

Tilastollinen päättely II, syksy 2015 – kevät 2016
Harjoitus 12 (23. ja 25. 2. 2016)

Tehtävät 1–3 liittyvät uskottavuusfunktioon perustuviin asymptoottisiin testeihin (monisteen jakso 5.6). **Tehtävät 4 ja 5** ovat kertausta testiteoriasta.

1. (Monisteen teht. 5.12.)

a) Olkoot $Y_1, \dots, Y_n \sim P(\mu)$ i.i.d. Johda uskottavuusosamäärän testisuureen $r(\mathbf{y})$ lauseke, kun testattavana on $H_0: \mu = \mu_0$.

b) Eräässä tienristeyksessä on pitkällä aikavälillä sattunut keskimäärin 7.2 onnettomuutta kuukaudessa. Risteykseen asennetaan liikennevalot. Sitä seuraavan vuoden aikana sattuu yhteensä 60 onnettomuutta. Testaa uskottavuusosamäärän testiä ja χ^2 -approksimaatiota käyttämällä, voidaanko valojen asentamisen katsoa vaikuttaneen onnettomuuksien määrään. Oletetaan, että onnettomuuksien lukumäärä kuukaudessa on Poisson-jakautunut. Kääntöpuolella on χ^2 -jakauman taulukko.

2. Jatkoa edelliseen tehtävään. Johda a-kohdan mallissa Waldin testisuureen ja Raon testisuureen lausekkeet ja sovelta niitä b-kohdan aineistoon.

3. (Monisteen teht. 5.14.) Lue monisteen esimerkki 2.4.6. Oletetaan, että esimerkin asetelmassa saadaan otokseen ($n = 50$) genotyyppisiä rr, rR ja RR vastaavasti 4, 20 ja 26 yksilöä. Laske parametrin θ suurimman uskottavuuden estimaatti ja testaa kaksisuuntaisella Waldin testillä nollahypoteesia $H_0: \theta = 0.2$.

4. Pekka testaa malliin $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}; \theta)$ liittyviä hypoteeseja $H_0: \theta = \theta_0$ ja $H_1: \theta \neq \theta_0$ merkitsevyydellä 0.01. Mikäli H_0 ei tule hylätyksi aineiston \mathbf{y} perusteella, hän kerää uuden riippumattoman aineiston ja tekee testin uudelleen. Hän jatkaa aineistojen keruuta niin kauan, kunnes H_0 tulee hylätyksi.

a) Olkoon N niiden aineistojen lukumäärä, jotka Pekka joutuu keräämään. Mitä jakaumaa N noudattaa? Mikä on sen odotusarvo?

b) Mikä on Pekan käyttämän ”testausmenettelyn” todellinen merkitsevyydellä, ts. millä todennäköisyydellä tosi H_0 tulee lopulta hylätyksi?

c) Mihin kurssilla käsitellyyn aiheeseen tämä tehtävä mahtaa liittyä?

5. Vanha koetehtävä. Toistokokeessa (onnistumistodennäköisyys θ) suoritetaan 6 toistoa ja lasketaan onnistumisten lukumäärä k . Testattavana on $H_0: \theta \geq 0.5$ vastaan $H_1: \theta < 0.5$ ja testisuurena muuttuja k . Päätetään hylätä H_0 jos ja vain jos $k \leq 1$.

a) Missä tilanteessa tehdään hylkäämisvirhe? Entä hyväksymisvirhe?

b) Mikä on hylkäämisvirheen riski (todennäköisyys) suurimmillaan?

c) Laske voimafunktion arvot muutamassa välin $(0, 1)$ pisteessä ja hahmottele sen kuvaajaa.

Taulukossa alla on lueteltu jakauman $\text{Bin}(6, \theta)$ pistetodennäköisyydet eräillä θ :n arvoilla.

k	$\theta = 0.1$	$\theta = 0.2$	$\theta = 0.3$	$\theta = 0.4$	$\theta = 0.5$
0	.5314	.2621	.1176	.0467	.0156
1	.3543	.3932	.3025	.1866	.0938
2	.0984	.2458	.3241	.3110	.2344
3	.0146	.0819	.1852	.2765	.3125
4	.0012	.0154	.0595	.1382	.2344
5	.0001	.0015	.0102	.0369	.0938
6	.0000	.0001	.0007	.0041	.0156

Taulukko: χ^2_ν -jakauman u -alakovantiileja $q_\nu(u)$, joille $u = P(X < q_\nu(u))$, kun $X \sim \chi^2_\nu$.
Tässä ν on jakauman vapausasteluku.

$\nu \backslash u$	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999
1	0.000	0.000	0.000	0.001	0.004	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828
2	0.002	0.010	0.020	0.051	0.103	5.991	7.378	9.210	10.597	13.816
3	0.024	0.072	0.115	0.216	0.352	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266
4	0.091	0.207	0.297	0.484	0.711	9.488	11.143	13.277	14.860	18.467
5	0.210	0.412	0.554	0.831	1.145	11.070	12.833	15.086	16.750	20.515
6	0.381	0.676	0.872	1.237	1.635	12.592	14.449	16.812	18.548	22.458
7	0.598	0.989	1.239	1.690	2.167	14.067	16.013	18.475	20.278	24.322
8	0.857	1.344	1.646	2.180	2.733	15.507	17.535	20.090	21.955	26.124
9	1.152	1.735	2.088	2.700	3.325	16.919	19.023	21.666	23.589	27.877
10	1.479	2.156	2.558	3.247	3.940	18.307	20.483	23.209	25.188	29.588
11	1.834	2.603	3.053	3.816	4.575	19.675	21.920	24.725	26.757	31.264
12	2.214	3.074	3.571	4.404	5.226	21.026	23.337	26.217	28.300	32.909
13	2.617	3.565	4.107	5.009	5.892	22.362	24.736	27.688	29.819	34.528
14	3.041	4.075	4.660	5.629	6.571	23.685	26.119	29.141	31.319	36.123
15	3.483	4.601	5.229	6.262	7.261	24.996	27.488	30.578	32.801	37.697
16	3.942	5.142	5.812	6.908	7.962	26.296	28.845	32.000	34.267	39.252
17	4.416	5.697	6.408	7.564	8.672	27.587	30.191	33.409	35.718	40.790
18	4.905	6.265	7.015	8.231	9.390	28.869	31.526	34.805	37.156	42.312
19	5.407	6.844	7.633	8.907	10.117	30.144	32.852	36.191	38.582	43.820
20	5.921	7.434	8.260	9.591	10.851	31.410	34.170	37.566	39.997	45.315
21	6.447	8.034	8.897	10.283	11.591	32.671	35.479	38.932	41.401	46.797
22	6.983	8.643	9.542	10.982	12.338	33.924	36.781	40.289	42.796	48.268
23	7.529	9.260	10.196	11.689	13.091	35.172	38.076	41.638	44.181	49.728
24	8.085	9.886	10.856	12.401	13.848	36.415	39.364	42.980	45.559	51.179
25	8.649	10.520	11.524	13.120	14.611	37.652	40.646	44.314	46.928	52.620
26	9.222	11.160	12.198	13.844	15.379	38.885	41.923	45.642	48.290	54.052
27	9.803	11.808	12.879	14.573	16.151	40.113	43.195	46.963	49.645	55.476
28	10.391	12.461	13.565	15.308	16.928	41.337	44.461	48.278	50.993	56.892
29	10.986	13.121	14.256	16.047	17.708	42.557	45.722	49.588	52.336	58.301
30	11.588	13.787	14.953	16.791	18.493	43.773	46.979	50.892	53.672	59.703
31	12.196	14.458	15.655	17.539	19.281	44.985	48.232	52.191	55.003	61.098
32	12.811	15.134	16.362	18.291	20.072	46.194	49.480	53.486	56.328	62.487
33	13.431	15.815	17.074	19.047	20.867	47.400	50.725	54.776	57.648	63.870
34	14.057	16.501	17.789	19.806	21.664	48.602	51.966	56.061	58.964	65.247
35	14.688	17.192	18.509	20.569	22.465	49.802	53.203	57.342	60.275	66.619
36	15.324	17.887	19.233	21.336	23.269	50.998	54.437	58.619	61.581	67.985
37	15.965	18.586	19.960	22.106	24.075	52.192	55.668	59.893	62.883	69.346
38	16.611	19.289	20.691	22.878	24.884	53.384	56.896	61.162	64.181	70.703
39	17.262	19.996	21.426	23.654	25.695	54.572	58.120	62.428	65.476	72.055
40	17.916	20.707	22.164	24.433	26.509	55.758	59.342	63.691	66.766	73.402