

# Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

21.9.2016

Helsingin yliopisto  
Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Johanna Rämö, johanna.ramo@helsinki.fi

Siirry istumaan jonkun viereen. Kaikilla on oltava pari. Jos et tunne vieruskaveriasi, esittäydy hänelle.

Oletetaan, että  $x$  ja  $y$  ovat reaalilukuja. Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa?

(a) Jos  $x = 3$  ja  $y = 2$ , niin  $x^2 - y^2 = 5$ .

(b) Jos  $x^2 - y^2 = 5$ , niin  $x = 3$  ja  $y = 2$ .

# Yhtälönratkaisu

$$2x - 3 = 5$$

jos ja vain jos  $2x = 8$

jos ja vain jos  $x = 4$

# Yhtälönratkaisu

$$2x - 3 = 5$$

$$\iff 2x = 8$$

$$\iff x = 4$$

## Sallitut toimitukset

- ▶ Lisätään yhtälön molemmille puolelle reaaliluku.
- ▶ Kerrotaan yhtälön molemmat puolet nolasta poikkeavalla reaaliluvulla.

## Yhtälönratkaisun idea

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right] \rightsquigarrow \begin{array}{c} \text{alkeisrivi-} \\ \dots \\ \text{toimituksia} \end{array} \rightsquigarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} & d_m \end{array} \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots = \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \xleftrightarrow{\text{samat ratkaisut}} \left\{ \begin{array}{l} c_{11}x_1 + \dots + c_{1n}x_n = d_1 \\ c_{21}x_1 + \dots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \vdots = \vdots \\ c_{m1}x_1 + \dots + c_{mn}x_n = d_m \end{array} \right.$$

# Alkeisrivitoimitukset

- ▶ Vaihetaan kahden rivin paikkaa.
- ▶ Kerrotaan jokin rivi nollasta poikkeavalla reaaliluvulla.
- ▶ Lisätään johonkin riviin jokin toinen rivi reaaliluvulla kerrottuna.



Mitkä seuraavista matriiseista ovat redusoituja porrasmatriiseja?

$$(a) \left[ \begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 16 & -8 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$(b) \left[ \begin{array}{cccccc|c} 1 & 4 & 0 & 5 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$(c) \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array} \right]$$

Selitä kaverillesi, millä tavalla matriisi kannattaa muuttaa redusoiduksi porrasmatriisiksi.

Missä järjestyksessä alkeisrivitoimitukset kannattaa tehdä?

## Gaussin-Jordanin menetelmä

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{array} \right]$$

## Gaussin-Jordanin menetelmä

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{array} \right]$$

## Gaussin-Jordanin menetelmä

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{array} \right]$$

## Gaussin-Jordanin menetelmä

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{array} \right]$$

## Gaussin-Jordanin menetelmä

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{array} \right]$$

## Gaussin-Jordanin menetelmä

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array} \right]$$



## Gaussin-Jordanin menetelmä

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

## Gaussin-Jordanin menetelmä

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

## Gaussin-Jordanin menetelmä

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

## Mitkä väitteistä ovat tosia?

- (a) Matriisia  $A$  vastaavalla yhtälöryhmällä ei ole ratkaisuja.
- (b) Matriisia  $B$  vastaavalla yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua.
- (c) Jos yhtälöryhmässä on enemmän tuntemattomia kuin yhtälöitä, niin yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua.

$$A = \left[ \begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$B = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 4/7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$