Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

23.9.2015

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö, johanna.ramo@helsinki.fi

Käytännön asioita

- Jos olet pyytänyt tunnin lisäaikaa kokeeseen, käy näyttämässä lääkärintodistus kansliassa (C329).

Tarkista tehtävä 13 malliratkaisusta.

- Perustelitko, mistä yhtälöryhmä tulee?
- Saitko yhtälöryhmälle äärettömän monta ratkaisua?
- Totesitko, että $\bar{w} \in \mathrm{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ sen perusteella, että yhtälöryhmällä on ratkaisuja?
- Kirjoititko vektorin $\bar{w}$ toisten vektorien lineaarikombinaationa?
- Selititkö, mitä teet? Saako kaverisi selityksistäsi vaivattomasti selvää?

Merkitään $\bar{w} = (2, 11, 5)$, $\bar{v}_1 = (-2, 1, 1)$, $\bar{v}_2 = (2, 3, 1)$ ja $\bar{v}_3 = (-2, -1, 0)$. Halutaan tutkia, päteekö $\bar{w} \in \text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$. Millaista yhtälöä pitää tutkia? Millainen yhtälöryhmä siitä saadaan?

Kun luennoitsija muokkasi alkeisrivitoimituksilla yhtälöryhmän matriisin redusoiduksi porrasmatriisiksi, oli tuloksena

$$\left[\begin{array}{ccr|c} 1 & 0 & 1/2 & 2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Päättele tämän perusteella, päteekö $\bar{w} \in \text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$. Jos pätee, kirjoita $\bar{w}$ vektoreiden $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ lineaarikombinaationa.

Matematiikkaa opiskellessa kaikkea ei ymmärrä heti.

Siirry istumaan jonkun viereen. Kaikilla on oltava pari. Jos et tunne vieruskaveriasi, esittäydy hänelle.

Mitkä väitteistä ovat tosia?

Merkitään $\bar{v}_1 = (3, -1)$ ja $\bar{v}_2 = (2, 3)$.

(a) On olemassa reaaliluvut a ja b, joille pätee $a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2 = \bar{0}$. X
(b) On olemassa täsmälleen yhdet reaaliluvut a ja b, joille pätee $a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2 = \bar{0}$. X
(c) On olemassa monta tapaa valita reaaliluvut a ja b, joille pätee $a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2 = \bar{0}$.

Osoitetaan, että on olemassa **täsmälleen yhdet** reaaliluvut a ja b, joille pätee $a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2 = \bar{0}$:

Ratkaisustrategia:
Oletetaan, että a ja b ovat reaalilukuja ja $a \neq 0$ tai $b \neq 0$.
Oletetaan lisäksi, että $a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2 = \bar{0}$.

Tavoitteena on ristiriita.

Pohdintatehtävä

Millä muilla tavoilla voi osoittaa, että on olemassa **täsmälleen yhdet** reaaliluvut a ja b, joille pätee $a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2 = \bar{0}$?

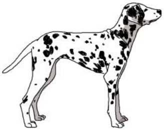
Määritelmä

Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Vektorijono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on **vapaa**, jos seuraava ehto pätee:

$$\text{jos } c_1 \bar{v}_1 + \cdots + c_k \bar{v}_k = \bar{0} \text{ joillakin } c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R},$$

niin $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $\ldots$, $c_k = 0$.

Mitä seuraava kuva esittää?



Mikä vapauden määritelmässä on oikein ideana?

Miksi vapaus kiinnostaa?

VAPAUS $\leftrightarrow$ YKSIKÄSITTEINEN ESITYS

Merkitään $\bar{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\bar{v}_2 = (0, 0, 2)$ ja $\bar{v}_3 = (3, 0, 4)$.

Millä eri tavoilla voisit päätellä, onko jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ vapaa vai ei?