

# Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

12.10.2015

Helsingin yliopisto  
Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Johanna Rämö, johanna.ramo@helsinki.fi

## Käytännön asioita

- ▶ Tällä viikolla luennot pidetään normaalisti.
- ▶ Kurssisivulla on kertaustehtäviä.

# Kurssikoe

- ▶ Kurssikoe ke 21.10. klo 12.00 Exactumin auditorioissa. Kurssikokeeseen ei tarvitse ilmoittautua.
- ▶ Huomaa, että koe alkaa tasalta ja eri aikaan kuin muut matematiikan kokeet.
- ▶ Kurssin voi suorittaa myös yleistentissä:
  - ▶ Jos et pääse varsinaiseen kokeeseen, voit mennä yleistenttiin 29.10.
  - ▶ Jos haluat uusia kokeen, voit tehdä sen esim. yleistentissä 10.12.

Mitkä väitteistä ovat tosia?

Tarkastellaan matriisia  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ .

- (a) Vektori  $\bar{v} = (-1, 1)$  on matriisin  $B$  ominaisvektori.
- (b) Vektori  $\bar{w} = (1, 1)$  on matriisin  $B$  ominaisvektori.
- (c) Matriisilla  $B$  on tasan kaksi ominaisvektoria.
- (d) Matriisilla  $B$  on äärettömän monta ominaisvektoria.
- (e) Mikä tahansa joukon  $\mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$  vektori on matriisin  $B$  ominaisvektori.

## Ominaisarvot ja ominaisvektorit

Oletetaan, että  $A$  on  $n \times n$ -neliömatriisi. Luku  $\lambda \in \mathbb{R}$  on matriisin  $A$  *ominaisarvo*, jos on olemassa sellainen vektori  $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ , että  $\bar{v} \neq \bar{0}$  ja

$$A\bar{v} = \lambda\bar{v}.$$

Vektoria  $\bar{v}$ , joka toteuttaa yllä mainitun ehdon kutsutaan ominaisarvoon  $\lambda$  liittyväksi *ominaisvektoriksi*.



- ▶ Keksi iskulause ominaisvektoreille. (Ts. miten selittäisi kaverillesi lyhyesti ja ytimekkääksi, mitä ominaisvektorit ovat?)
- ▶ Miksi olemme kiinnostuneita ominaisvektoreista? Mihin niitä tarvitaan?

## Eräs kovakuoriaislaji

Yksilöt elävät kolme vuotta. Naaraskuoriaiset voidaan jakaa kolmeen luokkaan:

- ▶ Varhaisvaihe: 0–1 vuotiaita
- ▶ Nuoret: 1–2 vuotiaita
- ▶ Aikuiset: 2–3 vuotiaita



## Lisääntyminen

- ▶ Varhaisvaihe: eivät muni
- ▶ Nuoret: tuottavat keskimäärin 4 naarasta
- ▶ Aikuiset: tuottavat keskimäärin 3 naarasta

## Selviytyminen seuraavalle vuodelle

- ▶ Varhaisvaihe → nuoret: 50%
- ▶ Nuoret → aikuiset: 25%
- ▶ Aikuiset kuolevat

Eräänä vuonna populaatiossa 100 oli naaraskuoriaista:  
40 varhaisvaiheessa, 40 nuorta ja 20 aikuista.

Seuraavana vuonna

- ▶ varhaisvaiheessa:  $40 \cdot 4 + 20 \cdot 3 = 220$
- ▶ nuoria:  $40 \cdot 0,5 = 20$
- ▶ aikuisia:  $40 \cdot 0,25 = 10$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 40 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Matriisilla

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{bmatrix}$$

on ominaisvektori  $(18, 6, 1)$ , jota vastaa ominaisarvo  $1,5$ . Mitä se kertoo populaatiosta?

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} = 1,5 \begin{bmatrix} 18 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kun kuoriaisten suhde on 18 : 6 : 1, niin on saavutettu vakaa tila. Silloin kasvunopeus on joka vuosi sama, ja se on 1,5.

# Matriisin potenssien laskeminen

Merkitään  $A = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ .

Laske  $A^{100}$ .

## Matriisi $A$ on diagonalisoituva

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{100} = PD^{100}P^{-1}$$

## Mitkä väitteistä ovat tosia?

Olkoon  $A$  neliömatriisi, jolla on ominaisarvo  $\lambda$  ja sitä vastaava ominaisvektori  $\vec{v}$ .

- (a) Kaikki ominaisarvoja  $\lambda$  vastaavat ominaisvektorit ovat  $\vec{v}$ :n skalaarimonikertoja.
- (b) Luku  $\lambda$  voi olla nolla.
- (c) Myös nollavektori on  $A$ :n ominaisvektori.
- (d) Matriisilla  $A$  voi olla äärettömän monta muutakin ominaisarvoa.

# Projektio

Miten ryhtyisit määrittämään projektiota  $\text{proj}_{\vec{w}}(\vec{v})$ ? (Tämä kysymys liittyy erikseen GeoGebralla esitettyyn tilanteeseen.)



# Projektio



Mikä seuraavista on projektion kaava? Miten näkee helposti, että muut vaihtoehdot eivät käy?

(a)

$$\text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v}) = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}}$$

(b)

$$\text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v}) = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w}} \bar{w}$$

(c)

$$\text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v}) = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}} \bar{v}$$

(d)

$$\text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v}) = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}} \bar{w}$$