Tilastollinen päättely II, syksy 2015 – kevät 2016
Harjoitus 12 (23. ja 25. 2. 2016) Ratkaisut

Tehtävät 1–3 liityvät uskottavuusfunktioon perustuviin asymptoottisiin testeihin (monisteen jakso 5.6). **Tehtävät 4 ja 5** ovat kertausta testiteoriasta.

1. (Monisteen teht. 5.12.)

a) Olkoot $Y_1, \ldots, Y_n \sim P(\mu)$ $\perp\!\!\!\perp$. Johda uskottavuusosamäärän testisuureen $r(\mathbf{y})$ lauseke, kun testattavana on $H_0\colon \mu = \mu_0$.

b) Eräässä tienristeyksessä on pitkällä aikavälillä sattunut keskimäärin 7.2 onnettomuutta kuukaudessa. Risteykseen asennetaan liikennevalot. Sitä seuraavan vuoden aikana sattuu yhteensä 60 onnettomuutta. Testaa uskottavuusosamäärän testiä ja χ^2-approksimaatiota käyttämällä, voidaanko valojen asentamisen katsoa vaikuttaneen onnettomuuksien määrään. Oletetaan, että onnettomuuksien lukumäärä kuukaudessa on Poisson-jakautunut. Kääntöpuolella on χ^2-jakauman taulukko.

Ratkaisu. a) Kurssilla on aiemmin todettu, että $\hat{\mu} = \overline{y}$ ja

$$\ell(\mu; \mathbf{y}) = -n\mu + n\overline{y}\log(\mu).$$

Kurssimonisteen kohdan 5.6.2 mukaisesti uskottavuusosamäärän testisuure on

$$\begin{aligned} r(\mathbf{y}) &= 2\left[\ell(\hat{\mu}; \mathbf{y}) - \ell(\mu_0; \mathbf{y})\right] \\ &= 2n\left[\mu_0 - \hat{\mu} + \overline{y}\log\left(\frac{\hat{\mu}}{\mu_0}\right)\right] \\ &= 2n\left[\mu_0 - \overline{y} + \overline{y}\log\left(\frac{\overline{y}}{\mu_0}\right)\right]. \end{aligned}$$

b) Oletetaan, että onnettomuuksien määrät eri kuukausina ovat riippumattomia toisistaan. Asetetaan nollahypoteesi $H_0 : \mu = 7.2$ ja $H_1 : \mu \neq 7.2$. Havaintoja on 12 ja niiden keskiarvo on $\overline{y} = 60/12 = 5$. Sijoittamalla arvot a-kohdassa johdettuun testisuureeseen saadaan $r(\mathbf{y}) \approx 9.04$. Uskottavuusosamäärän testisuure on likimain χ^2_1-jakautunut, joten

$$p = P_{\mu=7.2}\left(r(\mathbf{Y}) \geq r(\mathbf{y})\right) \approx 0.0026.$$

Nollahypoteesi voidaan siis hylätä kaikilla tavanomaisilla merkitsevyystasoilla.

2. Jatkoa edelliseen tehtävään. Johda a-kohdan mallissa Waldin testisuureen ja Raon testisuureen lausekkeet ja sovella niitä b-kohdan aineistoon.

Ratkaisu. Kurssilla on aiemmin todettu, että

$$i(\mu_0) = \mathrm{E}(-\ell''(\mu_0; \mathbf{Y})) = \frac{nE(\overline{Y})}{\mu_0^2} = \frac{n}{\mu_0}.$$

Kurssimonisteen kohdan 5.6.5 mukaisesti Waldin testisuure (käyttäen Fisherin informaatiota nollahypoteesipisteessä) on

$$w(\mathbf{y}) = i(\mu_0)\left(\hat{\mu} - \mu_0\right)^2$$

johon sijoittamalla edellisessä tehtävässä lasketut arvot $\mu_0 = 7.2$ ja $\hat{\mu} = \overline{y} = 5$ saadaan testisuureen arvoksi

$$w(\mathbf{y}) = \frac{12}{7.2}\left(5 - 7.2\right)^2 \approx 8.07.$$

Waldin testillä p-arvoksi saadaan noin 0.0045, jolloin nollahypoteesi edelleen hylkäytyy kaikilla tavanomaisilla merkitsevyystasoilla. Testi olisi voitu tehdä käyttäen myös Fisherin informaatiota suurimman uskottavuuden pisteessä $\hat{\theta}$ tai havaittua informaatiota.

Raon testisuuretta varten tarvitaan log-uskottavuusfunktion ensimmäinen derivaatta

$$\ell'(\mu_0; \mathbf{y}) = -n + \frac{n\overline{y}}{\mu_0}.$$

Kurssimonisteen kohdan 5.6.6 mukaisesti Raon testisuure on

$$\begin{aligned} u(\mathbf{y}) = \frac{\ell'(\mu_0; \mathbf{y})^2}{i(\mu_0)} = \frac{\left(-n + \frac{n\overline{y}}{\mu_0}\right)^2}{\frac{n}{\mu_0}} &= \frac{\mu_0}{n}\left(-n + \frac{n\overline{y}}{\mu_0}\right)^2 \\ &= \mu_0 n \left(\frac{\overline{y}}{\mu_0} - 1\right)^2 \\ &= \frac{n}{\mu_0}\left(\overline{y} - \mu_0\right)^2. \end{aligned}$$

Raon testisuure on siis tässä tapauksessa yhtäsuuri kuin Waldin testisuure, kun käytetään Fisherin informaatiota nollahypoteesipisteessä. Testisuureiden arvot ja testien p-arvot ovat siten kuten edellä ja johtavat samoihin päätelmiin molemmissa tapauksissa.

3. (Monisteen teht. 5.14.) Lue monisteen esimerkki 2.4.6. Oletetaan, että esimerkin a-asetelmassa saadaan otokseen ($n = 50$) genotyyppejä rr, rR ja RR vastaavasti 4, 20 ja 26 yksilöä. Laske parametrin θ suurimman uskottavuuden estimaatti ja testaa kaksisuuntaisella Waldin testillä nollahypoteesia $H_0\colon \theta = 0.2$.

Ratkaisu. Mallin log-uskottavuusfunktio l_a on annettu luentomonisteen esimerkissä, joten derivoimalla sitä parametrin θ suhteen voidaan ratkaista SU-estimaattori (monisteessa on laskettu myös toinen derivaatta, joka on aina negatiivinen ja siten derivaatan nollakohdassa on globaali maksimi)

$$\begin{aligned} l_a'(\theta; (y_1, y_2, y_3)) &= \frac{2y_1 + y_2}{\theta} + \frac{y_2 + 2y_3}{\theta - 1} = 0 \\ \Leftrightarrow \theta y_2 + 2\theta y_3 + 2\theta y_1 + \theta y_2 - 2y_1 - y_2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \theta &= \frac{2y_1 + y_2}{2(y_1 + y_2 + y_3)}. \end{aligned}$$

Sijoittamalla havainnot $y_1 = 4, y_2 = 20, y_3 = 26$ saadaan SU-estimaatiksi $\hat{\theta} = \frac{28}{100} = 0.28$. Waldin testisuure saadaan laskettua sijoittamalla monisteesta löytyvä Fisherin informaatio, nollahypoteesin mukainen parametrinarvon $\theta_0 = 0.2$ ja edellä laskettu SU-estimaattori testisuureen kaavaan

$$w(y_1, y_2, y_3) = i(\theta)(\hat{\theta} - \theta_0)^2 = \frac{2n}{\theta_0(1 - \theta_0)}(\hat{\theta} - \theta_0)^2 = \frac{100}{0.16} \cdot 0.08^2 = 4.$$

Käyttämällä χ_1^2-kertymäfunktiota saadaan p-arvoksi likimain 0.0455, joten nollahypoteesi voidaan hylätä merkitsevyystasolla $\alpha = 0.05$.

4. Pekka testaa malliin $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}; \theta)$ liittyviä hypoteeseja $H_0\colon \theta = \theta_0$ ja $H_1\colon \theta \neq \theta_0$ merkitsevyystasolla 0.01. Mikäli H_0 ei tule hylätyksi aineiston $\mathbf{y}$ perusteella, hän kerää uuden riippumattoman aineiston ja tekee testin uudelleen. Hän jatkaa aineistojen keruuta niin kauan, kunnes H_0 tulee hylätyksi.

a) Olkoon N niiden aineistojen lukumäärä, jotka Pekka joutuu keräämään. Mitä jakaumaa N noudattaa? Mikä on sen odotusarvo?

b) Mikä on Pekan käyttämän ”testausmenettelyn” todellinen merkitsevyystaso, ts. millä todennäköisyydellä tosi H_0 tulee lopulta hylätyksi?

c) Mihin kurssilla käsiteltyyn aiheeseen tämä tehtävä mahtaa liittyä?

Ratkaisu. a) Todennäköisyys saada sellainen aineisto, että H_0 hylkäytyy merkitsevyystasolla 0.01 on

$$q = q(\theta) = \pi_{0.01}(\theta) = P_\theta(\mathbf{Y} \in C_{0.01}),$$

missä $C_{0.01}$ on käytettävän testisuureen indusoima kriittinen alue. Aineistot ovat toisistaan riippumattomia ja testi tehdään aina uudelleen kunnes nollahypoteesi hylkäytyy, joten

$$P(N = n) = (1 - q)^{n-1} q.$$

Siis N on geometrisesti jakautunut parametrilla q. Geometrisen jakauman ominaisuuksista tiedetään, että

$$E(N) = \frac{1}{q}.$$

b) Kun aineistonkeruu ja testi uusitaan uudelleen ja uudelleen nollahypoteesi hylkääntyy jossain vaiheessa todennäköisyydellä 1, sillä $\sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) = 1$.

c) Tehtävä liittyy valintakorjaukseen. Pekan toistaessa koetta kerta toisensa jälkeen ei todellinen merkitsevyystaso ole enää ensimmäisen testin jälkeen 0.01.

5. Vanha koetehtävä. Toistokokeessa (onnistumistodennäköisyys θ) suoritetaan 6 toistoa ja lasketaan onnistumisten lukumäärä k. Testattavana on $H_0 \colon \theta \geq 0.5$ vastaan $H_1 : \theta < 0.5$ ja testisuureena muuttuja k. Päätetään hylätä H_0 jos ja vain jos $k \leq 1$.

a) Missä tilanteessa tehdään hylkäämisvirhe? Entä hyväksymisvirhe?

b) Mikä on hylkäämisvirheen riski (todennäköisyys) suurimmillaan?

c) Laske voimafunktion arvot muutamassa välin $(0, 1)$ pisteessä ja hahmottele sen kuvaajaa.

Ratkaisu. a) Hylkäämisivirhe tehdään, kun H_0 hylätään vaikka se olisi tosi. Tässä tapauksessa siis jos k on 0 tai 1 ja $\theta \geq 0.5$. Hyväksymisvirhe tehdään, jos H_0 on epätosi, mutta nollahypoteesi silti hyväksytään. Tässä tapauksessa siis jos $k > 1$ ja $\theta < 0.5$.

b) $\mathrm{P}_\theta(K \leq 1) = (1 - \theta)^6 + 6\theta(1 - \theta)^5$ on aidosti vähenevä kaikilla θ, jotka ovat välillä $(0, 1)$, joten suurin todennäköisyys hylkäämisvirheelle saavutetaan kohdassa $\theta = 0.5$. Sijoittamalla saadaan $\mathrm{P}_{\theta=0.5}(K \leq 1) \approx 0.11$.

c)