Tilastollinen päättely II, syksy 2015 – kevät 2016
Harjoitus 3 (17. ja 19. 11. 2015)

Tehtävissä 1–3 käsitellään vielä uskottavuusfunktiota ja suurimman uskottavuuden estimointia. Luentomonisteen jaksot 2.1–2.3.

1. (Monisteen teht. 2.5.) Olkoon θ positiivinen parametri, ja asetetaan

$$f(y;\theta) = 2\theta^{-1} y \exp(-y^2/\theta), \qquad \text{kun } y > 0,$$

ja $f(y;\theta) = 0$, kun $y \leq 0$.

a) Tarkista integroimalla, että tämä kelpaa erään jatkuvan jakauman tiheysfunktioksi.

b) Oletetaan, että $Y_1, \ldots, Y_n$ ovat riippumattomia ja noudattavat kukin em. jakaumaa. Muodosta tämän mallin uskottavuusfunktio ja log-uskottavuusfunktio sekä määritä suurimman uskottavuuden estimaatti $\hat{\theta}$, kun aineisto on $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$.

2. (Vrt. monisteen teht. 2.15.) Tarkastellaan parametrin $\theta \in (0,1)$ *logit-muunnosta* $\phi = \phi(\theta) = \log\{\theta/(1-\theta)\}$.

a) Totea, että kyseessä on kääntäen yksikäsitteinen eli bijektiivinen funktio $(0,1) \to \mathbb{R}$, ja määritä käänteisfunktio $\theta = \theta(\phi)$. Hahmottele myös kuvaaja (θ, ϕ)-koordinaatistoon.

b) Toistokoemalli $Y_1, \ldots, Y_n \sim B(\theta) \perp\!\!\!\perp$ tai $K \sim \text{Bin}(n, \theta)$ uudelleenparametroidaan logit-muunnoksella. Johda syntyvän mallin log-uskottavuusfunktio $l^*(\phi)$ ja su-estimaatti $\hat{\phi}$.

Lisätieto. Ns. logistisessa regressiossa mallitetaan toistokokeen onnistumistodennäköisyyden logit-muunnosta joidenkin selittävien muuttujien avulla. Esimerkiksi $Y_1, \ldots, Y_n \perp\!\!\!\perp$, jossa $Y_i \sim B(\theta_i)$ ja $\phi(\theta_i) = \alpha + \beta x_i$, jolloin mallin parametri olisi pari (α, β). Tällaisia malleja tutkitaan yleistettyjen lineaaristen mallien kurssilla.

3. Palautetaan mieleen JTP-kurssilta, miten parametria θ koskevaa päättelyä tehdään bayesläisittäin: θ:lle määritellään priorijakauma (ptf/tf) $p(\theta)$ ja jos $L(\theta) = L(\theta; \mathbf{y})$ on havaittua aineistoa vastaava uskottavuusfunktio, niin θ:n posteriorijakauma saadaan Bayesin kaavasta

$$p(\theta|\mathbf{y}) = c(\mathbf{y}) p(\theta) L(\theta; \mathbf{y}).$$

Tässä vakio $c(\mathbf{y})$ on käänteisluku funktion $p(\theta)L(\theta;\mathbf{y})$ summasta tai integraalista, mutta emme nyt tarvitse tätä tietoa.

Pohditaan θ:n piste-estimointia bayesläisestä näkökulmasta toistokoemallissa $K \sim \text{Bin}(n, \theta)$. Valitaan priorijakaumaksi (beetajakauman) tiheysfunktio

$$p(\theta) = c \cdot \theta^a (1-\theta)^b, \qquad 0 \leq \theta \leq 1,$$

jossa $a \geq 0$, $b \geq 0$ ja $c > 0$ on eräs a:sta ja b:stä riippuva vakio, jonka tarkkaa arvoa emme myöskään tarvitse.

a) Totea, että priorijakauman moodi eli piste, jossa se saa suurimman arvonsa, on kohdassa $\theta_0 = a/(a+b)$. Tapauksessa $a = b = 0$ sopikaamme, että $\theta_0 = \frac{1}{2}$.

b) Muodosta posteriorijakauma $p(\theta|k)$, kun olemme havainneet k onnistumista. (Ei tarvitse laskea vakioiden arvoja.)

c) Etsi posteriorijakauman moodi θ^*. Totea, että se voidaan kirjoittaa painotettuna keskiarvona θ_0:stä ja su-estimaatista $\hat{\theta} = k/n$:

$$\theta^* = \frac{a+b}{a+b+n}\theta_0 + \frac{n}{a+b+n}\hat{\theta}.$$

d) Millä a:n ja b:n arvoilla on $\theta^* = \hat{\theta}$? Mikä priorijakauma on tällöin?

e) Totea, että $\theta^* \to \hat{\theta}$, kun $n \to \infty$ (olettaen, että $\hat{\theta}$:n arvo pysyy muuttumattomana). Priorijakauman vaikutus siis ”häviää” kun havaintojen lukumäärä kasvaa.

Vihje. a- ja c-kohdissa maksimoitavat funktiot ovat samaa muotoa kuin toistokoemallin uskottavuusfunktio, joten tarvittavat laskut on olennaisesti jo tehty (ks. monisteen esimerkit 2.1.5 ja 2.2.5).

Lisätietoa. Posteriorijakauman moodi on eräs bayesläinen piste-estimointimenetelmä; tasaisen priorin tapauksessa se yhtyy su-estimaattiin. Toinen paljon käytetty vaihtoehto on posteriorijakauman odotusarvo.

Tehtävät 4 ja 5 liittyvät havaitun informaation ja Fisherin informaation käsitteisiin. Monisteen jakso 2.4.

4. (Monisteen teht. 2.11.) Jatkoa harjoituksen 2 tehtävään 2. Olkoot $Y_1, \dots, Y_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda) \perp\!\!\!\perp$. Laske havaittu informaatio $j(\hat{\lambda}; \mathbf{y})$, Fisherin informaatio $i(\lambda)$ ja odotusarvo $E[l'(\lambda; \mathbf{Y})^2]$.

5. (Monisteen teht. 2.13.) Tarkastellaan mallia, jossa havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat $Y_1, \dots, Y_n$ ovat riippumattomat. Mallin parametri on θ. Totea, että mallin havaittu informaatio ja Fisherin informaatio ovat

$$j(\theta; \mathbf{y}) = j_1(\theta; y_1) + \cdots + j_n(\theta; y_n), \qquad i(\theta) = i_1(\theta) + \cdots + i_n(\theta),$$

jossa $j_k(\theta; y_k)$ on pelkästään yhteen havaintoon y_k perustuva havaittu informaatio ja $i_k(\theta) = E[j_k(\theta; Y_k)]$ on vastaava Fisherin informaatio. Miten tulkitset tämän tuloksen?