Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kurssikoe 26.10.2016
Ratkaisuehdotus
Kokeessa ei saa käyttää laskinta eikä taulukkokirjaa. Muista perustella kaikki vastauksesi.

1. Tutkitaan vektoreita $\bar{v}_1 = (1,1,1)$, $\bar{v}_2 = (0,2,0)$ ja $\bar{v}_3 = (1,-1,1)$.

   (a) Onko jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ vapaa? Perustele vastauksesi vapauden määritelmän avulla

   (b) Virittävätkö vektorit $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ avaruuden $\mathbb{R}^3$? Perustele vastauksesi virittämisen määritelmän avulla.

   (c) Kuvaile, miltä aliavaruus $\mathrm{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ näyttää. Muista perustella vastauksesi.

   Ratkaisuehdotus: (24 pistettä)

   (a) (6 pistettä)
   Tapa 1:
   Huomataan, että $1(1,1,1) + (-1)(0,2,0) + 1(1,-1,1) = (0,0,0)$. Siten vektorijono on sidottu.
   Tapa 2:
   Ratkaistaan yhtälö $x_1(1,1,1) + x_2(0,2,0) + x_3(1,-1,1) = (0,0,0)$, missä $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3$. Yhtälö on yhtäpitävä yhtälön $(x_1, x_1, x_1) + (0, 2x_2, 0) + (x_3, -x_3, x_3) = (0,0,0)$ ja edelleen yhtälön $(x_1 + x_3, x_1 + x_2 - x_3, x_1 + x_3) = (0,0,0)$ kanssa. Näin päädytään yhtälöryhmään

   $$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

   Yhtälöryhmää vastaa matriisi

   $$\left[\begin{array}{ccr|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

   Kun tälle matriisille tehdään alkeisrivitoimitukset $R_2 - R_1$ ja $R_3 - R_1$, saadaan porrasmatriisi

   $$\left[\begin{array}{ccr|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

   Koska epätosia yhtälöitä ei ole, yhtälöryhmällä on ratkaisuja. Koska 3. sarakkeessa on vapaa muuttuja, ratkaisuja on äärettömän monta. Siten yhtälöllä on muitakin ratkaisuja kuin $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Näin ollen jono on sidottu.

   Porrasmatriisin voi halutessaan vielä muuttaa redusoiduksi porrasmatriisiksi, josta pystyy lukemaan, mitkä ratkaisut ovat. Tämä ei kuitenkaan ole välttämätöntä.

   (b) (10 pistettä)
   Oletetaan että $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$. Ratkaistaan yhtälö $x_1(1,1,1) + x_2(0,2,0) + x_3(1,-1,1) = (a_1, a_2, a_3)$, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3$. Yhtälö on yhtäpitävä yhtälön $(x_1, x_1, x_1) +$

$(0, 2x_2, 0)+(x_3, -x_3, x_3) = (a_1, a_2, a_3)$ ja edelleen yhtälön $(x_1+x_3, x_1+x_2-x_3, x_1+x_3) = (a_1, a_2, a_3)$ kanssa. Näin päädytään yhtälöryhmään

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = a_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = a_2 \\ x_1 + x_3 = a_3. \end{cases}$$

Yhtälöryhmää vastaa matriisi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_1 \\ 1 & 1 & -1 & a_2 \\ 1 & 0 & 1 & a_3 \end{array}\right].$$

Kun tälle matriisille tehdään alkeisrivitoimitukset $R_2 - R_1$ ja $R_3 - R_1$, saadaan porrasmatriisi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 1 & -2 & a_2 - a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 - a_1 \end{array}\right].$$

Porrasmatriisista nähdään, että yhtälöryhmällä on ratkaisuja, jos ja vain jos $a_3 - a_1 = 0$. Näin ollen ratkaisuja ei ole esimerkiksi siinä tapauksessa, että $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ ja $a_3 = 0$. Tämä tarkoittaa sitä, että vektori $(1, 0, 0)$ ei ole vektoreiden $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ lineaarikombinaatio. Siten vektorit eivät viritä avaruutta $\mathbb{R}^3$?

(c) Huomataan, että $\bar{v}_3 = \bar{v}_1 - \bar{v}_2$. Tästä seuraa, että $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) = \operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$. Koska vektorit $\bar{v}_1$ ja $\bar{v}_2$ eivät ole yhdensuuntaisia, kyseessä on taso. Tämä taso kulkee origon kautta.

Arviointiperusteet:

Kohta (a)

- Tapa 1: Osattu kirjoittaa nollavektori annettujen vektorien lineaarikombinaationa, 4 p. Todettu, että vektorijono on sidottu / ei vapaa, 2 p.
- Tapa 2: Muodostettu yhtälö, 1 p. Muodostettu yhtälöryhmä, 1 p. Muokattu matriisi porrasmatriisiksi / ratkaistu yhtälöryhmä, 1 p. Todettu, että ratkaisuja on äärettömästi / on muitakin ratkaisuja kuin triviaali ratkaisu, 1 p. Todettu, että jono on sidottu, 2 p.
- Jos ei ole käytetty määritelmää, vaan vedottu siihen, että yksi vektori on toisten lineaarikombinaatio, mutta ratkaisu on muuten oikein, 6 p.

Kohta (b)

- Oletettu, että meillä on jokin mielivaltainen avaruuden vektori, 2 p.
- Muodostettu yhtälö, 1 p.
- Muodostettu yhtälöstä yhtälöryhmä, 1 p.
- Muutettu yhtälöryhmän matriisi porrasmuotoon / ratkaistu yhtälöryhmä Gaussin Jordanin menetelmällä, 2 p.
- Todettu, että ratkaisuja ei ole kaikilla komponenttien arvoilla, 2 p.

- Todettu, että vektorit eivät viritä avaruutta, 2 p.

Kohta (c)

- Kirjoitettu yksi vektori toisten lineaarikombinaationa, 2 p.
- Todettu, että avaruuden virittämiseen riittää kaksi vektoria, 2 p.
- Todettu, että vektorit eivät ole yhdensuuntaiset, 1 p.
- Todettu, että kyseessä on taso, 2 p.
- Todettu, että taso kulkee origon kautta, 1 p.

2. (a) Matriisilla A on ominaisvektori $\bar{v} = (3, -1)$. Mikä seuraavista vektoreista voisi olla $A\bar{v}$ ja mikä ei? Jos vektori voi olla $A\bar{v}$, kerro, mikä silloin on vektoria $\bar{v}$ vastaava ominaisarvo.
$$\bar{a} = (2,\, 4), \qquad \bar{b} = (-1, 1/3), \qquad \bar{c} = (6, -2, 0)$$
   (b) Matriisilla B on ominaisarvo $1/2$, jota vastaaavat ominaisvektorit $\bar{w}$ ja $\bar{u}$. Osoita, että myös $-4\bar{w} + 2\bar{u}$ on ominaisarvoa $1/2$ vastaava ominaisvektori.

Ratkaisuehdotus:

(a) (12 pistettä) Ominaisvektorille $\bar{v}$ pätee $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$ jollakin $\lambda \in \mathbb{R}$. Vektorien $\bar{v}$ ja $A\bar{v}$ täytyy siis kuulua samaan vektoriavaruuteen $\mathbb{R}^2$. Näin ollen vektori $\bar{c}$ ei käy. Lisäksi vektorin $\bar{v}$ täytyy olla yhdensuuntainen vektorin $A\bar{v}$ kanssa. Näin ollen vektori $\bar{a}$ ei tule kyseeseen.

Huomataan, että $\bar{b} = (-1/3)\bar{v}$. Näin ollen $\bar{b}$ voisi olla ominaisvektori. Sitä vastaava ominaisarvo olisi $-1/3$.

(b) (12 pistettä) Matriisien laskusääntöjen mukaan

$$B(-4\bar{w} + 2\bar{u}) = B(-4\bar{w}) + B(2\bar{u}) = -4B\bar{w} + 2B\bar{u}.$$

Koska $\bar{w}$ ja $\bar{u}$ ovat ominaisvektoreita, päte

$$-4B\bar{w} + 2B\bar{u} = -4(1/2\bar{w}) + 2(1/2)\bar{u} = 1/2((-4)\bar{w}) + 1/2(2\bar{u}) = (1/2)(-4\bar{w} + 2\bar{u}).$$

Näin ollen $B(-4\bar{w} + 2\bar{u}) = (1/2)(-4\bar{w} + 2\bar{u})$.

Tämä ei vielä riitä. Ominaisvektori ei saa olla nollavektori. Tässä ei tiedetä, onko $-4B\bar{w}+2\bar{u}$ nollavektori. Se olisi pitänyt mainita tehtävän oletuksissa. Tehtävänannossa oli siis virhe.

Arviointiperusteet:

Kohta (a)

- Todettu, että vektorin $A\bar{v}$ pitää olla vektorin $\bar{v}$ skalaarimonikerta / yhdensuuntainen sen kanssa, 2 p.
- Todettu, että $\bar{v}$ ja $\bar{a}$ eivät ole yhdensuuntaisia, joten $\bar{a}$ ei kelpaa, 3 p.
- Todettu, että vektoreiden $\bar{v}$ ja $A\bar{v}$ pitää olla samasta avaruudesta, joten $\bar{c}$ ei kelpaa, 3 p.
- Todettu, että $\bar{b} = (-1/3)\bar{v}$ tai että $\bar{b}$ ja $\bar{v}$ ovat yhdensuuntaisia, 2 p.

- Todettu, että $\bar{b} = (-1/3)\bar{v}$, joten vektoria $\bar{v}$ vastaava ominaisarvo voisi olla $-1/3$, 2 p.

Kohta (b)

- Ryhdytty laskemaan tuloa $B(-4\bar{w} + 2\bar{u})$, 2 p.
- Käytetty matriisien laskusääntöjä oikein. Kaikkia välivaiheita ei tarvitse löytyä, 3 p.
- Osoitettu, että $B(-4w + 2u) = (1/2)(-4w + 2u)$, 4 p. Jos Todistuksessa on lähdetty väitteestä, 2 p.
- Käytetty tietoa siitä, että $\bar{w}$ ja $\bar{u}$ ovat ominaisvektoreita, 3 p. Jos on osattu vain sanoa, mitä tarkoittaa, että ne ovat ominaisvektoreita, 1 p.

3. (a) Kaverisi väittää, että yhtälöryhmällä on ääretön määrä ratkaisuja, jos sitä vastaavassa porrasmuotoisessa matriisissa on nollarivi. (Toisin sanoen rivillä on nollia sekä viivan oikealla että vasemmalla puolella.) Anna hänelle esimerkki porrasmatriisista, jossa esiintyy nollarivi mutta jota vastaavalla yhtälöryhmällä on

   i. täsmälleen yksi ratkaisu
   ii. ei yhtään ratkaisua.

   Muista perustella vastauksesi.

   (b) Oletetaan, että A on neliömatriisi, jolle pätee $A^2 - 3A + I = O$. Osoita, että matriisi A on kääntyvä ja sen käänteismatriisi on $3I - A$.

Ratkaisuehdotus: (24 pistettä)

(a) i. (6 pistettä) Valitaan matriisi

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 7 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Matriisi on porrasmuoodossa, joten ratkaisujen lukumäärän voi lukea suoraan matriisista. Epätosia yhtälöitä ei ole, joten ratkaisuja on olemassa. Vapaita muuttujia ei ole, joten ratkaisuja ei ole äärettömän montaa. Siten ratkaisuja on täsmälleen yksi.

ii. (6 pistettä) Valitaan matriisi

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Matriisissa on epätosi yhtälö toisella rivillä, joten ratkaisuja ei ole.

(b) (12 pistettä) Oletuksesta $A^2 - 3A + I = O$ seuraa $I = 3A - A^2$. Nyt nähdään, että

$$A(3I - A) = A(3I) - A^2 = 3(AI) - A^2 = 3A - A^2 = I$$

ja

$$(3I - A)A = (3I)A - A^2 = 3(IA) - A^2 = 3A - A^2 = I.$$

Siten matriisin A käänteismatriisi on $3I - A$ ja A on kääntyvä.

Arviointiperusteet:

Kohta (a)

- Keksitty oikeanlainen matriisi ensimmäiseen kohtaan, 2 p.
- Perusteltu, että ratkaisuja on äärettömästi, 4 p.
- Keksitty oikeanlainen matriisi toiseen kohtaan, 2 p.
- Perusteltu, että ratkaisuja ei ole, 4 p.

Kohta (b)

- Ryhdytty laskemaan tuloa $A(3I - A)$, 2 p.
- Käytetty matriisien laskusääntöjä oikein. Kaikkia välivaiheita ei tarvitse löytyä, 3 p.
- Käytetty oletusta, 2 p.
- Osoitettu, että $A(3I - A) = I$, 3 p. Jos lähdetty liikkeelle väitteestä, 1 p.
- Ryhdytty laskemaan tuloa $(3I - A)A$, 1 p.
- Käytetty matriisien laskusääntöjä oikein. Kaikkia välivaiheita ei tarvitse löytyä, 1 p.

4. (a) Aladdin lähtee matollaan palatsistaan kohti laskevaa aurinkoa. Tällöin hän ohjaa mattoaan suuntavektorilla $\bar{w} = (-5, -1, 2)$. Edettyään jonkin matkaa Aladdin tekee suorakulmaisen käännöksen ja päätyy aarreluolalle. Aarreluolan paikkavektori palatsista laskettuna on $\bar{v} = (-22, 20, 0)$.

   i. Määritä vektorin $\bar{v}$ projektio vektorin $\bar{w}$ virittämälle aliavaruudelle.

   ii. Selitä omin sanoin ja kuvin, millä tavoin edellisessä kohdassa laskettu projektio liittyy Aladdinin lentomatkaan.

   Muistin virkistys: $\text{proj}(\bar{v})_{\bar{w}} = \frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\bar{w}\cdot\bar{w}}\bar{w}$

   (b) Halutaan selvittää, muodostavatko eräät vektorit $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ ja $\bar{u}_3$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ kannan. Kun tutkitaan, voiko avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoria $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3)$ kirjoittaa vektoreiden $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ ja $\bar{u}_3$ lineaarikombinaationa, päädytään yhtälöryhmään, jonka kerroinmatriisin determinantti on -13. Onko kyseessä kanta? Selitä huolellisesti päättelysi välivaiheet.

Ratkaisuehdotus: (24 pistettä)

(a) i. (4 pistettä) Käyttämällä projektion kaavaa saadaan

$$\begin{aligned}\text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v}) &= \frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\bar{w}\cdot\bar{w}}\bar{w} = \frac{(-22,20,0)\cdot(-5,-1,2)}{(-5,-1,2)\cdot(-5,-1,2)}(-5,-1,2) = \frac{110-20+0}{25+1+4}(-5,-1,2)\\ &= \frac{90}{30}(-5,-1,2) = 3(-5,-1,2) = (-15,-3,6).\end{aligned}$$

ii. (8 pistettä) Laskettu projektio on sen pisteen paikkavektori $\bar{p}$, jossa Aladdin tekee suorakulmaisen käännöksen. Ensinnäkin $\bar{p}$ on kertomuksen mukaan lennon alkuperäisen suuntavektorin $\bar{w}$ suuntainen. Lisäksi käännöspaikasta aarreluolalle piirretty suuntajana $\bar{v} - \bar{p}$ on kertomuksen mukaan suorassa kulmassa alkuperäiseen suuntavektoriin $\bar{w}$ nähden. Täten $\bar{p}$ toteuttaa projektion määritelmän ehdot. (Tämän voisi selittää myös kuvan avulla.)

(b) (12 pistettä) Jos halutaan selvittää, muodostavatko vektorit kannan, on tutkittava yhtälöä $x_1\bar{u}_1 + x_2\bar{u}_2 + x_3\bar{u}_3 = \bar{w}$, missä $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Tästä yhtälöstä saadaan yhtälöryhmä, joka on mainittu tehtänannossa. Koska yhtälöryhmän matriisin determinantti ei ole nolla, matriisi on kääntyvä. Tämä puolestaan tarkoittaa sitä, että yhtälöryhmällä on täsmälleen yksi ratkaisu. Tästä seuraa, että jokainen avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektori voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla vektorien $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ ja $\bar{u}_3$ lineaarikombinaationa. Siten kyseessä on kanta.

Arviointiperusteet:

Kohta (a)

- Laskettu projektio oikein, 4 p.
- Pienet laskuvirheet eivät haittaa, mutta periaate pitä olla oikein.
- Todettu, että projektio kertoo, kuinka paljon Aladdin matkusti laskevan auringon suuntaan, 4 p.
- Perusteltu väite joko oikeanlaisella kuvalla tai selityksellä, 4 p.

Kohta (b)

- Kerrottu, millaista yhtälöä tutkitaan, 2 p.
- Kerrottu, kuinka matriisin kääntyvyys liittyy ratkaisujen lukumäärään, 3 p.
- Kerrottu, kuinka determinantti liittyy kääntyvyyteen, 3 p.
- Kerrottu, kuinka ratkaisujen lukumäärä liittyy siihen, että kaikki vektorit voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla annettujen vektoreiden lineaarikombinaationa, 2 p.
- Todettu, että kyseessä on kanta, 2 p.