

# Ennakkotiedon vaikutuksesta todennäköisyyteen

Jukka Kohonen

Helsingin yliopisto

Tieteen päivät 2015

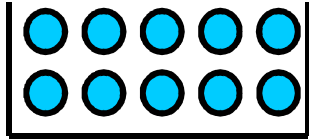
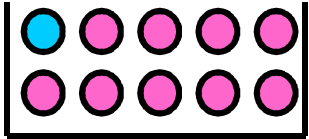
# Johdanto

- Käymme läpi kaksi esimerkkiä
  - Värillisiä palloja nostetaan laatikosta ([Bertrandin laatikko-ongelman](#) muunnelma)
  - Palkintoja ovien takana ([Monty Hallin ongelma](#))
- Kummassakin nähdään, että näennäisesti samassa tilanteessa saadaan **samalle tapahtumalle eri todennäköisyyksiä** riippuen siitä, mitä ennakkotietoa on käytettävissä.

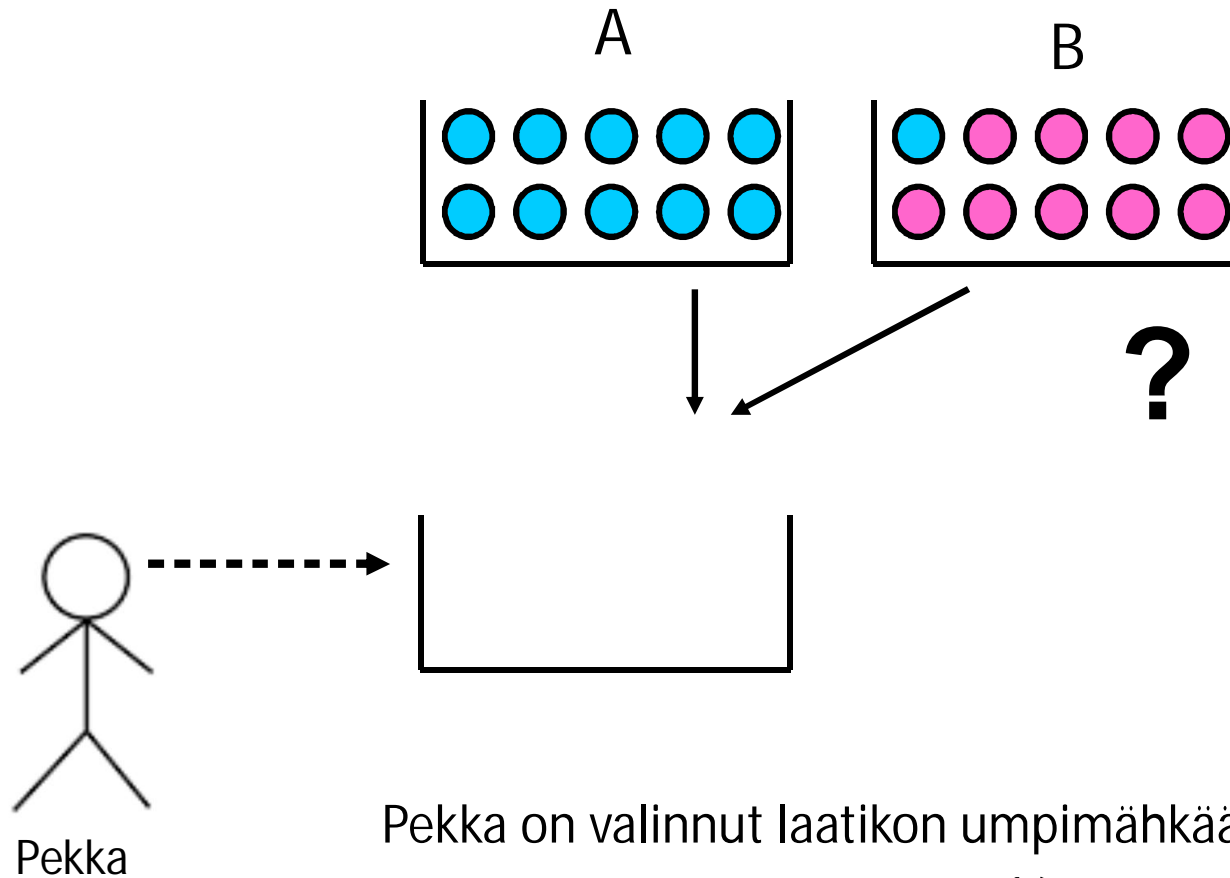
# Esimerkki 1

PALLOJA LAATIKOSTA

# Palloja laatikosta

- Asetelma: On kaksi laatikkoa  
–laatikko A: 10 sinistä palloa   
–laatikko B: 1 sininen ja 9 punaista palloa 
- Tilanne: Henkilöllä on käsissään jompikumpi laatikko.
- Tn, että kyseessä on laatikko A?
- Tn, että laatikosta umpimähkään nostettava pallo on sininen?

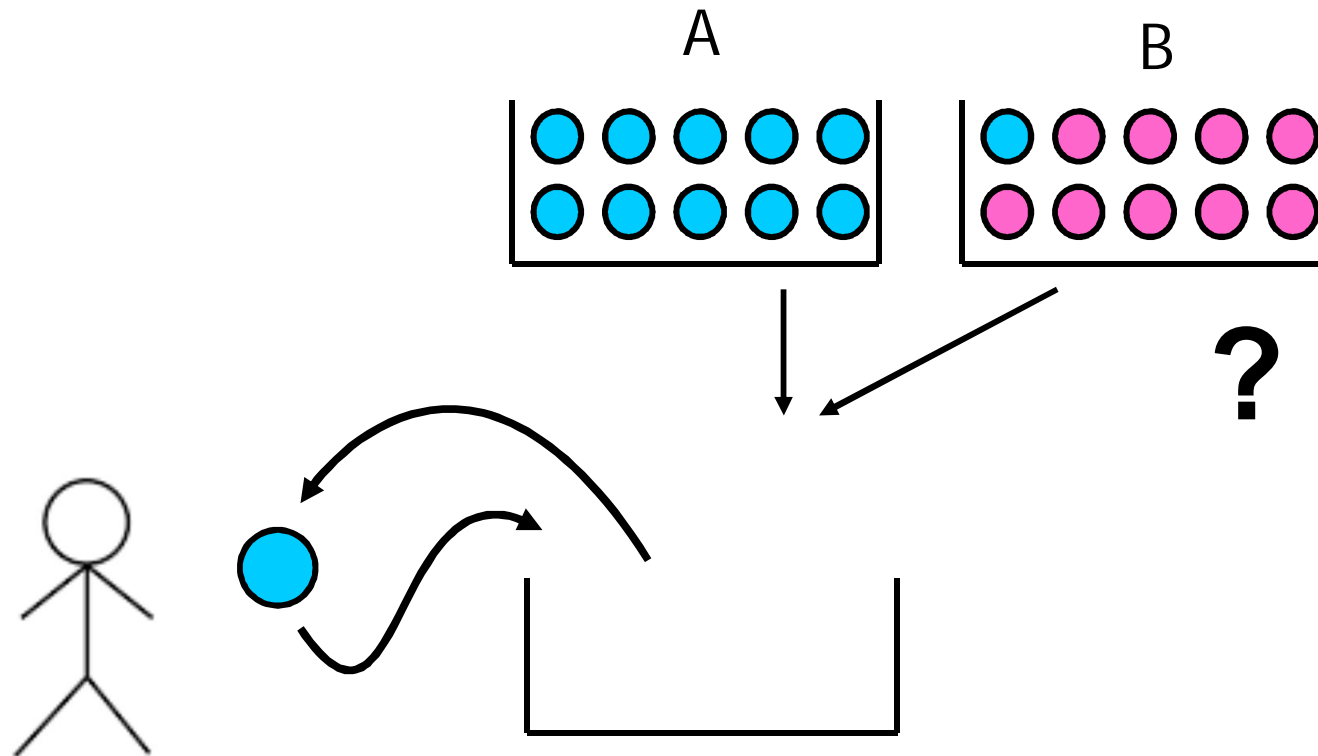
# Pekan tn, että laatikko on A?



Pekka on valinnut laatikon umpimähkään.

Kyseessä on A-laatikko tn:llä  $\frac{1}{2}$ .

# Mattin t'n, että laatikko on A?

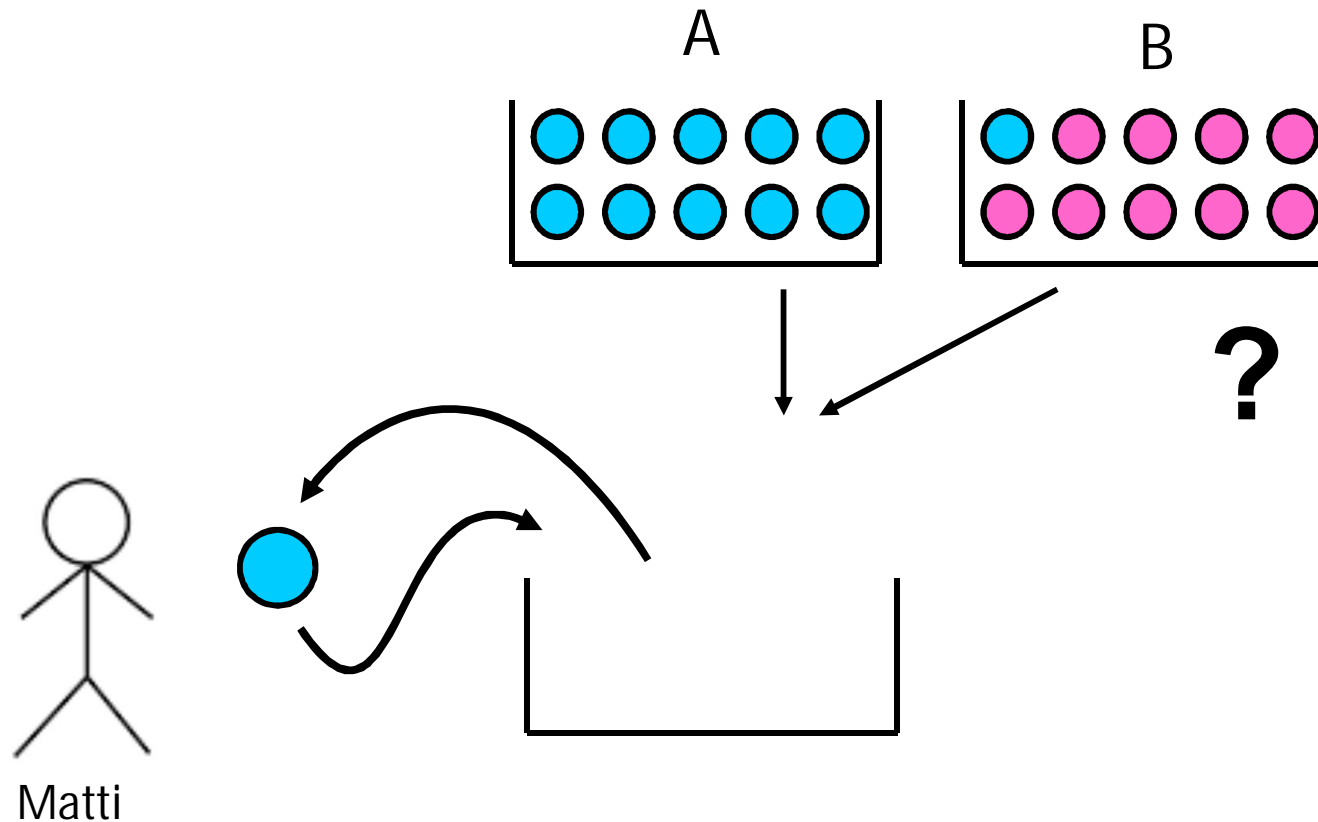


Matti

Matti on valinnut laatikon umpimähkään, nostanut sieltä pallon umpimähkään, nähnyt että se on sininen, ja pannut pallon takaisin.

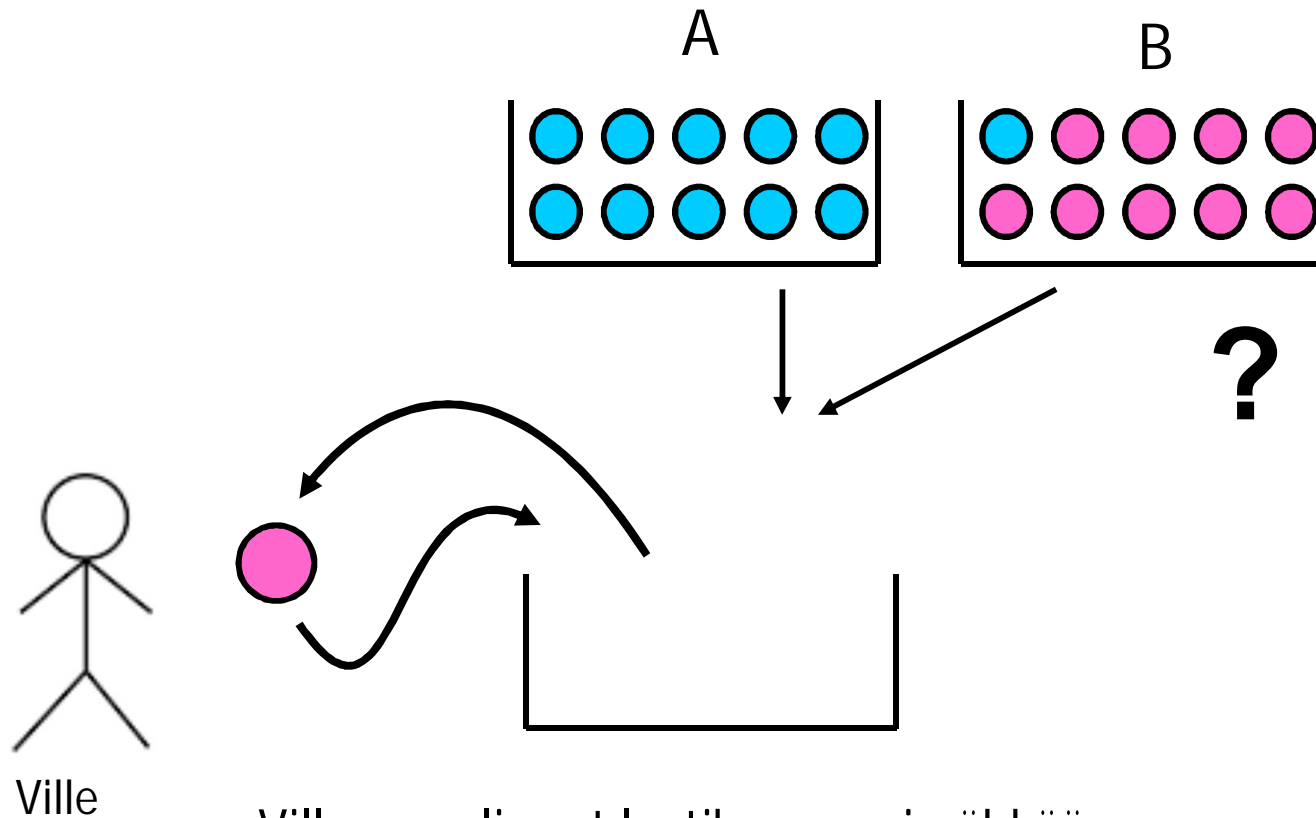
Arkijärki kertoo, että kyseessä on luultavasti laatikko A.  
(Jos laatikosta osuu umpimähkään käteen sininen pallo, niin...)

# Matin tn, että laatikko on A?



Bayesin kaava kertoo, että kyseessä on A-laatikko  
tn:llä  $10/11 \approx 0,91$ ,  
siis melko todennäköisesti (tulos sopii arkijärkeen).

# Villen tn, että laatikko on A?

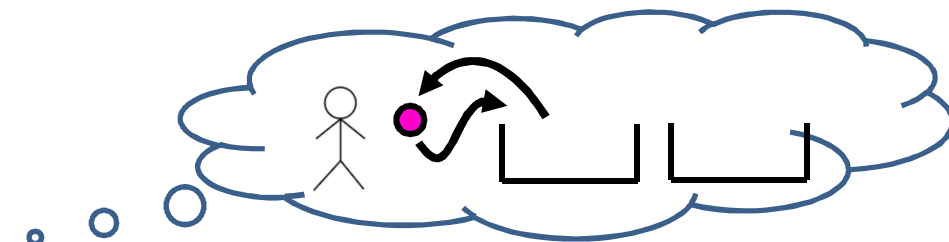
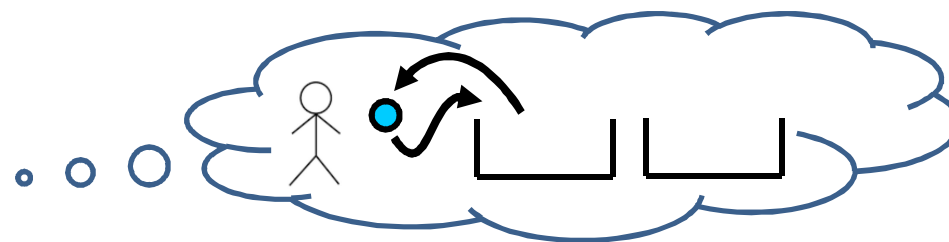
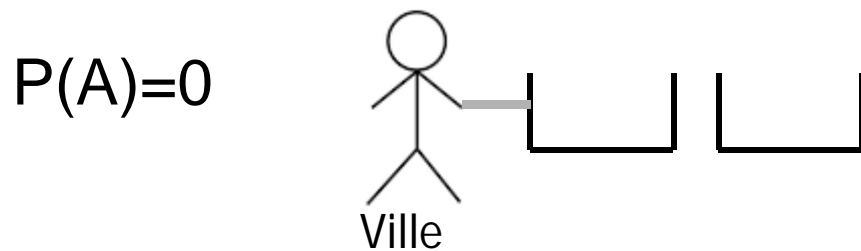
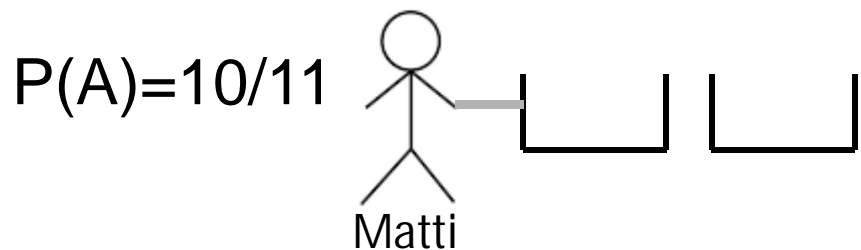
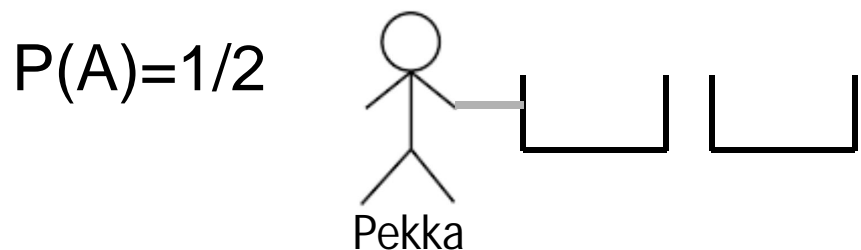


Ville on valinnut laatikon umpimähkään, nostanut sieltä pallon umpimähkään, nähnyt että se on punainen, ja pannut pallon takaisin.

Kyseessä on A-laatikko tn:llä  $0$ , koska A-laatikossa ei ole punaisia.



# Ulkonaisesti samanlaiset tilanteet — eri todennäköisyydet



eri tapahtumahistoriat

# Ennustetodennäköisyydet seuraavaksi nostettavalle pallolle

Pekka, Matti ja Ville ovat yhtä mieltä tästä:

Jos käsillä on laatikko A, sininen pallo tulee tn:llä 1 (varmasti).

Jos käsillä on laatikko B, sininen pallo tulee tn:llä 1/10.

Heillä on kullakin käsissään "jompikumpi laatikoista", ja laatikossa on 10 palloa. (Matti ja Ville nostivat kumpikin yhden pallon, mutta panivat sen takaisin.)

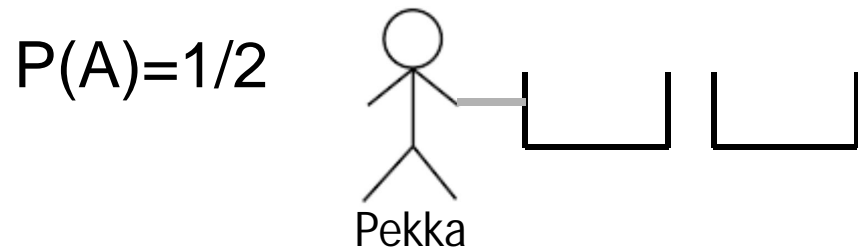
Tapahtumahistorian perusteella he asettavat eri todennäköisyydet sille, että käsillä on laatikko A.

Jos laatikosta aiotaan seuraavaksi nostaa yksi pallo umpimähkään, Pekka, Matti ja Ville laskevat aivan eri todennäköisyydet sille, että pallo tulee olemaan sininen.

Kuka heistä on oikeassa? He ovat kaikki oikeassa.

Eri todennäköisyydet ovat seurausta eri ennakkotiedoista.

# Pekka nostaa pallon umpimähkään. Millä tn:llä sininen?



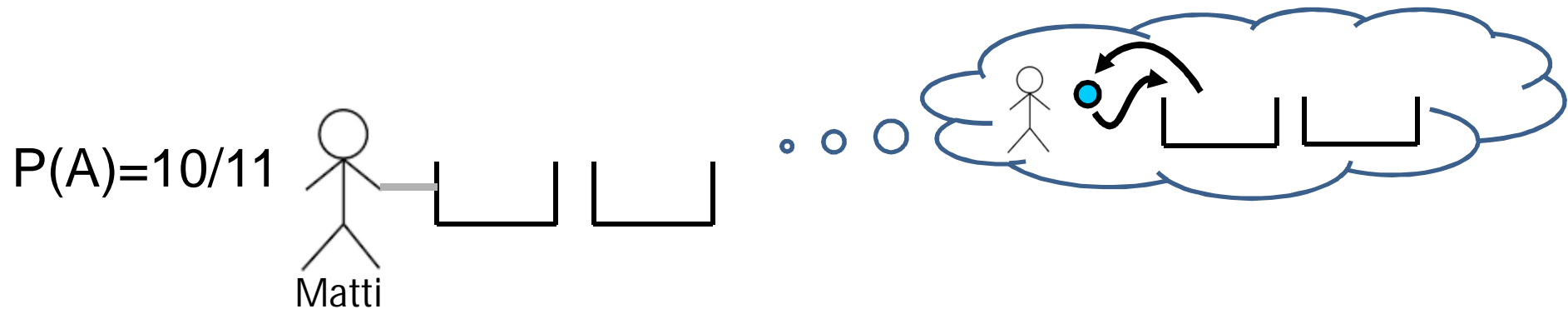
Jos käsillä on laatikko A, sininen pallo tulee tn:llä 1 (varmasti).  
Jos käsillä on laatikko B, sininen pallo tulee tn:llä 1/10.

Pekan tietojen perusteella laatikot ovat yhtä todennäköiset, joten hän laskee sinisen pallon todennäköisyydeksi

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{10}\right) = \frac{11}{20} = 0,55$$

(ns. kokonaistodennäköisyyden kaava).

# Matti nostaa uuden pallon umpimähkään. Millä tn:llä sininen?



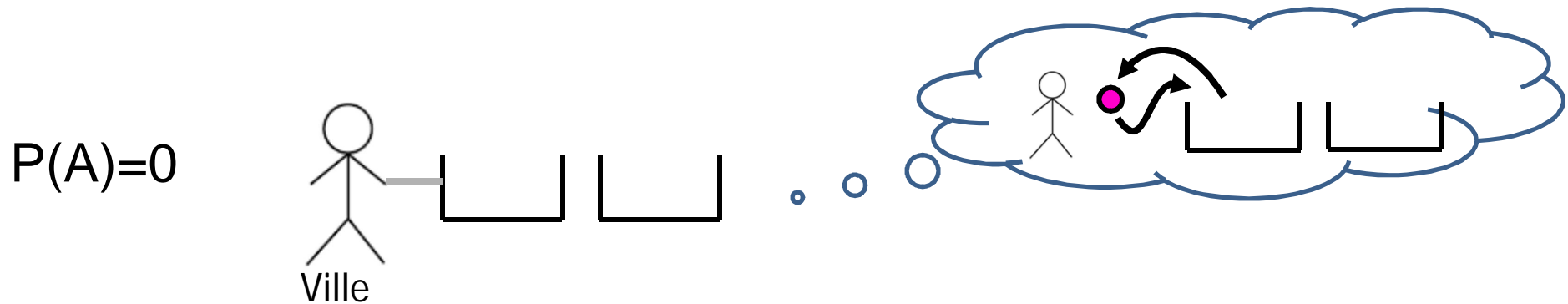
Matti laskee sinisen pallon todennäköisyyden samaan tapaan kuin Pekka, mutta hän antaa suuremman painon mahdollisuudelle, että laatikko on A:

$$(10/11) \cdot 1 + (1/11) \cdot (1/10) = 101/110 \approx 0,92$$

$\uparrow$   
P(A)

$\uparrow$   
P(B)

# Ville nostaa uuden pallon umpimähkään. Millä tn:llä sininen?

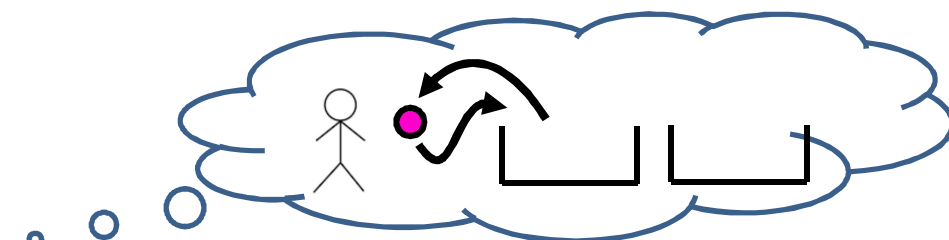
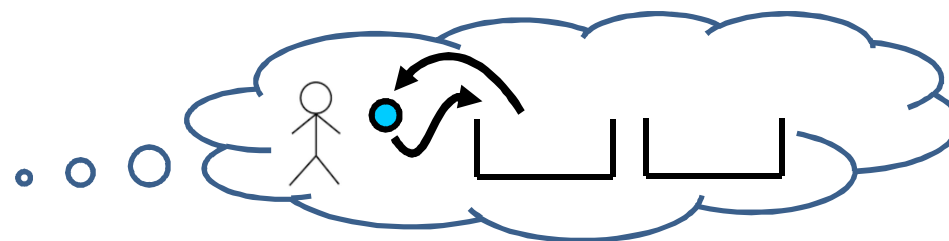
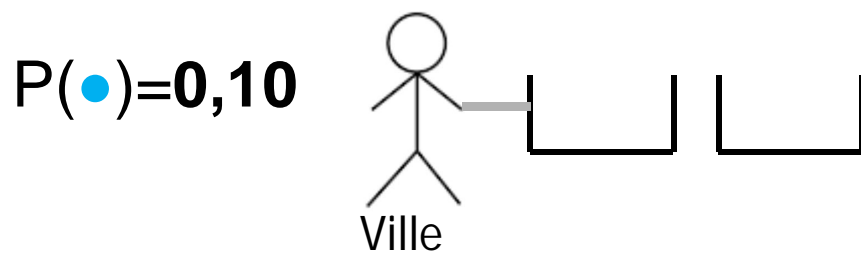
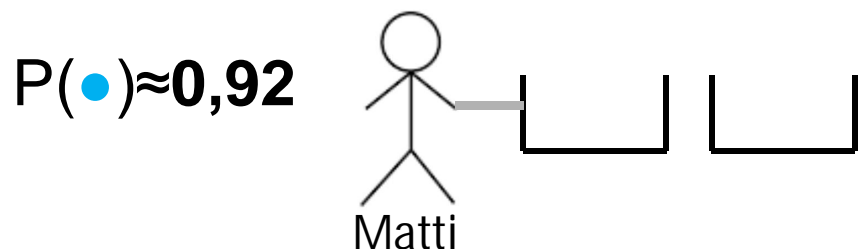
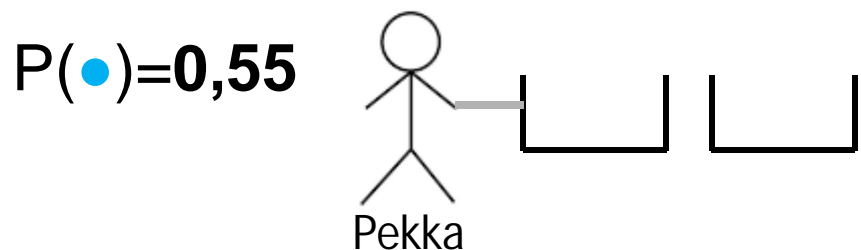


Myös Ville laskee samaan tapaan, mutta hänellä  $P(A)=0$ , koska laatikosta oli saatu punainen pallo.

$$0 \cdot 1 + 1 \cdot (1/10) = 1/10 = 0,10$$

$\uparrow$   $P(A)$        $\uparrow$   $P(B)$

# Ulkonaisesti samanlaiset tilanteet — eri todennäköisyydet



eri tapahtumahistoriat

# Esimerkki 2

MONTY HALLIN ONGELMA:  
PALKINTOJA OVIEN TAKANA



Monty Hall,  
amerikkalainen  
tv-showisäntä



*Let's Make a Deal*issa osallistujille tarjottiin monenlaisia valintatilanteita:

Vaihdatko tunnetun, pienen palkinnon tuntemattomaan, mahdollisesti suureen palkintoon (auto)?

Tuntematon palkinto voikin osoittautua epätoivotuksi (esim. vuohi tai laama, kuten kuvassa).



# "Monty Hallin ongelma"

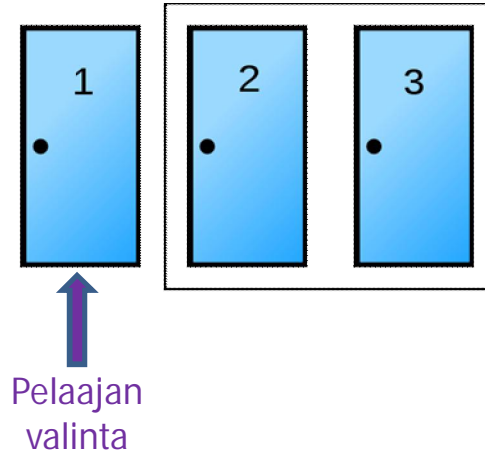
- Tv-shown innoittama todennäköisyyspähkinä v. 1975 *The American Statistician* -lehdessä
- Sittemmin tuli kuuluisaksi, kun vuonna 1990 viikkolehti *Paradessa* esiteltiin kyseinen ongelma ja sen oikea vastaus...

... jonka jälkeen toimitukseen tuli tuhansia lukijakirjeitä, joissa oltiin eri mieltä vastauksesta!



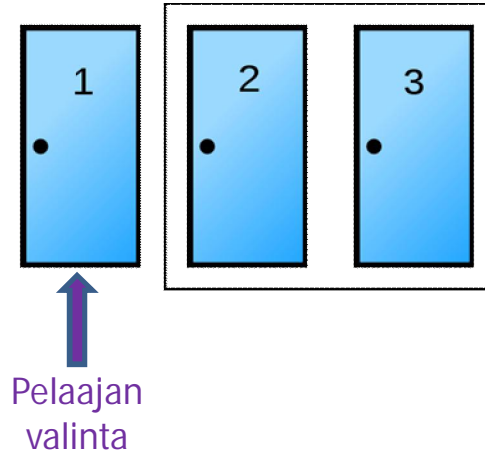
# Pelin säännöt

1. Aluksi on kolme suljettua ovea. Yhden takana on auto, kahdessa vuohi. Juontaja tietää missä auto on.
2. Pelaaja saa **valita** yhden oven (kuvassa ovi 1), mutta ovia ei avata vielä.

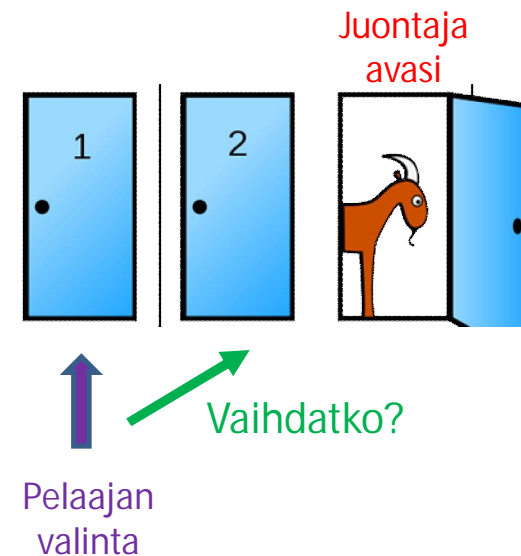


# Pelin säännöt

1. Aluksi on kolme suljettua ovea. Yhden takana on auto, kahdessa vuohi. Juontaja tietää missä auto on.
2. Pelaaja saa **valita** yhden oven (kuvassa ovi 1), mutta ovia ei avata vielä.



3. Juontaja valitsee kahdesta muusta ovesta sellaisen, jossa on vuohi, ja **avaa** sen (kuvassa ovi 3).
4. Nyt jäljellä on kaksi suljettua ovea: pelaajan alun perin valitsema (1), ja toinen (2). Hän saa **vaihtaa** ovea, jos haluaa.



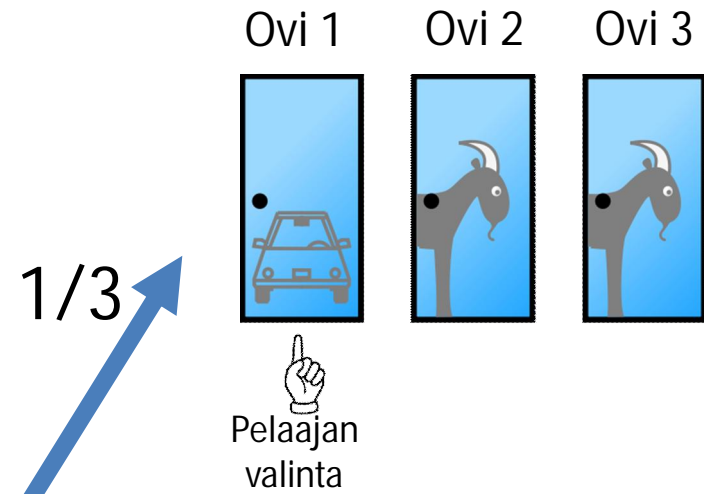
Millä tn:llä auto on oven 1 takana?  
Entä oven 2?

# Analyysi

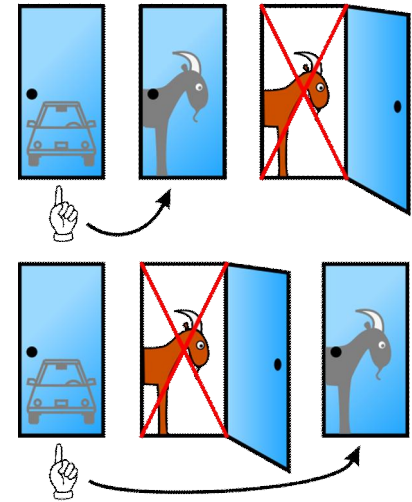
- Oletetaan, että pelaaja on valinnut oven 1.  
(Muut kaksi tapausta lasketaan aivan samaan tapaan.)
- Auto voi yhtä hyvin olla oven 1, 2 tai 3 takana, koska pelaajalla ei ole siitä mitään tietoa.

Ts. kunkin mahdollisuuden todennäköisyys on  $1/3$ .

- Käsitellään nämä kolme mahdollista tapausta yksitellen.



Auto on valitulla ovella 1.  
 Juontaja avaa joko oven 2 tai 3  
 ja paljastaa sieltä vuohen.  
 Kummassakin tapauksessa:  
 Vaihtamalla häviää.



1/3

1/3

1/3

Ovi 1

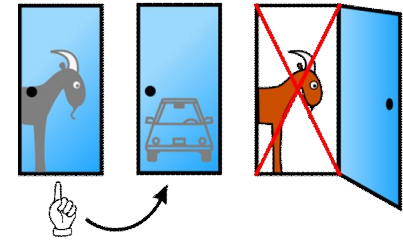
Ovi 2

Ovi 3

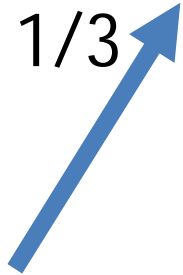


  
Pelaajan  
valinta

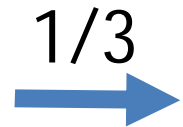
Auto ovella 2  
(ja pelaaja valitsi 1).  
Juontajan pakko avata ovi 3.  
Vaihtamalla voittaa auton.



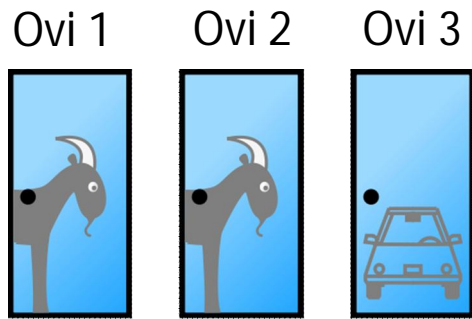
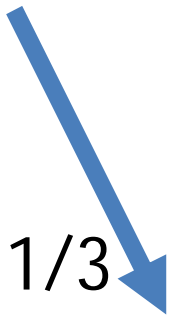
1/3



1/3

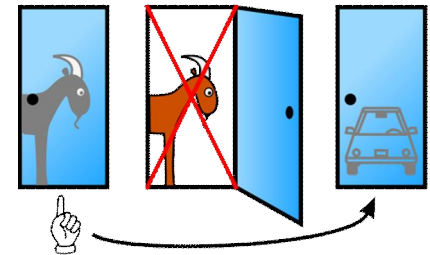


1/3

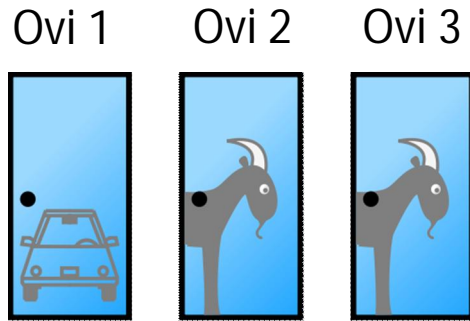


Pelaajan  
valinta

Auto ovella 3  
(ja pelaaja valitsi 1).  
Juontajan pakko avata ovi 2.  
**Vaihtamalla voittaa auton.**

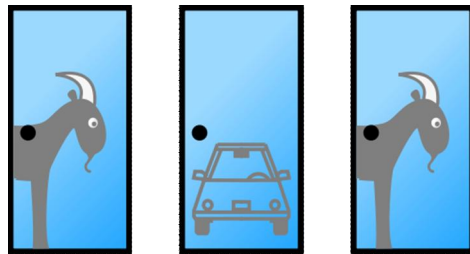


1/3

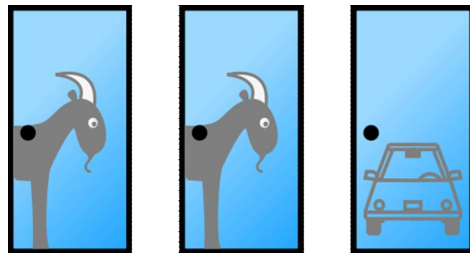


Pelaajan  
valinta

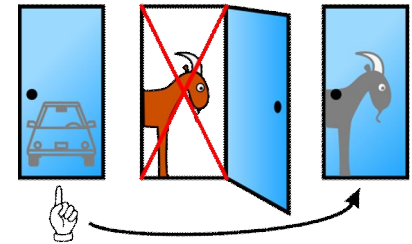
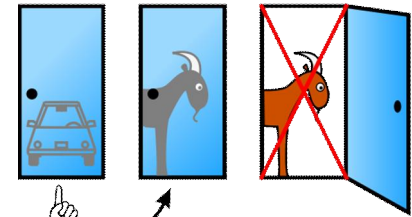
1/3



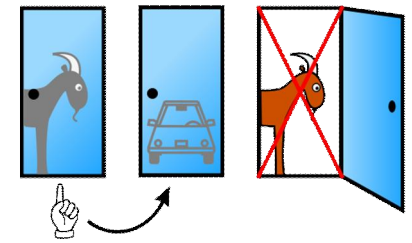
1/3



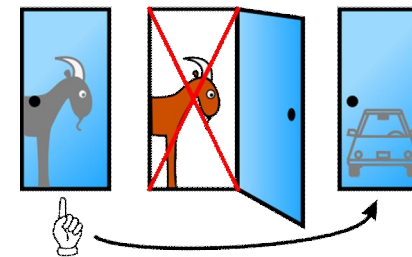
Auto ovella 1  
(jonka pelaaja valitsi).  
Juontaja avaa joko oven 2 tai 3  
ja paljastaa vuohen.  
Kummassakin tapauksessa:  
Vaihtamalla saa vuohen.



Auto ovella 2  
(ja pelaaja valitsi 1).  
Juontajan pakko avata ovi 3.  
Vaihtamalla voittaa auton.



Auto ovella 3  
(ja pelaaja valitsi 1).  
Juontajan pakko avata ovi 2.  
Vaihtamalla voittaa auton.





# Yhteenveto

Kun pelaaja valitsi alun perin oven 1:

Toden- näköisyys	Auto ovella	Juontaja avaa oven	Tulos, jos pysyy ovesa 1	Tulos, jos vaihtaa ovea
1/3	1	2 tai 3	AUTO	vuohi
1/3	2	3	vuohi	AUTO
1/3	3	1	vuohi	AUTO

- Todennäköisyydellä 1/3 pelaaja **valitsi oikean oven** → saa auton jos ei vaihda.  
Todennäköisyydellä 2/3 pelaaja **valitsi väärän oven** → saa auton jos vaihtaa.

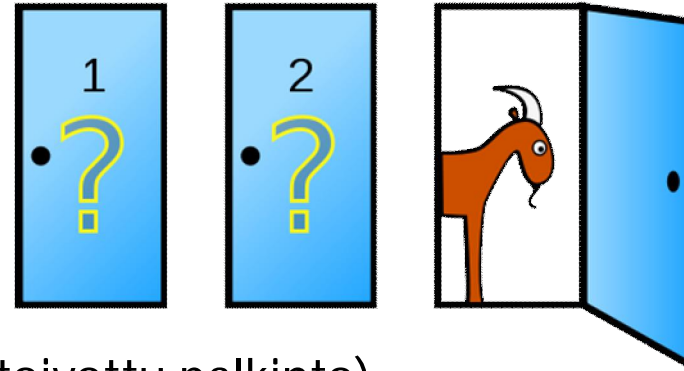
**Kannattaa siis vaihtaa ovea**, sillä silloin palkintoauton saamisen todennäköisyys kasvaa 1/3:stä 2/3:een!

- Tulos saattaa vaikuttaa yllättävältä (mistä todisteena tuhannet lukijakirjeet), mutta se on laskennallisesti perusteltu. Se myös vastaa empiirisiä havaintoja, kun peliä pelataan toistuvasti.

# Mysteeri?

Kun juontaja on avannut oven,  
senhetkinen tilanne näyttää tältä.

Kaksi suljettua ovea ja yksi avonainen.



- Yhden suljetun oven takana on auto (= toivottu palkinto)
- Yhden suljetun oven takana on vuohi (= ei toivottu).
- Avonaisen oven takana on vuohi.

Saat valita kumman tahansa suljetun oven.

Eivätkö ovet 1 ja 2 ole aivan samassa asemassa (suljettuja)  
ja auto siten **yhtä todennäköisesti** kumman tahansa takana?

**Kyllä, jos muuta tietoa ei ole.**

Mutta pelissä on muuta tietoa: Tieto siitä, miten tässä näkyvään  
valintatilanteeseen päädyttiin. Pelaajan ja juontajan toiminta  
(prosessi) johtaa epätasaisiin todennäköisyyksiin 1/3 ja 2/3.

# Katso myös

[http://fi.wikipedia.org/wiki/Monty\\_Hallin\\_ongelma](http://fi.wikipedia.org/wiki/Monty_Hallin_ongelma)

[http://en.wikipedia.org/wiki/Monty\\_Hall\\_problem](http://en.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall_problem)

(ja sieltä kirjallisuusviitteitä)

Kokeile peliä esim. osoitteessa

<http://www.lintukoto.net/testit/ovi/>

Pelin jälkeen näet tilaston yli 500 000 pelikerrasta:

- Pelaajista, jotka vaihtoivat ovea 66,7 % sai auton.
- Pelaajista, jotka eivät vaihtaneet 33,4 % sai auton.

Vaihtamisella oli merkitystä aivan kuten äsken laskettiin!

# Muunnelmia

- Edellä lasketut todennäköisyydet perustuvat olennaisesti siihen, miten pelin oletettiin kulkevan, ts. miten valintatilanteeseen päädyttiin ja miksi.
- Jos pelin säännöt (prosessi) ovat erilaiset, voidaan taas saada näennäisesti samassa tilanteessa **eri todennäköisyydet** kuin edellä.
- Esim. juontaja avaakin umpimähkään jommankumman ovista 2 ja 3, ja avatun oven takana sattuu olemaan vuohi. Nytkin pelaajalle jää kaksi suljettua ovea, mutta nyt vaihtamisesta ei ole hyötyä!
- Tai juontaja tarjoaa vaihtomahdollisuuden vain, jos pelaaja on alun perin osunut autoon. Tällöin vaihtamisesta on haittaa!
- Nämä ja muita muunnelmia: ks. esim. engl. Wikipedian artikkelia *Monty Hall problem*.

# 52 kortin versio

- Ovien lukumäärän lisääminen voi helpottaa hahmottamista. Korvataan ovet pelikorteilla. Auton saa pataässällä.
- Sekoitetaan korttipakka ja pannaan kortit tarjolle.
- Pelaaja valitsee yhden korteista (mutta ei katso sitä).  
Todennäköisesti hänellä on väärä kortti! On vain  $1/52$  todennäköisyys, että hän osui umpimähkään pataässään.
- Jakaja katsoo kaikki muut 51 korttia ja poistaa (paljastaa) niistä 50 korttia, kuitenkin niin, että hän ei poista pataässää (jos sellainen tulee vastaan).
- Jäljelle jää kaksi korttia: Pelaajan alun perin valitsema, ja yksi muu kortti. Kannattaako pelaajan vaihtaa?

# Kiitos!

- Kysymyksiä?
- (Jos aikaa on, pelataan Lintukodon Monty Hallia muutama kerta eri strategioilla ja kerätään tilastoa auton saamisesta.  
Strategiat: "vaihda", "älä vaihda", "unohda tapahtumahistoria")