Tilastollinen päättely II, syksy 2015 – kevät 2016
Harjoitus 10 (9. ja 11. 2. 2016) Ratkaisut

Kaikki tehtävät liittyvät testiteoriaan; keskeisimmin monisteen jaksoihin 5.2–5.4.

1. Olkoon $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y};\theta)$ jokin tilastollinen malli ja $H_0\colon \theta \in \Omega_0$ siihen liittyvä hypoteesi, jota voidaan testata testisuureella $t = t(\mathbf{y})$ (suuret arvot H_0:lle kriittisiä). Olkoon g jokin aidosti kasvava funktio, ja määritellään $u = u(\mathbf{y}) = g(t(\mathbf{y}))$. Perustele, että testisuuretta u käyttämällä saadaan samat p-arvot ja samat kriittiset alueet kuin t:tä käyttämällä. Sanomme tällöin, että testisuureet t ja u ovat *ekvivalentit.*

Ratkaisu. Merkitään $T = t(Y)$, jolloin $g(T) = u(Y)$. Määritelmän mukaan p-arvo on todennäköisyys p, jolle pätee

$$p = \sup_{\theta\in\Omega_0} P_\theta \left\{T \geq t(y)\right\},$$

kun testisuureen suuret arvot ovat nollahypoteesin kannalta kriittisiä. Nyt tehtävän oletusten mukaan kuvaus g on aidosti kasvava, joten

$$T \geq t(y) \Leftrightarrow g(T) \geq g(t(y)).$$

Siten

$$P_\theta \left\{T \geq t(y)\right\} = P_\theta \left\{g(T) \geq g(t(y))\right\},$$

mistä väite seuraa ottamalla supremum puolittain θ:n suhteen.

2. Normaalijakauman testien kertaus (monisteen teht. 5.3). Kemiantehtaassa kone annostelee erästä kemikaalia kanistereihin. Oletetaan, että kerralla annostellun kemikaalin määrä (litroina) noudattaa normaalijakaumaa. Pyrkimyksenä on säätää kone siten, että keskimääräinen annos μ on 10 ja keskihajonta σ korkeintaan 0.2. Tutkittiin 20 kanisteria ja havaittiin, että niissä oli kemikaalia keskimäärin $\overline{y} = 9.86$ (litraa), keskihajonnan ollessa $s = 0.25$. Testaa kaksisuuntaisella t-testillä ja yksisuuntaisella χ^2-testillä, onko kone säädön tarpeessa. Käytä 5 %:n merkitsevyystasoa.

Ratkaisu. Oletetaan siis, että havainnot noudattavat mallia $Y_1, \ldots, Y_n \sim N(\mu, \sigma^2) \perp\!\!\!\perp$, jossa μ ja σ^2 ovat tuntemattomia parametreja. Nollahypoteesi keskiarvolle on $H_0 : \mu = 10$ ja vastahypoteesi $H_1 : \mu \neq 10$.

Käytetään t-testisuuretta T, jolle nollahypoteesin pätiessä pätee

$$T = \frac{\bar{Y} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1},$$

ja jonka suuret ja pienet arvot todistavat nollahypoteesia vastaan. Sijoittamalla luvut kaavaan saadaan p-arvoksi

$$\begin{aligned}
p &= P_{H_0} \left\{|T| \geq |t|\right\} \\
&= 2 \cdot (1 - P\left\{t_{n-1} < |t|\right\}) \\
&= 2 \cdot \left(1 - P\left\{t_{19} \leq \left|\frac{9.86 - 10}{0.2/\sqrt{20}}\right|\right\}\right) \\
&= 2 \cdot (1 - P\left\{t_{19} \leq 2.50\right\}) \approx 0.022 < 0.05.
\end{aligned}$$

Nollahypoteesi voidaan siis hylätä merkitsevyystasolla $\alpha = 0.05$, mikä merkitsee sitä, että kone on tältä osin säädön tarpeessa.

Testataan seuraavaksi χ^2-testillä nollahypoteesia $H_0 : \sigma \leq 0.2$, jolle vastahypoteesiksi tulee $H_1 : \sigma > 0.2$. Tunnetusti

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1},$$

joten

$$\begin{aligned} p &= P_{\sigma=0.2}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \geq \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\right\} \\ &= 1 - P\left\{\chi^2_{19} \leq \frac{19 \cdot 0.25^2}{0.2^2}\right\} \\ &= 1 - P\left\{\chi^2_{19} \leq 29.69\right\} \approx 0.056 > 0.05, \end{aligned}$$

eli p-arvo jää hieman merkitsevyystason yläpuolelle, eikä nollahypoteesia voida hylätä. Keskihajonnan puolesta kone ei siis ole säätöä vailla.

3. (Vrt. monisteen teht. 5.5.) Olkoot Y_1 ja Y_2 kaksi riippumatonta havaintoa Poissonin jakaumasta $P(\mu)$. Testataan hypoteesia $H_0\colon \mu = 2$ (tai $\mu \geq 2$) vastaan $H_1\colon \mu < 2$. Testisuureena on $T = Y_1 + Y_2 \sim P(2\mu)$.

a) Millaiset testisuureen arvot todistavat H_0:aa vastaan ja H_1:n puolesta: pienet vai suuret?

b) Laske testisuureen havaittuja arvoja $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ ja $t = 3$ vastaavat p-arvot.

Ratkaisu.

a) Testisuureen pienet arvot puhuvat vaihtoehtoisen hypoteesin H_1 puolesta ja siten nollahypoteesia vastaan. Tämä johtuu siitä, että mikäli nollahypoteesi pitäisi paikkansa, olisi epätodennäköistä saada erityisen pieniä arvoja.

b) Nollahypoteesin mukaan $\mu = 2$. Lasketaan p-arvot suoraan kurssimonisteen määritelmän mukaan hyödyntäen testisuureen eli $P(2\mu) = P(4)$-jakauman kertymäfunktiota F_T:

$$\begin{aligned} p(t=0) &= P_{\mu=2}(T \leq 0) = F_T(0) = e^{-4} \approx 0.0183, \\ p(t=1) &= P_{\mu=2}(T \leq 1) = F_T(1) = 5e^{-4} \approx 0.0916, \\ p(t=2) &= P_{\mu=2}(T \leq 2) = F_T(2) = 13e^{-4} \approx 0.238. \\ p(t=3) &= P_{\mu=3}(T \leq 3) = F_T(3) = (13 + \frac{32}{3})e^{-4} \approx 0.433. \end{aligned}$$

4. Jatkoa edelliseen tehtävään.

c) Mitkä t:n arvot johtavat H_0:n hylkäämiseen ja H_1:n hyväksymiseen merkitsevyystasolla $\alpha = 0.1$? Mitkä havaintoparit (y_1, y_2) kuuluvat vastaavaan kriittiseen alueeseen?

d) Jos toimitaan merkitsevyystasolla $\alpha = 0.1$, niin missä tilanteessa tehdään hylkäämisvirhe ja missä hyväksymisvirhe? (Ts. mitkä μ:n arvot ja t:n arvot tai aineistot (y_1, y_2) johtavat näihin virheisiin?)

e) Onko olemassa mitään sellaista aineistoa (y_1, y_2), jonka havaitessasi voisit *varmuudella* sanoa, että H_0 pätee tai vastaavasti että se ei päde?

Ratkaisu.

c) Edellisen tehtävän tuloksia tarkastelemalla havaitaan, että p-arvo jää alle merkitsevyystason $\alpha = 0.1$ jos ja vain jos havaitaan arvo $t(\mathbf{y}) = 0$ tai $t(\mathbf{y}) = 1$. Tästä seuraa, että havaintoparit (y_1, y_2) kuuluvat kriittiseen alueeseen, jos ja vain jos pätee $y_1 + y_2 \leq 1$, eli $(0,0), (0,1)$ ja $(1,0)$.

d) Nollahypoteesilla $\mu = 2$ ja merkitsevyystasolla $\alpha = 0.1$ hylkäämisvirhe tehdään edellä esitettyjen laskujen perusteella silloin, kun todellinen parametrinarvo on $\mu \geq 2$ ja havaitaan $t(\mathbf{y}) \leq 1$. Hyväksymisvirhe taas tehdään vastaavasti, kun $\mu < 2$ ja havaitaan $t(\mathbf{y}) > 1$.

e) Ei, sillä olipa $\mu > 0$ mikä tahansa, niin $\mathrm{P}(Y_i = k) = e^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!} > 0$ kaikilla $k = 0, 1, \ldots$. Toisin sanoen jakauman alusta on aina $\{0, 1, \ldots\}$, joten mitkä tahansa havaintoparit (y_1, y_2) ovat mahdollisia kaikilla μ:n arvoilla.

5. Pöydän kummallakin sivulla on kolme tuolia ja lisäksi kummassakin päässä yksi tuoli. Sosiologi tekee satunnaiskokeen, jossa hän antaa neljästä miehestä ja neljästä naisesta koostuvan ryhmän istuutua pöydän ympärille heidän haluamallaan tavalla.

a) Satunnaismuuttuja Y kertoo pöydän päissä istuvien miesten lukumäärän (sen mahdolliset arvot ovat siis 0, 1 ja 2). Johda Y:n pistetodennäköisyysfunktio ja laske sen odotusarvo sekä varianssi olettaen, että henkilöt valitsevat paikkansa täysin satunnaisesti.

b) Sosiologi toistaa satunnaiskokeen 100 kertaa toisistaan riippumattomasti valituille koehenkilöiden ryhmille (kussakin neljä miestä ja neljä naista). Satunnaismuuttuja Y_i kertoo pöydän päissä istuvien miesten lukumäärän i:nnessä kokeessa ja $T = Y_1 + \cdots + Y_{100}$. Oletetaan, että T:n arvoksi havaitaan $t = 120$. Testaa nollahypoteesia, jonka mukaan miesten ja naisten hakeutumisella päätypaikoille ei ole eroa.

Ratkaisu.

a) Oletetaan, että henkilöt valitsevat paikkansa täysin satunnaisesti ja $k \in \{0, 1, 2\}$. Päätypaikoille voidaan valita k miestä $\binom{4}{k}$ tavalla, jolloin jäljelle jäävät $2 - k$ päätypaikkaa voidaan jakaa naisten kesken $\binom{4}{2-k}$ tavalla. Tapaukselle $Y = k$ suotuisia istumajärjestyksiä on siis $\binom{4}{k}\binom{4}{2-k}$ kappaletta. Yhteensä kahdeksan hengen joukosta voidaan valita kaksi henkilöä päätypaikoille $\binom{8}{2} = 28$ tavalla. Tästä päädytään (hypergeometrisen jakauman) pistetodennäköisyysfunktioon

$$f_Y(k) = \frac{\binom{4}{k}\binom{4}{2-k}}{\binom{8}{2}},$$

missä $k = 0, 1, 2$. Sijoittamalla saadaan

$$P(Y = 0) = f_Y(0) = \frac{\binom{4}{0}\binom{4}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14},$$

josta symmetrisyyden nojalla

$$P(Y = 2) = f_Y(2) = \frac{3}{14}$$

ja

$$P(Y = 1) = f_Y(1) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 2) = 1 - \frac{6}{14} = \frac{8}{14}.$$

Odotusarvo satunnaismuuttujalle Y voidaan laskea kaavasta

$$\mathrm{E}(Y) = \sum_{k=0}^{2} k f_Y(k) = 1.$$

Vastaavasti toinen origomomentti saadaan kaavasta

$$\mathrm{E}(Y^2) = \sum_{k=0}^{2} k^2 f_Y(k) = \frac{24}{28} + \frac{16}{28} = \frac{40}{28} \approx 1.43,$$

joten $\mathrm{var}(Y) = 12/28 \approx 0.43$.

b) Nollahypoteesin mukaan satunnaismuuttujien Y_i jakauma on kuten edellisessä kohdassa ja oletuksen nojalla Y_i:t ovat riippumattomia. Keskeisen raja-arvolauseen nojalla nollahypoteesin voimassaollessa

$$Z_n := \sqrt{\frac{n}{\mathrm{var}(Y_i)}} \left(n^{-1} \sum_{i=1}^{n} Y_i - \mathrm{E}(Y_i) \right) \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1).$$

Sijoittamalla edellä lasketut luvut saadaan

$$z = \sqrt{\frac{100}{12/28}} \left(\frac{120}{100} - 1 \right) \approx 3.06,$$

josta standardinormaalijakauman kertymäfunktion avulla voidaan laskea p-arvo tai havaita suoraan, että

$$p = P_{H_0} \{|Z| \geq |z|\} = 2 \cdot P\{Z \geq |z|\} \approx 0.0023,$$

joten nollahypoteesi hylätään kaikilla tavanomaisilla merkitsevyystasoilla.