

Tilastollinen päättely II, syksy 2015 – kevät 2016
Harjoitus 11 (16. ja 18. 2. 2016)

Kaikki tehtävät liittyvät testiteoriaan; lähinnä monisteen jaksoon 5.5.

1. Jatkoa harjoituksen 10 tehtäviin 3 ja 4. Muodosta 0.1-tasaisen voimafunktion lauseke ja hahmottele sen kuvaajaa erityisesti vastahypoteesialueella $\mu < 2$.

2. (Vrt. monisteen teht. 5.6.) Mallina on $Y_1, \dots, Y_n \sim N(\mu, 1) \perp$. Opiskele monisteen esimerkistä 5.5.3, kuinka kaksisuuntaisen z -testin voimafunktio johdetaan, ja vastaa seuraaviin:

a) Testataan hypoteesia $H_0: \mu = 0$ (tai $H_0: \mu \leq 0$) vastaan $H_1: \mu > 0$ yksisuuntaisella z -testillä ja merkitsevyystasolla 0.05. Johda tämän testin voimafunktio ja hahmottele karkeasti sen kuvaajaa. Vertaa sitä kaksisuuntaisen z -testin voimaan (kuva 5.2). Miksi kaksisuuntaisen testin voima on pienempi kuin yksisuuntaisen joukossa $\mu > 0$?

b) Millaiseen ongelmaan tai ongelmiin törmäät, jos yrität samalla tavalla muodostaa (yksi- tai kaksisuuntaisen) t -testin voimafunktion?

Apu. Tässä ja seuraavassa tehtävässä käytä normaalijakauman taulukoita tai verkosta löytyviä laskimia, esim. <http://stattrek.com/online-calculator/normal.aspx>.

3. (Vrt. monisteen teht. 5.7.) Jatkoa edellisen tehtävän a-kohtaan. Kuinka suuri on havaintojen lukumäärän n oltava, jotta yksisuuntaisen testin voima pisteessä $\mu = 0.4$ olisi ≥ 0.9 (eli hyväksymisvirheen riski ko. pisteessä ≤ 0.1)? Entä jos halutaan voiman olevan ≥ 0.95 (eli hyväksymisvirheen riskin ≤ 0.05)?

4. Diskreetin satunnaismuuttujan Y jakauma riippuu parametrilla θ , jolla on kolme mahdollista arvoa: 0, 1 ja 2. Vastaavat pistetodennäköisyydet on esitetty taulukossa alla.

y	1	2	3	4	5	6
$f_Y(y; 0)$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.3	0.1
$f_Y(y; 1)$	0.1	0.2	0.3	0.1	0.2	0.1
$f_Y(y; 2)$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.3	0.3

Nollahypoteesi on $H_0: \theta = 0$. Luennolla laskettiin suhteet $f_Y(y; 1)/f_Y(y; 0)$ ja todettiin, että vastahypoteesille $H_1: \theta = 1$ merkitsevyystasolla 0.1 voimakkaimman testin kriittinen alue on $\{1, 2\}$.

a) Johda vastaavalla tavalla voimakkaimman testin kriittinen alue, jos vastahypoteesi on $H_1: \theta = 2$ ja merkitsevyystaso edelleen 0.1.

b) Laske kummankin testin voimafunktion arvot pisteissä $\theta = 1, 2$. Onko tässä olemassa tasaisesti voimakkainta testiä yhdistetylle vastahypoteesille $H_1: \theta \in \{1, 2\}$ merkitsevyystasolla 0.1?

5. (Monisteen teht. 5.10.) Toistokoemallin $K \sim \text{Bin}(n, \theta)$ parametrina on $\theta \in (0, 1)$. Tarkastellaan hypoteeseja $H_0: \theta = \theta_0$ ja $H_1: \theta = \theta_1$, jossa $\theta_0 < \theta_1$. Osoita uskottavuusosamäärää tutkimalla eli Neyman–Pearson-apulauseen avulla, että voimakkain testi saadaan testisuureesta k . Järkeile myös, että kyseessä on tasaisesti voimakkain testi yhdistetylle vastahypoteesille $H_1: \theta > \theta_0$.

Vihje. Muokkaa uskottavuusosamäärää niin, että saat näkyviin suhteet $\theta_0/(1 - \theta_0)$ ja $\theta_1/(1 - \theta_1)$.