# Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

28.9.2015

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö, johanna.ramo@helsinki.fi

# Käytännön asioita

- Jos olet pyytänyt tunnin lisäaikaa kokeeseen, käy näyttämässä lääkärintodistus kansliassa (C329).

# Kuinka lukea kurssimateriaalia

- Viikko 1
  - Sinun ei tarvitse ymmärtää kaikkea.
  - Anna harjoitustehtävien ohjata lukemistasi.
- Viikko 2
  - Lue teksti uudelleen huolellisemmin.
  - Mieti, mitä harjoitustehtävien on tarkoitus opettaa sinulle kurssimateriaalin sisällöstä.
  - Pyri muodostamaan kokonaiskuva aiheesta.

# Kuinka lukea kurssimateriaalia

- Viikon 2 jälkeen
  - Tarkista tarvittaessa asiat, jotka olet unohtanut.
  - Palaa uudelleen kaikkein hankalimpiin kohtiin. Todennäköisesti ymmärrät niistä nyt enemmän.
  - Muista, että usein asiat aukeavat vasta ajan kanssa.

Halutaan tutkia, onko vektorijono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4) \in \mathbb{R}^5$ vapaa. Päädytään matriisiin

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & -5 & 1/5 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Onko jono vapaa?

Halutaan tutkia, onko vektorijono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4) \in \mathbb{R}^5$ vapaa. Päädytään matriisiin

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & -5 & 1/5 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Onko jono vapaa?

# Mitkä seuraavista olisivat kelvollisia vapauden määritelmäksi?

Jono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa, jos seuraava ehto pätee:

(a) $c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$, kun $c_1 = 0, \ldots, c_k = 0$

(b) $c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$ ja $c_1 = 0, \ldots, c_k = 0$

(c) Jos $c_1 = 0, \ldots, c_k = 0$, niin $c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$

(d) Yhtälöllä $x_1\bar{v}_1 + \cdots + x_k\bar{v}_k = \bar{0}$ on täsmälleen yksi ratkaisu.

(e) Nollavektori voidaan kirjoittaa vektorien $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaationa.

Tarkastellaan huolellisesti ehtoa d.

# Vapaus liittyy yksikäsitteisyyteen

### Lause

Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$, ja että jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa. Tällöin jokainen aliavaruuden $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ alkio voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla vektorien $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaationa.

# Määritelmä

Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Vektorijono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k)$ on **vapaa**, jos seuraava ehto pätee:

$$\text{jos } c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0} \text{ joillakin } c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R},$$

niin $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $\dots$, $c_k = 0$.

# Siirtymätodennäköisyysmatriisi

- Opiskelijoista, jotka olivat edellisenä päivänä luennolla, on seuraavana päivänä luennolla 80 % ja kotona 20 %.
- Opiskelijoista, jotka olivat edellisenä päivänä kotona, on seuraavana päivänä luennolla 30 % ja kotona 70 %.

$$\begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 60 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{bmatrix}^5 \begin{bmatrix} 200 \\ 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 157 \\ 103 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{bmatrix}^{20} \begin{bmatrix} 200 \\ 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 156 \\ 104 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{bmatrix}^{100} \begin{bmatrix} 200 \\ 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 156 \\ 104 \end{bmatrix}$$

Yhtälöryhmää vastaava matriisi on

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1215 \\ 3 & -1 & 2 & -610 \\ 1 & -4 & 0 & 204 \end{array}\right].$$

Halutaan selvittää, kuinka monta ratkaisua yhtälöryhmällä on. Miten sen voisi tehdä? Yritä keksiä mahdollisimman helppo strategia!

**Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:**

(a) Matriisi $A$ on kääntyvä.

(b) Yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{b}$ on täsmälleen yksi ratkaisu kaikilla $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$.

(c) Yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{0}$ on vain triviaali ratkaisu $\bar{x} = \bar{0}$.

(d) Matriisi $A$ on riviekvivalentti ykkösmatriisin kanssa.

(e) Matriisi $A$ on alkeismatriisien tulo.

(f) Matriisi $A$ ei ole riviekvivalentti minkään nollarivin sisältävän matriisin kanssa.

(g) Matriisin $A$ determinantti ei ole nolla.

**Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:**

(a) Matriisi $A$ on kääntyvä.

(b) Yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{b}$ on täsmälleen yksi ratkaisu kaikilla $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$.

(c) Yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{0}$ on vain triviaali ratkaisu $\bar{x} = \bar{0}$.

(d) Matriisi $A$ on riviekvivalentti ykkösmatriisin kanssa.

(e) Matriisi $A$ on alkeismatriisien tulo.

(f) Matriisi $A$ ei ole riviekvivalentti minkään nollarivin sisältävän matriisin kanssa.

(g) Matriisin $A$ determinantti ei ole nolla.