Tilastollinen päättely II, syksy 2015 – kevät 2016
Harjoitus 6 (8. ja 10. 12. 2015)

Tehtävät 1–4 liittyvät harhattomuuteen ja tehokkuuteen. Monisteen jaksot 3.2 ja 3.4.

1. Jatkoa harjoituksen 5 tehtävään 4. Tarkastellaan edelleen mallia $Y_1, \ldots, Y_n \sim \mathrm{Tas}(0, \theta) \perp\!\!\!\perp$ ja θ:n estimointia.

a) Totea, että estimaattori $\check{\theta} = \dfrac{n+1}{n}\hat{\theta}$ on harhaton.

b) Totea, että myös estimaattori $\tilde{\theta} = 2\overline{Y}$ on harhaton. (Tämä on momenttimenetelmän antama; ks. monisteen esim. 3.3.3.)

2. Jatkoa edelliseen tehtävään. Laske estimaattorien $\hat{\theta}$, $\check{\theta}$ ja $\tilde{\theta}$ keskineliövirheet ja vertaa niitä toisiinsa (kun $n > 2$). Kiinnitä erityisesti huomiota siihen, miten ne käyttäytyvät suurilla n:n arvoilla. (Vihjeitä kääntöpuolella.)

3. Jatkoa harjoituksen 5 tehtävään 2. Laske estimaattorien $\hat{\beta}$ ja T varianssit. Osoita, että $\hat{\beta}$ on tehokkaampi kuin T. (Apu kääntöpuolella.)

4. (Monisteen teht. 3.5.)

a) Palautetaan todennäköisyyslaskennasta mieleen, että jos $X_1, \ldots, X_k \sim N(0,1) \perp\!\!\!\perp$, niin $X_1^2 + \cdots + X_k^2$ noudattaa khii-toiseen-jakaumaa χ_k^2. Tarkista tämän avulla, että χ_k^2-jakauman odotusarvo on k, varianssi $2k$ ja toinen momentti $k^2 + 2k$. [*Muista.* Standardinormaalijakauman neljäs origomomentti on 3.]

b) Olkoot $Y_1, \ldots, Y_n \sim N(\mu, \sigma^2) \perp\!\!\!\perp$, ja määritellään V kuten harjoituksen 4 tehtävässä 3: $V = \sum_i (Y_i - \overline{Y})^2$. Todennäköisyyslaskennassa on opittu, että $V/\sigma^2 \sim \chi_{n-1}^2$. Näytä tämän tiedon ja a-kohdan perusteella, että σ^2:n estimaattorin cV keskineliövirhe on

$$E[(cV - \sigma^2)^2] = [(n^2 - 1)c^2 - 2(n-1)c + 1]\,\sigma^4.$$

Näytä sitten derivaattatarkastelun avulla, että se saa pienimmän arvonsa (c:n funktiona) täsmälleen pisteessä $c = 1/(n+1)$.

Opetus. Varianssin σ^2 estimaattoriksi on normaalijakaumamallissa siis ainakin kolme muotoa cV olevaa perusteltua kandidaattia: $V/(n-1)$ (harhaton), V/n (su) ja $V/(n+1)$ (pienin keskineliövirhe). Ei ole mahdollista yksiselitteisesti sanoa, mikä niistä on ”paras”, mutta $V/(n-1)$ on varmasti käytetyin.

Tehtävää 5 varten opiskele momenttimenetelmää koskeva monisteen jakso 3.3. Emme käsittele momenttimenetelmää varsinaisesti luennoilla, mutta aiheeseen liittyviä kysymyksiä voi esittää esim. ti 8. 12. ja to 10. 12.

5. Estimoi momenttimenetelmällä

a) parametri λ, kun $Y_1, \ldots, Y_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda) \perp\!\!\!\perp$,

b) parametri (α, β), kun $Y_1, \ldots, Y_n \sim G(\alpha, 1/\beta) \perp\!\!\!\perp$. (Kyseessä on gammajakauma, ks. monisteen liite. Vrt. myös harjoituksen 2 tehtävään 5a.)

KÄÄNNÄ!

Vihjeitä tehtävään 2: Aloita laskemalla $E(\hat{\theta}^2)$. Muista myös varianssin kaava $\mathrm{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$ sekä keskineliövirheelle johdettu hajotelma varianssin ja harhan avulla.

Apu tehtävään 3: Epäyhtälö $\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \leq n\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)$ lienee hyödyksi (Cauchyn ja Schwarzin epäyhtälön seuraus). Siinä yhtäsuuruus pätee vain jos $x_1 = \cdots = x_n$.

Huom. Ensimmäinen kurssikoe pidetään ke 16. 12. klo 12.00–14.30 Exactumin auditoriossa CK112. Kokeessa kuulustellaan monisteen jaksot 1.1–3.5 ja harjoitukset 1–6. ”Lunttilappu” sallitaan kokeessa; tarkempaa tietoa siitä kurssin kotisivulla. Kokeeseen liittyviä kysymyksiä voi esittää to 10. 12. luennolla.