Tilastollinen päättely II, syksy 2015 – kevät 2016
Harjoitus 1 (3. ja 5. 11. 2015)

1. Kertausta todennäköisyyslaskennasta. Ilmoita satunnaismuuttujan Y jakauman nimi ja pistetodennäköisyys- tai tiheysfunktio seuraavissa tapauksissa:

a) $Y = X_1 + \cdots + X_n$, kun $X_1, \ldots, X_n \sim B(\theta) \perp\!\!\!\perp$ (otos Bernoulli-jakaumasta)
b) $Y = U + V$, kun $U \sim N(1, 1)$, $V \sim N(3, 4)$ ja $U \perp\!\!\!\perp V$
c) $Y = U^2$, kun $U \sim N(0, 1)$
d) $Y = aX + b$, kun $X \sim \text{Tas}(0, 1)$ ja $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$
e) $Y = X_1 + \cdots + X_n$, kun $X_i \sim P(\mu_i)$ ja $X_1, \ldots, X_n \perp\!\!\!\perp$.

Ilmoita myös Y:n odotusarvo ja varianssi kussakin tapauksessa. Perusteluja ei vaadita.

Käytä tarvittaessa todennäköisyyslaskennan materiaalia ja taulukkokirjoja apuna. Huomaa myös, että tällä kurssilla eri jakaumista käytettävät tunnukset eroavat todennäköisyyslaskennan kurssilla käytetyistä; ks. liitettä muistiinpanojen sivulla 88.

2. a) Satunnaismuuttuja Y_1 on diskreetti, arvojoukkonaan $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Sille on kaksi vaihtoehtoista pistetodennäköisyysfunktiota, jotka on taulukoitu alla.

y	1	2	3	4	5
$f(y; 1)$	0.2	0.5	0.2	0.1	0
$f(y; 2)$	0	0.1	0.2	0.4	0.3

Emme tiedä, kumpaa näistä sattuma käyttää arpoessaan Y_1:n arvon.

Tulkitse tämä parametrisena tilastollisena mallina, jonka parametria merkitään θ:lla. Mikä on parametriavaruus? Jos havaitaan $Y_1 = 4$, mitä voit päätellä θ:sta? Kuinka varmasti?

b) Kyseisestä jakaumasta tehdään myös toinen havainto Y_2, jonka arvoksi saadaan $Y_2 = 1$. Mitä nyt voit päätellä θ:sta?

3. Opiskele luentomonisteen esimerkki 1.2.2 (kestoiät). Millainen käytännön ongelma saattaa liittyä tällaisen satunnaiskokeen tekemiseen?

Päädytään käyttämään halvempaa koejärjestelyä, jossa n laitetta pannaan yhtä aikaa käyntiin ja 30 päivän kuluttua tullaan tarkastamaan, mitkä yksilöt (tai kuinka monta yksilöä) ovat menneet rikki. Muodosta tätä koeasetelmaa kuvaava tilastollinen malli parametrille μ (kestoikien odotusarvo).

Apu. Ajattele, että kyseessä on n-kertainen toistokoe (binomikoe), jossa ”onnistuminen” merkitsee, että laite on mennyt rikki. Tällöin ”onnitumistodennäköisyys” (so. todennäköisyys, että yksittäinen laite rikkoutuu 30 päivän kuluessa) voidaan lausua μ:n avulla eksponenttijakaumasta laskemalla.

4. Palauta mieleen JTP-kurssilta (nyk. Tilastollinen päättely I) tai opiskele monisteen jaksosta 2.1 uskottavuusfunktion määritelmä. Muodosta uskottavuusfunktiot tehtävän 2 a- ja b-kohdan tilanteessa.

Lisäpisteitä saa tehtävien ratkaisemisesta 1, 2, 3, 4, 5, 6 tai 7, jos ratkaisee vastaavasti 20, 30, 40, 50, 60, 70 tai 80 prosenttia annetuista tehtävistä.

Presemo-keskusteluhuone osoitteessa http://presemo.helsinki.fi/pni/.