Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

7.10.2015

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö, johanna.ramo@helsinki.fi

Käytännön asioita

- Ensi viikolla luennot pidetään normaalisti maanantaina ja keskiviikkona.
- Kurssikoe ke 21.10. klo 12.00 Exactumin auditorioissa.
- Kurssin voi suorittaa myös yleistentissä:
  - Jos et pääse varsinaiseen kokeeseen, voit mennä yleistenttiin 29.10.
  - Jos haluat uusia kokeen, voit tehdä sen esim. yleistentissä 10.12.

Tehtävä 11

Halutaan selvittää virittävätkö eräät vektorit $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ avaruuden $\mathbb{R}^3$. Kun tutkitaan, onko vektori $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}$ vektorien $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ lineaarikombinaatio, päädytään matriisiin

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & a_3 - 2a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 2a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 - a_2 - a_3 \end{array}\right].$$

Virittävätkö vektorit avaruuden $\mathbb{R}^3$? Jos eivät, anna jokin avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektori, jota ei voi kirjoittaa vektorien $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ lineaarikombinaationa.

Ratkaisusta pitää löytyä seuraavat

- Tutkitaan, milloin yhtälöllä $x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + x_3\bar{v}_3 = \bar{a}$ on ratkaisuja.
- Matriisista nähdään, että yhtälöllä on ratkaisuja vain siinä tapauksessa, että $a_1 - a_2 - a_3 \neq 0$.
- Siksi esimerkiksi vektori $(1, 0, 0)$ ei ole vektorien $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ lineaarikombinaatio.
- Siten vektorit eivät viritä aliavaruutta.
- Selkeä ja loogisesti etenevä selitys hyvällä suomen kielellä.

Mitä ratkaisuja keksitte seuraaviin huolenaiheisiin?

- Työmäärä on suuri.
- Tehtäviä on paljon.
- Pelkään putoavani kärryiltä.
- Raja-arvot kurssi stressaa.

Jos työmäärä tuntuu liian suurelta

- Tee itsellesi lukujärjestys. Aikatauluta siihen myös itsenäinen työskentely.
- Kannattaa tehdä useamman kurssin tehtäviä samana päivänä.
- Jos tuntuu, että et selviä kurssin työmäärästä tai olet putomassa kärryiltä, juttele vastuuopettajan kanssa.
- Jos tuntuu, että kursseja on liikaa, juttele opintoneuvojan kanssa.

Oletetaan, että matriisi $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ on kääntyvä ja $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$.

Lisää yhtälönratkaisusta puuttuvat implikaatio- tai ekvivalenssinuolet:

$$\begin{aligned} A\bar{x} &= \bar{b} \\ A^{-1}A\bar{x} &= A^{-1}\bar{b} \\ I\bar{x} &= A^{-1}\bar{b} \\ \bar{x} &= A^{-1}\bar{b} \end{aligned}$$

Oletetaan, että matriisi $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ on kääntyvä ja $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$.

Tällöin yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{b}$ on täsmälleen yksi ratkaisu ja se on $\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$.

Toinen tapa osoittaa sama asia löytyy kurssimateriaalin luvusta 10.

Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(a) Matriisi A on kääntyvä.

(b) Yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{b}$ on täsmälleen yksi ratkaisu kaikilla $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$.

(c) Yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{0}$ on vain triviaali ratkaisu $\bar{x} = \bar{0}$.

(d) Matriisi A on riviekvivalentti ykkösmatriisin kanssa.

(e) Matriisi A on alkeismatriisien tulo.

(f) Matriisi A ei ole riviekvivalentti minkään nollarivin sisältävän matriisin kanssa.

(g) Matriisin A determinantti ei ole nolla.

Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(a) Matriisi A on kääntyvä.

(b) Yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{b}$ on täsmälleen yksi ratkaisu kaikilla $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$.

(c) Yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{0}$ on vain triviaali ratkaisu $\bar{x} = \bar{0}$.

(d) Matriisi A on riviekvivalentti ykkösmatriisin kanssa.

(e) Matriisi A on alkeismatriisien tulo.

(f) Matriisi A ei ole riviekvivalentti minkään nollarivin sisältävän matriisin kanssa.

(g) Matriisin A determinantti ei ole nolla.

Mitkä väitteistä ovat tosia?

Tarkastellaan matriisia $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Vektori $\bar{v} = (-1, 1)$ on matriisin B ominaisvektori.
(b) Vektori $\bar{w} = (1, 1)$ on matriisin B ominaisvektori.
(c) Matriisilla B on tasan kaksi ominaisvektoria.
(d) Matriisilla B on äärettömän monta ominaisvektoria.
(e) Mikä tahansa joukon $\mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$ vektori on matriisin B ominaisvektori.