Tilastollinen päättely II, syksy 2015 – kevät 2016
Harjoitus 11 (16. ja 18. 2. 2016)
Malliratkaisut

Kaikki tehtävät liittyvät testiteoriaan; lähinnä monisteen jaksoon 5.5.

1. Jatkoa harjoituksen 10 tehtäviin 3 ja 4. Muodosta 0.1-tasoisen voimafunktion lauseke ja hahmottele sen kuvaajaa erityisesti vastahypoteesialueella $\mu < 2$.

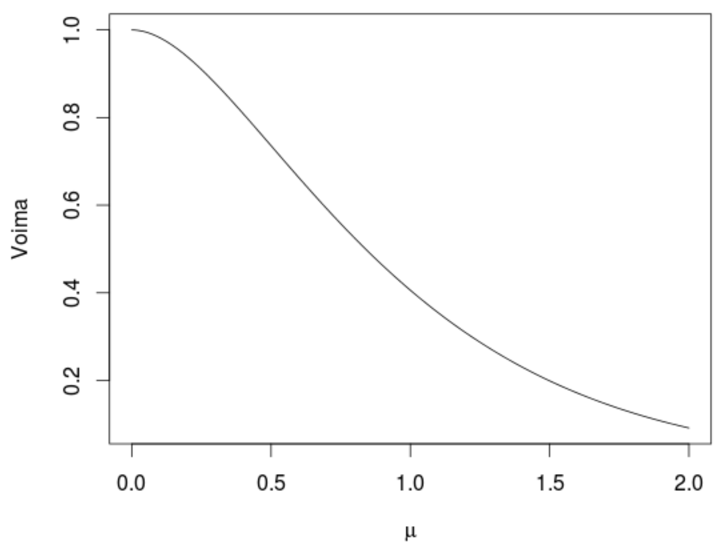
Ratkaisu 1

Harjoitusten 10 tehtävän 4 perusteella tiedetään, että testisuureen t arvoilla $t(\mathbf{y}) = 0$ ja $t(\mathbf{y}) = 1$ p-arvo jää alle merkitsevyystason $\alpha = 0.1$. Kriittinen alue on siis havaintoparit $\{\mathbf{y} : y_1 + y_2 \leq 1\}$ ja sitä vastaavat testisuureet ovat $\{t : t \leq 1\}$.

Tämän perusteella testin 0.1 tasoiseksi voimafunktioksi saadaan

$$\pi_{0.1}(\mu) = P_\mu(T \leq 1) = e^{-2\mu} \sum_{i=0}^{1} \frac{(2\mu)^i}{i!} = 2\mu e^{-2\mu} + e^{-2\mu}.$$

Alla olevassa kuvassa on esitetty saatu voimafunktio vastahypoteesialueella $\mu < 2$.



2. (Vrt. monisteen teht. 5.6.) Mallina on $Y_1, \ldots, Y_n \sim N(\mu, 1)$ ⫫. Opiskele monisteen esimerkistä 5.5.3, kuinka kaksisuuntaisen z-testin voimafunktio johdetaan, ja vastaa seuraaviin:

a) Testataan hypoteesia $H_0 \colon \mu = 0$ (tai $H_0 \colon \mu \leq 0$) vastaan $H_1 \colon \mu > 0$ yksisuuntaisella z-testillä ja merkitsevyystasolla 0.05. Johda tämän testin voimafunktio ja hahmottele karkeasti sen kuvaajaa. Vertaa sitä kaksisuuntaisen z-testin voimaan (kuva 5.2). Miksi kaksisuuntaisen testin voima on pienempi kuin yksisuuntaisen joukossa $\mu > 0$?

b) Millaiseen ongelmaan tai ongelmiin törmäät, jos yrität samalla tavalla muodostaa (yksi- tai kaksisuuntaisen) t-testin voimafunktion?

Apu. Tässä ja seuraavassa tehtävässä käytä normaalijakauman taulukoita tai verkosta löytyviä laskimia, esim. http://stattrek.com/online-calculator/normal.aspx.

Ratkaisu 2

a) Olkoon Z satunnaismuuttuja

$$Z = \frac{\overline{Y} - 0}{1/\sqrt{n}} = \overline{Y}\sqrt{n},$$

joka nollahypoteesin pätiessä noudattaa $N(0, 1)$-jakaumaa.

Palautetaan ensin mieleen kaksisuuntaisen testin voimafunktion johtaminen. Testin p-arvoksi saadaan kurssimonisteen määritelmän ja normaalijakauman symmetrisyyden nojalla

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{y}) &= P\{|Z| \geq |z|\} \\
&= P\{Z \leq -|z|\} + P\{Z \geq |z|\} \\
&= 2 \cdot P\{Z \geq |z|\} = 2[1 - P\{Z \leq |z|\}] = 2[1 - \Phi(|z|)].
\end{aligned}$$

Huomataan ensin, että $2[1 - \Phi(|z|)] \leq \alpha \Leftrightarrow |z| \geq \Phi^{-1}(1 - \alpha/2) = \Phi^{-1}(0.975) \approx 1.96$, kun merkitsevyystaso $\alpha = 0.05$. Tästä saadaan kriittinen alue

$$C_{0.05} = \{\mathbf{y} : p(\mathbf{y}) \leq \alpha\} = \{\mathbf{y} : |z| \geq 1.96\} = \{\mathbf{y} : |\overline{y}\sqrt{n}| \geq 1.96\}.$$

Voimafunktio on mallin oletusten ja annetun nollahypoteesin nojalla

$$\begin{aligned}
\pi_{0.05}(\mu) &= P(\mathbf{Y} \in C_{0.05}) \\
&= P(|\overline{Y}\sqrt{n}| \geq 1.96) \\
&= P(\overline{Y}\sqrt{n} \leq -1.96) + P(\overline{Y}\sqrt{n} \geq 1.96) \\
&= P((\overline{Y} - \mu)\sqrt{n} \leq -1.96 - \mu\sqrt{n}) + P((\overline{Y} - \mu)\sqrt{n} \geq 1.96 - \mu\sqrt{n}) \\
&= \Phi(-1.96 - \mu\sqrt{n}) + 1 - \Phi(1.96 - \mu\sqrt{n}).
\end{aligned}$$

Lasketaan vastaavasti yksisuuntaiselle testille p-arvo

$$p(\mathbf{y}) = P\{Z \geq z\} = 1 - P\{Z \leq z\} = 1 - \Phi(z).$$

Kuten edellä, havaitaan yhtäpitävyys $1 - \Phi(z) \leq \alpha \Leftrightarrow z \geq \Phi^{-1}(1 - \alpha) = \Phi^{-1}(0.95) \approx 1.64$, jonka avulla saadaan kriittinen alue $C_{0.05}$

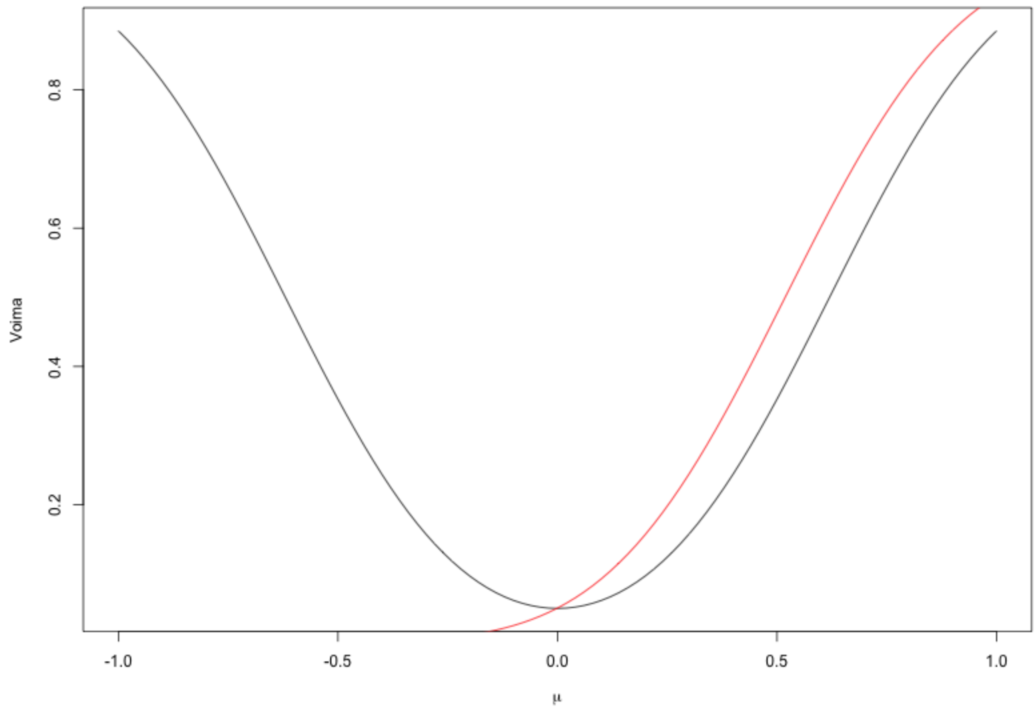
$$C_{0.05} = \{\mathbf{y} : p(\mathbf{y}) \leq \alpha\} = \{\mathbf{y} : 1 - \Phi(z) \leq \alpha\} = \{\mathbf{y} : \overline{y}\sqrt{n} \geq 1.64\}.$$

Voimafunktio on

$$\begin{aligned}
\pi_{0.05}(\mu) &= P(\mathbf{Y} \in C_{0.05}) \\
&= P(\overline{Y}\sqrt{n} \geq 1.64) \\
&= P((\overline{Y} - \mu)\sqrt{n} \geq 1.64 - \mu\sqrt{n}) \\
&= 1 - \Phi(1.64 - \mu\sqrt{n}).
\end{aligned}$$

Yksisuuntainen testi on voimakkaampi, mikäli $\mu > 0$. Tämä johtuu siitä, että kriittistä aluetta ei tarvitse jakaa kahdelle puolelle ja siten pienemmät poikkeamat riittävät hylkäämään nollahypoteesin.

Kuvassa on esitettynä voimafunktio otoskoolla n = 10. Mustalla viivalla esitettynä kaksisuuntaisen testin voima ja punaisella yksisuuntaisen.



b) Oletetaan nyt varianssi tuntemattomaksi ja lasketaan t-testisuure. Olkoon T satunnaismuuttuja

$$T = \frac{\overline{Y}}{S/\sqrt{n}},$$

joka nollahypoteesin pätiessä noudattaa jakaumaa t_{n-1}. Lasketaan tälle yksisuuntaisen testin p-arvo

$$p(\mathbf{y}) = P(T \geq t) = 1 - P(t_{n-1} \leq t).$$

Huomataan taas a-kohdan tapaan, että $1 - P(t_{n-1} \leq t) \Leftrightarrow t \leq t_{n-1}(1-\alpha) = t_{n-1}(0.95)$, joten kriittinen alue saadaan muotoon

$$C_{0.05} = \{\mathbf{y} : p(\mathbf{y}) \leq \alpha\} = \{\mathbf{y} : 1 - P(t_{n-1} \leq t) \leq \alpha\} = \left\{\mathbf{y} : \frac{\overline{y}}{s/\sqrt{n}} \geq t_{n-1}(0.95)\right\}.$$

Kirjoitetaan vielä voimafunktio niin pitkälle, kuin se helposti onnistuu:

$$\begin{aligned}\pi_{0.05}(\mu) &= P(\mathbf{Y} \in C_{0.05}) \\ &= P\left(\frac{\overline{Y}}{S/\sqrt{n}} \geq t_{n-1}(0.95)\right).\end{aligned}$$

Normaalijakauman tapauksessa tästä päästiin eteenpäin kertymäfunktion avulla. Testisuure T noudattaa kuitenkin epäkeskistä t-jakaumaa, kun nollahypoteesi ei päde. Epäkeskisen t-jakauman muoto riippuu parametrista μ, joten jakauman odotusarvon siirto nollaan ei johda tavalliseen keskiseen t-jakaumaan, eikä sen kertymäfunktiota voida siis käyttää.

Tilastollisen testauksen kannalta t-testin voiman selvittäminen on oleellinen kysymys ja voima voidaankin laskea pisteittäin tai sopivaa approksimaatiota käyttäen.

3. (Vrt. monisteen teht. 5.7.) Jatkoa edellisen tehtävän a-kohtaan. Kuinka suuri on havaintojen lukumäärän n oltava, jotta yksisuuntaisen testin voima pisteessä $\mu = 0.4$ olisi ≥ 0.9 (eli hyväksymisvirheen riski ko. pisteessä ≤ 0.1)? Entä jos halutaan voiman olevan ≥ 0.95 (eli hyväksymisvirheen riskin ≤ 0.05)?

Ratkaisu 3

Sijoittamalla tehtävänannon arvot edellisen tehtävän a-kohdassa johdettuun voimafunktioon saadaan

$$\pi_{0.05}(\mu) = 1 - \Phi(1.64 - 0.4\sqrt{n}\}) \geq 0.9 \Leftrightarrow n \geq \left(\frac{\Phi^{-1}(0.1) - 1.64}{-0.4}\right)^2 \approx 53.3.$$

Näin ollen riittävä otoskoko on 54, kun haluttu voima on 0.9. Vastaavalla laskulla saadaan riittäväksi otoskooksi 68, kun haluttu voima on 0.95.

4. Diskreetin satunnaismuuttujan Y jakauma riippuu parametrista θ, jolla on kolme mahdollista arvoa: 0, 1 ja 2. Vastaavat pistetodennäköisyydet on esitetty taulukossa alla.

y	1	2	3	4	5	6
$f_Y(y;0)$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.3	0.1
$f_Y(y;1)$	0.1	0.2	0.3	0.1	0.2	0.1
$f_Y(y;2)$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.3	0.3

Nollahypoteesi on $H_0\colon \theta = 0$. Luennolla laskettiin suhteet $f_Y(y;1)/f_Y(y;0)$ ja todettiin, että vastahypoteesille $H_1\colon \theta = 1$ merkitsevyystasolla 0.1 voimakkaimman testin kriittinen alue on $\{1, 2\}$.

a) Johda vastaavalla tavalla voimakkaimman testin kriittinen alue, jos vastahypoteesi on $H_1\colon \theta = 2$ ja merkitsevyystaso edelleen 0.1.

b) Laske kummankin testin voimafunktion arvot pisteissä $\theta = 1, 2$. Onko tässä olemassa tasaisesti voimakkainta testiä yhdistetylle vastahypoteesille $H_1\colon \theta \in \{1, 2\}$ merkitsevyystasolla 0.1?

Ratkaisu 4

a) Taulukoidaan testisuureen

$$v_2(y) = \frac{f_Y(y;2)}{f_Y(y;0)}$$

arvot ja tätä testisuuretta käyttäen lasketut p-arvot

$$p(y) = P_{\theta=0}\{v_2(Y) \geq v_2(y)\} :$$

Esimerkiksi havainnolla $y = 3$ testisuureen arvo on

$$v_2(3) = \frac{f_Y(3;2)}{f_Y(3;0)} = \frac{0.1}{0.2} = \frac{1}{2}$$

ja sitä vastaava p-arvo saadaan summaamalla niiden havaintojen todennäköisyydet, joiden testisuureen arvo on suurempaa tai yhtäsuurta kuin havainnon $y = 3$, eli

$$p(3) = P_{\theta=0}\{v_2(Y) \geq v_2(3)\} = 0.0 + 0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.1 = 0.7.$$

Muiden havaintojen kohdalla testisuureen arvot ja p-arvot saa samaan tapaan.

y	1	2	3	4	5	6
$f_Y(y;0)$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.3	0.1
$f_Y(y;1)$	0.1	0.2	0.3	0.1	0.2	0.1
$f_Y(y;2)$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.3	0.3
$v_2(y)$	∞	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1	3
$p(y)$	0	0.5	0.7	1	0.5	0.1

Kriittiseksi alueeksi merkitsevyystasolla 0.1 saadaan

$$C_{0.1} = \{y : p(y) \leq 0.1\} = \{y : v_2(y) \geq 3\} = \{1, 6\}.$$

Nyt

$$P_{\theta=0}\{v_2(Y) \geq 3\} = 0.1,$$

joten Neyman-Pearsonin apulauseen nojalla v_2 on voimakkain testisuure tehtävän hypoteeseille merkitsevyystasolla 0.1.

b) Taulukoidaan myös testisuureen

$$v_1(y) = \frac{f_Y(y;1)}{f_Y(y;0)}$$

arvot ja tätä testisuuretta käyttäen lasketut p-arvot

$$p(y) = P_{\theta=0}\{v_1(Y) \geq v_1(y)\} :$$

y	1	2	3	4	5	6
$f_Y(y;0)$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.3	0.1
$f_Y(y;1)$	0.1	0.2	0.3	0.1	0.2	0.1
$f_Y(y;2)$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.3	0.3
$v_1(y)$	∞	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
$p(y)$	0	0.1	0.3	1	0.7	0.4

Tämän testisuureen kriittinen alue merkitsevyystasolla 0.1 on

$$C_{0.1} = \{y : p(y) \leq 0.1\} = \{y : v_1(y) \geq 2\} = \{1, 2\},$$

ja

$$P_{\theta=0}\{v_1(Y) \geq 2\} = 0.1,$$

joten Neyman-Pearsonin apulauseen nojalla v_1 on voimakkain testisuure vastahypoteesille $H_1 : \theta = 1$ merkitsevyystasolla 0.1.

Testisuureen v_1 voima merkitsevyystasolla 0.1 on

$$\pi_{0.1}(\theta; v_1) = P_\theta\{v_1(Y) \geq 2\} = P_\theta\{Y = 1\} + P_\theta\{Y = 2\} = \begin{cases} 0.3 & \text{kun} \quad \theta = 1 \\ 0.2 & \text{kun} \quad \theta = 2, \end{cases}$$

ja testisuureen v_2 voima merkitsevyystasolla 0.1 on

$$\pi_{0.1}(\theta; v_2) = P_\theta\{v_2(Y) \geq 3\} = P_\theta\{Y = 1\} + P_\theta\{Y = 6\} = \begin{cases} 0.2 & \text{kun} \quad \theta = 1 \\ 0.4 & \text{kun} \quad \theta = 2. \end{cases}$$

Nämä voimafunktiot eivät riipu siitä, onko vastahypoteesi muotoa $H_1 : \theta = 1$, $H_1 : \theta = 2$, vai $H_1 : \theta \in \{1, 2\}$.

Oletetaan, että on olemassa tasaisesti voimakkain testisuure t yhdistetylle vastahypoteesille $H_1 : \theta \in \{1, 2\}$ merkitsevyystasolla 0.1, ja osoitetaan, että se on mahdoton.

Testin kriittiselle alueelle on oltava

$$P_{\theta=0}\{Y \in C_{0.1}\} \leq 0.1,$$

joten kysymykseen tulevat kriittiset alueet ovat

$$\{1\}, \{2\}, \{6\}, \{1, 2\}, \text{ja} \{1, 6\}.$$

Koska kyseessä on tasaisesti voimakkain testisuure, pätee erityisesti

$$\pi_{0.1}(1; t) \geq \pi_{0.1}(1; v_1) = 0.3,$$

joten ylläolevista vaihtoehdoista ainoa, joka täyttää ehdon

$$\pi_{0.1}(1; t) = P_{\theta=1}\{Y \in C_{0.1}\} \geq 0.3$$

on $\{1, 2\}$.

Edelleen, koska kyseessä on tasaisesti voimakkain testisuure, on oltava

$$\pi_{0.1}(2; t) \geq \pi_{0.1}(2; v_2) = 0.4.$$

Mutta koska edellisten tarkastelujen nojalla on oltava $C_{0.1} = \{1, 2\}$,

$$\pi_{0.1}(2; t) = P_{\theta=2}\{Y \in \{1, 2\}\} = 0.2 < 0.4.$$

Tässä testiasetelmassa ei siis ole olemassa tasaisesti voimakkainta testisuuretta.

5. (Monisteen teht. 5.10.) Toistokoemallin $K \sim \text{Bin}(n, \theta)$ parametrina on $\theta \in (0, 1)$. Tarkastellaan hypoteeseja $H_0\colon \theta = \theta_0$ ja $H_1\colon \theta = \theta_1$, jossa $\theta_0 < \theta_1$. Osoita uskottavuusosamäärää tutkimalla eli Neyman–Pearson-apulauseen avulla, että voimakkain testi saadaan testisuureesta k. Järkeile myös, että kyseessä on tasaisesti voimakkain testi yhdistetylle vastahypoteesille $H_1\colon \theta > \theta_0$.

Vihje. Muokkaa uskottavuusosamäärää niin, että saat näkyviin suhteet $\theta_0/(1 - \theta_0)$ ja $\theta_1/(1 - \theta_1)$.

Ratkaisu 5

Uskottavuusosamäärän testisuure on

$$v(k) = \frac{f_K(k; \theta_1)}{f_K(k; \theta_0)} = \frac{\binom{n}{k}\theta_1^k(1 - \theta_1)^{n-k}}{\binom{n}{k}\theta_0^k(1 - \theta_0)^{n-k}} = \left(\frac{1 - \theta_1}{1 - \theta_0}\right)^n \left[\frac{\theta_1/(1 - \theta_1)}{\theta_0/(1 - \theta_0)}\right]^k$$

Koska $(1 - \theta_0) \in]0, 1[$ ja $(1 - \theta_1) \in]0, 1[$, niin uskottavuusosamäärän $v(k)$ testisuureesta k riippumaton osa $[(1-\theta_1)/(1-\theta_0)]^n$ on aina positiivinen. Funktio $g(\theta) = \theta/(1-\theta)$ on aidosti kasvava välillä $]0, 1[$, joten $g(\theta_1)/g(\theta_0) > 1$ ja $\gamma(k) = [g(\theta_1)/g(\theta_0)]^k$ on aidosti kasvava k:n funktio, kun $\theta_1 > \theta_0$. Näin ollen uskottavuusosamäärän testisuure $v(k)$ on aidosti kasvava testisuureen k funktio (tämä on todistettu harjoituksen 10 tehtävässä 1).

Neyman-Pearson apulauseen perusteella v on voimakkain testi tietyillä saavutettavissa olevilla merkitsevyystasoilla, eli voimakkain testi löydetään ainoastaan tietyille merkitsevyystasoille α. Mielivaltaiselle merkitsevyystasolle $\alpha \in]0, 1[$ pystytään löytämään myös voimakkain testi, jos otetaan käyttöön ns. satunnaistetut testit. Tällä kurssilla ei kuitenkaan käsitellä kyseisiä testejä.

Uskottavuusosamäärä $v(k)$ on luentomonisteen kappaleen 5.5.6 perusteella monotoninen, sillä

(1) se riippuu aineistosta k vain tunnusluvun $t(k) = k$ välityksellä ja

(2) se on tunnusluvun $t(k) = k$ aidosti kasvava funktio kaikilla $\theta_0, \theta_1 \in]0, 1[$, joille $\theta_0 < \theta_1$.

Tunnusluku $t(k) = k$ on siis tasaisesti voimakkain testisuure mille tahansa yksinkertaiselle nollahypoteesille $H_0 : \theta = \theta_0$ ja yksisuuntaiselle yhdistetylle vastahypoteesille $H_1 : \theta > \theta_0$. Nollahypoteesille kriittisiä arvoja ovat testisuureen k suuret arvot. Huom! Tässäkin tapauksessa tasaisesti voimakkain testi löydetään vain tietyille merkitsevyystasoille α (jos ei käytetä satunnaistettuja testejä).