehtäväksi laskea jatkuvan funktion $f : A \to \mathbb{R}$ integraali yli joukon

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g_1(x) \le y \le g_2(x),\ x \in [a, b]\},$$

missä funktiot $g_i : [a, b] \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia, $i = 1, 2$, ja $g_1(x) \le g_2(x)$ kaikilla $x \in [a, b]$.

4.4.1. Huomautuksia. a) Joukko A on kompakti. Tämä johtuu funktioiden jatkuvuudesta. Jätämme todistuksen harjoitustehtäväksi.

b) Joukon A reuna ∂A on nollajoukko. Tämä johtuu seuraavasta:

i) A:n päädyt ovat janoja, joten ne ovat nollajoukkoja.
ii) Funktioiden g_i, $i = 1, 2, \ldots$, graafit ovat nollajoukkoja. Tämä perustuu jatkuvan funktion tasaiseen jatkuvuuteen suljetulla välillä. Jätämme tämän harjoitustehtäväksi.
iii) Äärellisen monen nollajoukon yhdiste on nollajoukko.

Yhdistämällä edelliset huomautukset a) ja b) lauseeseen 4.2.3 nähdään, että integraali

$$\int_A f \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

on olemassa. Miten integraali lasketaan käytännössä? On luonnollista käyttää iteroitua integraalia. Valitaan suorakaide

$$D = [a, b] \times [c, d],$$

missä esimerkiksi

$$d = \max\{g_2(x) : x \in [a, b]\}, \quad c = \min\{g_1(x) : x \in [a, b]\}.$$

Tällöin $D \supset A$ ja

$$\int_A f \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_D \tilde{f} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

missä

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{kun } x \in A \\ 0 & , \text{kun } x \in D \setminus A. \end{cases}$$

Nyt lauseen 4.1.7 nojalla

$$\int_D \tilde{f} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_a^b \int_c^d \tilde{f} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x,$$

kunhan iteroidut integraalit ovat olemassa. Iteroitu integraali lasketaan seuraavasti. Kiinnitetään $x \in [a, b]$. Pitää laskea

$$\int_c^d \tilde{f}(x, y) \, \mathrm{d}y.$$

Nyt funktiolla $y \mapsto \tilde{f}(x, y)$ on välillä $[c, d]$ enintään kaksi epäjatkuvuuskohtaa, nimittäin $g_1(x)$ ja $g_2(x)$, ja yhden muuttujan integraalilaskenta sanoo, että

$$\int_c^d \tilde{f}(x, y) \, \mathrm{d}y = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, \mathrm{d}y,$$

sillä $\tilde{f}(x, y) = 0$, kun $y \in [c, d] \setminus [g_1(x), g_2(x)]$.

Tästä seuraa, että

$$\int_A f \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_D \tilde{f} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x,$$

koska ei ole vaikea nähdä, että funktio

$$x \mapsto \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, \mathrm{d}y$$

on jatkuva välillä $[a, b]$, joten myös toinen iteroitu integraali on olemassa.

4.4.2. Esimerkki. Olkoon D kolmio, jonka kärjet ovat pisteissä $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$. Lasketaan

$$I = \int_D (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Asetetaan $g_1(x) = 0$ ja $g_2(x) = x$. Tällöin D voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g_1(x) \le y \le g_2(x),\ x \in [0,1]\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x,\ x \in [0,1]\}. \end{aligned}$$

Lisäksi g_1, g_2 ja $f(x,y) = x^2 + y^2$ ovat jatkuvia. Näin ollen

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_0^x (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\Big/_0^x (x^2 y + y^3/3) \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \underbrace{(x^3 + x^3/3)}_{=4x^3/3}\,\mathrm{d}x = \Big/_0^1 x^4/3 = 1/3. \end{aligned}$$

Edellinen voidaan integroida myös toisessa järjestyksessä,

$$I = \int_0^1 \left(\int_y^1 (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \ldots = 1/3;$$

Huomaa rajat. Lasku on tässä tapauksessa hieman hankalampi.

4.4.3. Esimerkki. Määrätään tasolevyn $D \subset \mathbb{R}^2$ massa. Oletetaan, että levyn tiheys pisteessä (x,y) on $\rho(x,y)$ $(\mathrm{kg/m^2})$. Huomaa, että tiheys ei välttämättä ole vakio. Nyt D:n massaa m voidaan ajatella approksimoitavaksi Riemannin summilla

$$\sum \rho(x_i, y_i)\mathrm{area}(D_i),$$

jotka lähestyvät integraalia

$$m = \iint_D \rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kun $\|\{D_i\}\| \to 0$, mikäli kyseessä oleva integraali on olemassa. Tämä määrittelee massan m. Jos tiheys $\rho(x,y) = \rho_0$ on vakio, niin

$$m = \iint_D \rho_0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \rho_0\,\mathrm{area}(D).$$

Vakiopintatiheyksisellä levyllä D on siis massa, jos sillä on pinta-ala. Tämä tapahtuu lauseen 4.2.8 mukaan täsmälleen silloin, kun D on rajoitettu ja ∂D on nollajoukko.

HARJOITUSTEHTÄVIÄ

4.4:1 Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ kolmio, jonka kärjet ovat pisteissä $(0,0)$, $(1,0)$ ja $(1,1)$. Määritä integraali

$$\iint_A xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

4.4:2 Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ tehtävän 4.4:1 kolmio. Määritä integraali

$$\iint_A \frac{xy}{1+x^4}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

4.4:3 Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ kompakti ja polkyhtenäinen joukko, toisin sanoen sellainen joukko, että jokaisella $x, y \in A$ on olemassa polku $\gamma : [a,b] \to A$ siten, että $\gamma(a) = x$ ja $\gamma(b) = y$. Osoita, että jos $f : A \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja ∂A on nollajoukko, niin on olemassa sellainen $(x_0, y_0) \in A$, että

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = f(x_0,y_0)\mathrm{area}(A).$$

Vihje: Kompaktissa joukossa jatkuva funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa.

4.4:4 Olkoon Δ kolmio $0 \le x \le \pi/2$, $0 \le y \le x$. Määritä integraali

$$\iint_\Delta (x^3 y + \cos x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

4.4:5 Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuva. Näytä, että

$$2\int_a^b\int_x^b f(x)f(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

4.4:6 Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, graafin pinta-alalla on lauseke

$$\operatorname{area}(\operatorname{graph} f) = \iint_D \sqrt{1 + \partial_1 f^2 + \partial_2 f^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Millä oletuksilla graafilla on varmasti pinta-ala?

4.4:7 Olkoon D suorien $x = 0$, $y = 0$ ja $x + y = 1$ rajaama kolmio. Määritä funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + y$, graafin pinta-ala.

4.4:8 Olkoon $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$. Määritä integraali

$$\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

4.5. MUUTTUJAN VAIHTO INTEGRAALEISSA

Yksiulotteisten Riemann-integraalien ehkä hyödyllisin muunnoskaava on

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t, \tag{4.5.1}$$

missä $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$ ja kaikki esiintyvät funktiot ovat jatkuvia. Huomaa, ettei yllä vaadita, että $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ määrittelisi bijektion joukolle $[a, b]$. Väli $[\alpha, \beta]$ voi olla lisäksi "väärinpäin". Kaavan (4.5.1) todistus perustuu integraalifunktion käsitteeseen ja on helppo. Olkoon F funktion f integraalifunktio eli $F'(x) = f(x)$. Tällöin yhdistetyn funktion derivoimissäännön nojalla pätee

$$f(g(t))\,g'(t) = F'(g(t))\,g'(t) = (F \circ g)'(t),$$

ja siis

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= F(b) - F(a) = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) \\ &= \int_\alpha^\beta (F \circ g)'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Tilanne on hankalampi, kun $n \geq 2$. Teoriaa ei tällöin voida perustaa integraalifunktion käsitteeseen. Lisäksi integroimisjoukot tarjoavat lisävaikeuksia.

Tarkastellaan tilannetta, jossa D, $D' \subset \mathbb{R}^2$ ovat avoimia, $\overline{D}$, $\overline{D'}$ kompakteja ja ∂D, $\partial D'$ nollajoukkoja. Oletamme, että kuvaus $w : D \to D'$ on bijektio (kuvauksen w ei tarvitse olla bijektio $\overline{D} \to \overline{D'}$) ja että $w = (w_1, w_2)$ on $C^1(D)$-kuvaus, toisin sanoen koordinaattifunktiot $w_1, w_2 \in C^1(D)$. Olkoon lisäksi $f : \overline{D'} \to \mathbb{R}$ jatkuva tai $f : D' \to \mathbb{R}$ vain Riemann-integroituva.

4.5.2. Lause. *Yllä olevilla oletuksilla pätee*

$$\begin{aligned}&\iint_{D'} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_D f(w_1(x, y), w_2(x, y))\,|\det w'(x, y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_D f(w)\,|\tau(w)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

missä $w'(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on kuvauksen w derivaatta pisteessä $(x, y) \in D$. Kuvaus $w'(x, y)$ on lineaarikuvaus, jonka esitysmatriisi on

$$\begin{bmatrix}\partial_1 w_1 & \partial_2 w_1 \\ \partial_1 w_2 & \partial_2 w_2\end{bmatrix}$$

ja

$$\tau(w)(x, y) = \det w'(x, y) = \begin{vmatrix}\partial_1 w_1 & \partial_2 w_1 \\ \partial_1 w_2 & \partial_2 w_2\end{vmatrix}$$

on lineaarikuvauksen $w'(x,y)$ esitysmatriisin determinantti eli funktion w Jacobin determinantti pisteessä $(x,y) \in D$.

4.5.3. Huomautuksia. a) Lause 4.5.2 ei päde aivan yllä olevassa muodossaan, koska funktio

$$(x,y) \mapsto f(w(x,y))\,|\tau(w)(x,y)| \tag{4.5.4}$$

ei välttämättä ole Riemann-integroituva joukossa D. Funktion ei nimittäin tarvitse olla rajoitettu. Kuitenkin jokaisella D_i, missä $D_i \subset D$, $\overline{D}_i$ kompakti D:ssä ja ∂D_i on nollajoukko, pätee, että funktio (4.5.4) on Riemann-integroituva joukossa D_i. Lisäksi jos

$$D_1 \subset D_2 \subset \dots$$

ja

$$\bigcup D_i = D,$$

niin

$$\lim_{i\to\infty} \int_{D_i} f(w)\,|\tau(w)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

on olemassa ja riippumaton jonosta D_i. Tätä raja-arvoa merkitään

$$\int_D f(w)\,|\tau(w)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{4.5.5}$$

ja se on sama kuin lauseen 4.5.2 integraali. Itse asiassa (4.5.5) on esimerkki epäoleellisesta integraalista, joita käsittelemme kappaleessa 4.7.

b) Lauseen 4.5.2 kaava pätee myös, kun D:n tilalla on $\overline{D}$ ja D':n tilalla $\overline{D}'$. Syy tähän on, että sekä ∂D että $\partial D'$ ovat nollajoukkoja.

Lauseen 4.5.2 todistus. Esittelemme todistuksen idean. Huomautuksen 4.5.3 a) valossa yksityiskohdissa on melko paljon työtä. Merkitään w:n

käänteiskuvausta $w^{-1} : D' \to D$. Olkoon $\{D_i\}$ joukon D jako, katso kappale 4.3. Nyt pätee

$$\int_{D'} f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \approx \sum_{i=1}^{k} f(x_i', y_i')\,\mathrm{area}(D_i'),$$

missä $D_i' = w(D_i)$ ja $w(x_i,y_i) = (x_i', y_i')$. Kuvaus

$$x \mapsto w(x_i,y_i) + w'(x_i,y_i)(x - (x_i,y_i))$$

approksimoi kuvausta w joukossa D_i sitä tarkemmin, mitä pienempi D_i on. Tämä johtuu siitä, että w on derivoituva ja kyseessä on kuvauksen w lokaali approksimointi derivaattakuvauksen avulla.

Olkoon $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineaarikuvaus ja $A = [a,b] \times [a,b] \subset \mathbb{R}^2$ neliö. Tällöin A:n pinta-ala on $\mathrm{area}(A) = (b-a)^2$, ja lineaarialgebran tietojen nojalla neliön kuvan pinta-ala toteuttaa

$$\mathrm{area}(L(A)) = |\det L|\,\mathrm{area}(A).$$

Tämä ei päde pelkästään neliöille vaan kaikille joukoille A, joilla on pinta-ala. Lineaarikuvauksessa kuvajoukon pinta-ala saadaan yllä olevasta kaavasta. Soveltamalla tätä pinta-alan muuttumisen kaavaa f:n Riemannin summaan ja lineaarikuvaukseen $L = w'(x_i,y_i)$ sekä ottamalla huomioon, että

$$\mathrm{area}(D_i') = \mathrm{area}(w(D_i)) \approx \mathrm{area}(L(D_i)) = |\det w'(x_i,y_i)|\mathrm{area}(D_i),$$

saadaan

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} f(x_i', y_i')\,\mathrm{area}(D_i') &\approx \sum_{i=1}^{k} f(w(x_i,y_i))|\det w'(x_i,y_i)|\,\mathrm{area}(D_i)\\ &\approx \int_D f(w)|\det w'|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

□

4.5.6. Esimerkki. Lasketaan

$$I = \iint_{D'} \frac{x}{x+2y}\,dx\,dy,$$

missä D' on suorien $2x-y=0$, $x+2y=2$, $x+2y=1$ ja $2x-y=2$ rajoittama suorakaide. Kuvaus $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $w(x,y) = (\underbrace{2x-y}_{u}, \underbrace{x+2y}_{v})$, on lineaarikuvaus, ja sen käänteiskuvauksella $w^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on lauseke

$$w^{-1}(u,v) = \left(\frac{1}{5}(2u+v), \frac{1}{5}(-u+2v)\right).$$

Tämä saadaan ratkaisemalla yhtälöryhmä

$$\begin{cases} u = 2x - y \\ v = x + 2y \end{cases}$$

x:n ja y:n suhteen. Kuvaus w on valittu siksi, että se kuvaa suorakaiteen D' bijektiivisesti suorakaiteelle D, jonka kärkipisteet ovat $(0,1)$, $(0,2)$, $(2,1)$ ja $(2,2)$. Jos lineaarikuvauksella on käänteiskuvaus, niin käänteiskuvaus on myös lineaarikuvaus. Kuvauksen w^{-1} esitysmatriisi on

$$\begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix},$$

joten sen determinantiksi saadaan

$$\tau(w^{-1}) = \begin{vmatrix} 2/5 & 1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{vmatrix} = \frac{1}{5}.$$

Kuvaus w^{-1} on selvästi C^1-kuvaus $\mathbb{R}^2$:ssa. Asettamalla

$$f(x,y) = \frac{x}{x+2y}$$

ja soveltamalla lausetta 4.5.2 kuvaukseen w^{-1} saadaan

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D'} \frac{x}{x+2y}\,dx\,dy = \iint_D f(w^{-1}(u,v))\,|\tau(w^{-1})(u,v)|\,du\,dv \\ &= \iint_D \frac{2u+v}{5v}\cdot\frac{1}{5}\,du\,dv = \frac{1}{25}\iint_D \left(\frac{2u}{v}+1\right) du\,dv \\ &= \frac{1}{25}\int_0^2 \left(\int_1^2 \left(\frac{2u}{v}+1\right) dv\right) du = \frac{1}{25}\int_0^2 (2u\ln 2 + 1)\,du \\ &= \frac{4\ln 2 + 2}{25}. \end{aligned}$$

Tehtävässä hyödyttiin, kun D' kuvattiin yksinkertaisemmalle joukolle D, jossa oli helppo soveltaa iteroitua integraalia. On varsin tavallista, että lausetta 4.5.2 sovelletaan käänteiskuvaukseen.

4.5.7. Esimerkki. Lasketaan integraali

$$I = \iint_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$

missä $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a^2 \le x^2+y^2 \le b^2\}$, $0 \le a < b < \infty$, on kahden samankeskisen ympyrän välissä oleva osa. Joukko D on kompakti, tapauksessa $a = 0$ se on suljettu kiekko $\overline{B}(0,b)$. Tarkastellaan kuvausta $w : [a,b] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$,

$$w(r,\varphi) = (x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Kyseessä on pisteen (x,y) *napakoordinaattiesitys*. Kuvaus w kuvaa avoimen suorakaiteen $(a,b) \times (0,2\pi)$ bijektiivisesti joukolle

$$D' = \mathrm{int}D \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, x > 0\}.$$

Kuvaus w on selvästi C^1-kuvaus joukossa $(a,b) \times (0,2\pi)$ ja sen Jacobin determinantille saadaan lauseke

$$\tau(w)(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r.$$

Koska integroitava funktio on jatkuva kompaktissa joukossa D ja joukosta D pois jätettävä osa on nollajoukko, saadaan

$$I = \iint_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \iint_{D'} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$
$$= \iint_{[a,b]\times[0,2\pi]} e^{-r^2} r\,dr\,d\varphi = \left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)\left(\int_a^b e^{-r^2} r\,dr\right)$$
$$= 2\pi \Big/_a^b -\frac{1}{2}e^{-r^2} = \pi\left(e^{-a^2} - e^{-b^2}\right).$$

Tätä integraalia käytetään todennäköisyyslaskennassa. Huomaa, että integraalia

$$\int_0^r e^{-t^2}\,dt$$

ei voi esittää alkeisfunktioiden avulla.

HARJOITUSTEHTÄVIÄ

4.5:1 Määritä muunnoksen $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$w(x,y) = (x^3, x+y),$$

Jacobin determinantti. Onko w bijektio?

4.5:2 Olkoon $D = \overline{B}(0,1)\backslash B(0,1/2)$. Määritä integraali

$$\iint_D \log(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

käyttämällä muuttujanvaihtoa

$$(r,\varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

4.5:3 Olkoon $D = \{(x,y) \in \overline{B}(0,1) : y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ ja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2+y^2$. Määritä integraali

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy.$$

4.6. INTEGRAALIN LASKEMINEN TASA-ARVOKÄYRIEN AVULLA

Menetelmä soveltuu erityisesti tyyppiä

$$\int_D h(g(x,y))\,dx\,dy$$

olevien integraalien laskemiseen. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ avoin, $D \subset \Omega$ kompakti, $g : \Omega \to \mathbb{R}$ sellainen $C^1(\Omega)$-kuvaus, että $g(D) \subset [a,b]$, ja $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva. Merkitään

$$A(t) = \operatorname{area}(G_t),\ t \in \mathbb{R},$$

missä $G_t = \{(x,y) \in D : g(x,y) \leq t\}$. Oletetaan, että $A \in C^1([a,b])$; tämä luonnollisesti edellyttää area(G_t):n olemassaoloa.

4.6.1. Lause. *Olkoot funktiot f, g ja A kuten yllä. Tällöin*

$$\iint_D h(g(x,y))\,dx\,dy = \int_a^b h(t)A'(t)\,dt.$$

Todistus. Luonnostelemme todistuksen. Olkoon

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

välin $[a,b]$ jako. Tällöin pätee

$$h(g(x,y)) \approx h(t_i),$$

kun $(x,y) \in G_{t_i}\backslash G_{t_{i-1}}$. Arvio on sitä tarkempi, mitä pienempi erotus $t_i - t_{i-1}$ on. Nyt

$$\iint_D h(g(x,y))\,dx\,dy \approx \sum_i h(t_i)(A(t_i) - A(t_{i-1}))$$
$$\approx \sum_i h(t_i)A'(t_i)(t_i - t_{i-1}) \approx \int_a^b h(t)A'(t)\,dt.$$

□

Koska integroitava funktio on jatkuva kompaktissa joukossa D ja joukosta D pois jätettävä osa on nollajoukko, saadaan

$$\begin{aligned} I &= \iint_D e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D'} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_{[a,b]\times[0,2\pi]} e^{-r^2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\right)\left(\int_a^b e^{-r^2} r\,\mathrm{d}r\right) \\ &= 2\pi \Big/_{a}^{b} -\frac{1}{2}e^{-r^2} = \pi\left(e^{-a^2} - e^{-b^2}\right). \end{aligned}$$

Tätä integraalia käytetään todennäköisyyslaskennassa. Huomaa, että integraalia

$$\int_0^r e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

ei voi esittää alkeisfunktioiden avulla.

HARJOITUSTEHTÄVIÄ

4.5:1 Määritä muunnoksen $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$w(x,y) = (x^3, x+y),$$

Jacobin determinantti. Onko w bijektio?

4.5:2 Olkoon $D = \overline{B}(0,1)\backslash B(0,1/2)$. Määritä integraali

$$\iint_D \log(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

käyttämällä muuttujanvaihtoa

$$(r,\varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

4.5:3 Olkoon $D = \{(x,y) \in \overline{B}(0,1) : y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ ja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$. Määritä integraali

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

4.6. INTEGRAALIN LASKEMINEN TASA-ARVOKÄYRIEN AVULLA

Menetelmä soveltuu erityisesti tyyppiä

$$\int_D h(g(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

olevien integraalien laskemiseen. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ avoin, $D \subset \Omega$ kompakti, $g : \Omega \to \mathbb{R}$ sellainen $C^1(\Omega)$-kuvaus, että $g(D) \subset [a,b]$, ja $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva. Merkitään

$$A(t) = \mathrm{area}(G_t),\ t \in \mathbb{R},$$

missä $G_t = \{(x,y) \in D : g(x,y) \leq t\}$. Oletetaan, että $A \in C^1([a,b])$; tämä luonnollisesti edellyttää area(G_t):n olemassaoloa.

4.6.1. Lause. *Olkoot funktiot f, g ja A kuten yllä. Tällöin*

$$\iint_D h(g(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b h(t)A'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Todistus. Luonnostelemme todistuksen. Olkoon

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

välin $[a,b]$ jako. Tällöin pätee

$$h(g(x,y)) \approx h(t_i),$$

kun $(x,y) \in G_{t_i}\backslash G_{t_{i-1}}$. Arvio on sitä tarkempi, mitä pienempi erotus $t_i - t_{i-1}$ on. Nyt

$$\begin{aligned} \iint_D h(g(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &\approx \sum_i h(t_i)(A(t_i) - A(t_{i-1})) \\ &\approx \sum_i h(t_i)A'(t_i)(t_i - t_{i-1}) \approx \int_a^b h(t)A'(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

□

Lause pätee heikommillakin oletuksilla, mutta on tällöin hankala muotoilla.

4.6.2. Esimerkki. Olkoon $D = \overline{B}(0,1)$ ja

$$I = \iint_D \sin(x^2 + y^2)\, dx\, dy.$$

Nyt $h(t) = \sin t$, $g(x,y) = x^2 + y^2$ sekä

$$A(t) = \text{area}(G_t) = \text{area}(\{(x,y) : x^2 + y^2 \le t\}) = \pi t.$$

Tällöin

$$I = \int_0^1 h(t)A'(t)\, dt = \pi \int_0^1 \sin t\, dt = \pi \Big/_0^1 (-\cos t) = \pi(1 - \cos 1).$$

Välin $[0,1]$ tilalla voisi käyttää laajempaakin väliä $[a,b] \supset [0,1]$. Nyt kuitenkin $A(t)$ on vakio kun $t \in [a,b] \backslash [0,1]$. Huomaa, että A ei ole C^1-funktio välillä $[a,b]$, jos $a < 0$ tai $b > 1$. Lause 4.6.1 pätee tässäkin erikoistapauksessa. Huomaa, että integraalin I voi laskea myös napakoordinaatistossa.

HARJOITUSTEHTÄVIÄ

4.6:1 Olkoon D joukko, jota rajoittavat x-akseli ja suorat $x = 1$ ja $y = x$. Määritä integraali

$$\iint_D x\, dx\, dy$$

tasa-arvokäyrien avulla käyttämällä apufunktioita $g(x,y) = x$ ja $h(t) = t$.

4.6:2 Olkoon $f(x,y) = \max(x,y)$ ja $D = [0,1] \times [0,1]$ neliö. Määritä integraali

$$\iint_D f^2\, dx\, dy$$

tasa-arvokäyrien avulla. *Vihje*: G_t on myös neliö.

4.7. EPÄOLEELLISET INTEGRAALIT

Tapauksessa $n = 1$

$$\int_0^\infty f(x)\, dx = \lim_{M \to \infty} \int_0^M f(x)\, dx.$$

edustaa niin sanottua *epäoleellista integraalia*. Se on olemassa, jos sekä f on Riemann-integroituva jokaisella välillä $[0, M]$ että yllä oleva raja-arvo on olemassa. Tilanne hankaloituu avaruudessa $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, sillä epäoleelliset integraalit $\mathbb{R}$:ssä perustuvat reaalilukujen luonnolliseen järjestykseen. Mitään tällaista ei ole käytettävissä $\mathbb{R}^n$:ssä, kun $n \ge 2$.

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ suljettu tai avoin, ∂A nollajoukko, $(x_0, y_0) \in \partial A$ sekä $f : A \backslash \{(x_0, y_0)\} \to [0, \infty)$ jatkuva. Emme oleta, että $\overline{A}$ olisi kompakti; A voi olla esimerkiksi rajoittamaton; tällöin piste (x_0, y_0) tulkitaan "äärettömyyspisteeksi". Lisäksi funktion f jatkuvuus voidaan usein korvata Riemann-integroituvuudella.

Tarkastellaan tapausta, missä $(x_0, y_0) \in \partial A$ ja $f(x,y) \to \infty$, kun $(x,y) \to (x_0,y_0)$ ja $(x,y) \in A \setminus \{(x_0,y_0)\}$. Oletetaan, että Riemann-integraali

$$\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

on olemassa joukoilla D, jotka tyhjentävät joukon $A\setminus\{(x_0,y_0)\}$. Tällä tarkoitetaan, että jokaisella $r > 0$ on olemassa sellainen joukko D, että integraali on olemassa, $D \subset A$ ja $D \supset A\setminus B((x_0,y_0),r)$. Asetetaan

$$I = \sup_D \int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

missä supremum otetaan edellä mainittujen joukkojen D yli. Huomaa, että oletimme $f \geq 0$, jolloin kaikki integraalit ovat myös positiivisia tai nollia. Oikein tulkitsemalla (x_0,y_0) voi olla "äärettömyyspiste".

Jos $I = \infty$, toisin sanoen integraalien joukko ei ole ylhäältä rajoitettu, niin sanomme, että *epäoleellinen integraali*

$$\int_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

hajaantuu eli *divergoi* pisteessä (x_0,y_0). Jos $I < \infty$, niin sanotaan, että (epäoleellinen) integraali

$$\int_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

on olemassa eli *suppenee (konvergoi)* pisteessä (x_0,y_0) ja sen arvo on I.

Seuraava pätee: Olkoon $D_1 \subset D_2 \subset \ldots$, f Riemann-integroituva yli jokaisen joukon D_i, $D_i \subset A$ ja

$$\bigcup D_i = A\setminus\{(x_0,y_0)\}.$$

Tällöin

$$I = \lim_{i\to\infty} \int_{D_i} f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Tätä ei ole vaikea todistaa, koska $f \geq 0$. Huomaa, että lukujono

$$a_i = \int_{D_i} f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

on kasvava, joten sillä on aina raja-arvo, joka voi olla ∞. Epäoleellisen integraalin suppeneminen tarkoittaa, että tämä raja-arvo on äärellinen. Vastaavasti menetellään, jos $f \leq 0$. Jos f saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja, niin se voidaan hajoittaa osiin

$$f = f^+ - f^-,$$

missä $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ ja $f^- = -\min\{f(x), 0\}$. Määrittelemme

$$I = \int_A f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_A f^+\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_A f^-\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

jos molemmat epäoleelliset integraalit konvergoivat.

Edellä "singulariteetin" muodosti yksi ainoa piste (x_0,y_0). Singulariteetti voi kuitenkin olla suurempikin joukko. Tällöin menetellään vastaavasti.

4.7.1. Esimerkki. Olkoon $A = (0,1)\times(0,1)$ avoin neliö ja $f(x,y) = 1/\sqrt{x}$, kun $(x,y) \in A$. Tällöin integraali

$$\int_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

ei ole määritelty tavallisena Riemann-integraalina, koska Riemann-integroituvan funktion tulee olla rajoitettu. Tulkitaan integraali epäoleellisena integraalina, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}\int_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \lim_{t\to 0+}\iint_{[t,1]\times[0,1]} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \lim_{t\to 0+}\int_0^1\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{t\to 0+}\int_0^1 \left(\Big/_{t}^{1} 2\sqrt{x}\right)\mathrm{d}y\\ &= \lim_{t\to 0+}\int_0^1 \left(2-2\sqrt{t}\right)\mathrm{d}y = \lim_{t\to 0+} 2(1-\sqrt{t}) = 2.\end{aligned}$$

Huomaa, että tässä tapauksessa "singulariteetti" koostuu y-akselin välistä $[0,1]$.

4.7.2. Esimerkki. Olkoon

$$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 1,\ 0\leq y\leq 1/x\}.$$

Määrätään

$$\iint_A \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x+y}.$$

Nyt funktio

$$f(x,y) = \frac{1}{x+y}$$

on jatkuva A:ssa ja $f(x,y)\geq 0$. Joukko A on rajoittamaton, joten integraali ei voi olla olemassa tavallisen Riemann-integraalin mielessä. Singulariteetti (x_0,y_0) pitää tulkita "äärettömyyteen".

Merkitään $A_t = A\cap([1,t]\times[0,1])$ ja määritellään

$$\iint_A \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x+y} = \lim_{t\to\infty}\iint_{A_t}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x+y},$$

jos raja-arvo on olemassa. Funktio

$$t\mapsto \iint_{A_t}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x+y}$$

on kasvava, joten sillä on raja-arvo äärettömyydessä. Ainoa ongelma on, että raja-arvo voi olla ääretön.

$$\begin{aligned}\iint_{A_t}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x+y} &= \int_1^t\left(\int_0^{1/x}\frac{\mathrm{d}y}{x+y}\right)\mathrm{d}x = \int_1^t\left(\Big/_{0}^{1/x}\ln(x+y)\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_1^t \ln\left(\frac{x+1/x}{x}\right)\mathrm{d}x = \int_1^t\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Logaritmille pätee $\ln(1+s)\leq s$, joten saadaan arvio

$$\int_1^t \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x \leq \int_1^t\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \Big/_{1}^{t} -\frac{1}{x} = -\frac{1}{t}+1\leq 1.$$

Näin ollen

$$\lim_{t\to\infty}\iint_{A_t}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x+y}$$

on olemassa ja äärellinen.

Tarkan arvon lausekkeelle

$$\lim_{t\to\infty}\int_1^t \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$

voi laskea osittaisintegroinnilla, sillä integroitavan funktion derivaattaa edustaa rationaalilauseke.

HARJOITUSTEHTÄVIÄ

4.7:1 Määritä epäoleellinen integraali

$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2y^2},$$

kun $D=[1,\infty)\times[1,\infty)$.

4.7:2 Olkoon D joukko $0\leq x\leq 1$, $0\leq y\leq x^2$. Määritä integraali

$$\iint_D \frac{1}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

4.7:3 Olkoon D funktioiden $y = x$ ja $y = x^2$ graafien väliin jäävä rajoitettu joukko. Määritä integraali

$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{xy}.$$

5. Integrointi moniulotteisessa avaruudessa

5.1. Perusmääritelmät

Perusmääritelmät ovat samat kuin edellisen luvun tapauksessa $n = 2$. Rajoitetun funktion $f : D \to \mathbb{R}$ Riemann-integraali yli "laatikon"

$$D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$$

voidaan määritellä kuten $\mathbb{R}^2$:ssa; myös ylä- ja alasummia voidaan käyttää. Erityisesti, kun iteroidut integraalit ovat olemassa, pätee

$$\int_D f\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \underbrace{\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \ldots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_n \ldots \mathrm{d}x_1}_{\text{iteroidut integraalit}},$$

ja jos $f : D \to \mathbb{R}$ on jatkuva, niin sekä integraali

$$\int_D f\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$$

että iteroidut integraalit ovat olemassa.

Olkoon sitten $A \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu joukko ja $f : A \to \mathbb{R}$ rajoitettu funktio. Asetetaan

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), \text{ kun } x \in A \\ 0, \text{ kun } x \in \mathbb{R}^n \setminus A. \end{cases}$$

Valitaan laatikko D siten, että $D \supset A$ ja määritellään

$$\int_A f\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \int_D \tilde{f}\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n,$$

jos jälkimmäinen integraali on olemassa.

Joukko $N \subset \mathbb{R}^n$ on *Lebesguen nollajoukko* $\mathbb{R}^n$:ssä, toisin sanoen nollamittainen *n-ulotteisen Lebesguen mitan* suhteen, jos kaikilla $\varepsilon > 0$