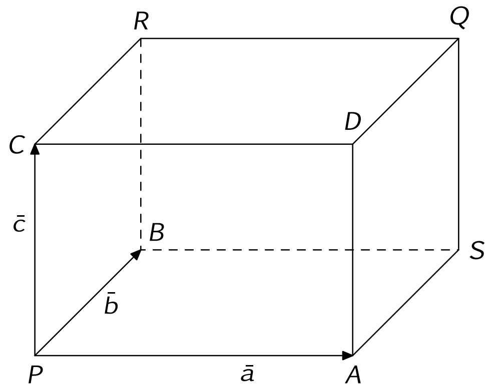
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2015
Harjoitus 3

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 18.9.2015 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 2.10.2015 klo 19.30

Tehtäväsarja I

1. Eräs avaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruus W on vektorien $\bar{u} = (-3, 4)$ ja $\bar{v} = (3/2, -2)$ virittämä.
   (a) Kirjoita tämä aliavaruus span-merkinnän avulla sekä joukkona samaan tapaan kuin määritelmässä 4.1.
   (b) Millaisia muotoa ovat aliavaruuden W vektorit? Oletetaan, että $\bar{w} \in W$. Kirjoita vektori $\bar{w}$ näkyviin komponentteineen.
   (c) Piirrä kuva aliavaruudesta W. (Täsmällisiä perusteluja ei tarvita.)
2. (a) Kirjoita alla olevassa kuvassa esiintyvät suuntajanat $\overline{BD}$ ja $\overline{CS}$ vektoreiden $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ lineaarikombinaatioina.
   (b) Päteekö $\overline{AQ} \in \text{span}(\bar{a}, \bar{b})$? Entä $\overline{RD} \in \text{span}(\bar{a}, \bar{b})$?



3. Oletetaan, että $\bar{u}, \bar{w}, \bar{v} \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että $\bar{u}$, $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ovat aliavaruuden $\text{span}(\bar{u},\ \bar{u}+\bar{v},\ \bar{u}+\bar{w}+\bar{v})$ alkioita.

Tehtäväsarja II

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 5, jossa ratkaistaan lineaarisia yhtälöryhmiä.

4. (a) Seuraavassa on muutettu eräs matriisi porrasmatriisiksi. Listaa käytetyt alkeisrivitoimitukset.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 10 & -1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 4 & 10 & -1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 4 & 10 & -1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & -6 & -9 & -3 \end{array}\right] \to$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & -9 & -3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{array}\right]$$

(b) Muuta matriisi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 8 \end{array}\right]$$

alkeisrivitoimituksilla porrasmatriisiksi. Käytä apuna kurssimateriaalin esimerkkiä 5.10 ja sitä seuraavia ohjeita. Myös tämän tehtävän a-kohdasta kannattaa ottaa mallia.

5. (a) Seuraavassa on muutettu eräs porrasmatriisi redusoiduksi porrasmatriisiksi. Listaa käytetyt alkeisrivitoimitukset.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

(b) Muuta tehtävässä 4 b saatu porrasmatriisi alkeisrivitoimituksilla redusoiduksi porrasmatriisiksi. Käytä apuna kurssimateriaalin esimerkkiä 5.10 ja sitä seuraavia ohjeita. Myös tämän tehtävän a-kohdasta kannattaa ottaa mallia.

6. Ratkaise Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmän avulla yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ x_1 - 2x_2 + \ \ x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 \qquad\quad = 8. \end{cases}$$

Huomaa, että tarvittavat laskut on jo tehty kahdessa edellisessä tehtävässä.

7. Mitkä seuraavista matriiseista ovat redusoituja porrasmatriiseja?

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7/12 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & -3 & 8 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 & -11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \pi \end{bmatrix}$

8. Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmällä on päädytty alla oleviin redusoituihin porrasmatriiseihin. Määritä yhtälöryhmien ratkaisut.

(a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$ (b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

(c) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right]$ (d) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

9. Ratkaise Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmällä yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 3 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \qquad\quad = -3. \end{cases}$$

Tehtäväsarja III

10. Tässä tehtävässä harjoitellaan Matlabin (tai FreeMatin) käyttöä. Matlab-ohjausta on tarjolla luokassa C128 keskiviikkoisin ja torstaisin klo 14-16.

    (a) Määrittele Matlabissa matriisi

    ```
    A=[4 -11 12 10 0
    50 5 7 1 6
    -7 0 3 -10 -12
    -11 8 4 5 5]
    ```

    (b) Muuta edellisen kohdan matriisi redusoiduksi porrasmatriisiksi komennolla `rref(A)`. Tämän tehtävän vastausta ei tarvitse kirjoittaa ratkaisupaperiin.

    (c) Ratkaise Matlabin `rref`-komennon avulla yhtälöryhmä

$$\begin{cases} \phantom{3x_1 - {}} 3x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 = -5 \\ 3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 9 \\ 3x_1 - 9x_2 + 12x_3 - 9x_4 + 6x_5 = 15. \end{cases}$$

    Kirjoita ratkaisupaperiisi yhtälöryhmän ratkaisu.

11. Laboratoriossa viljellään eräässä koeputkessa kolmea bakteerikantaa (I, II ja III). Koeputkeen lisätään päivittäin 2 300 yksikköä ravintoa A, 800 yksikköä ravintoa B ja 1 500 yksikköä ravintoa C. Yksittäisen bakteerin päivässä kuluttamien ravintoyksiköiden määrä näkyy seuraavasta taulukosta:

	A	B	C
Bakteerikanta I	2	1	1
Bakteerikanta II	2	2	3
Bakteerikanta III	4	0	1

Ravinnon määrä rajoittaa bakteerikantojen kasvua. Jos bakteerit kuluttavat kaiken ravinnon, kuinka monta bakteeria kustakin kannasta voi elää koeputkessa? Muodosta tilannetta kuvaava yhtälöryhmä ja ratkaise se. Voit käyttää apuna Matlabia (tai FreeMatia).

Tehtäväsarja IV

12.* Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmällä on päädytty alla olevaan matriisiin. Määritä yhtälöryhmän ratkaisu.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

13.* Merkitään $\bar{w} = (2, 11, 5)$, $\bar{v}_1 = (-2, 1, 1)$, $\bar{v}_2 = (2, 3, 1)$ ja $\bar{v}_3 = (-2, -1, 0)$. Halutaan tutkia, päteekö $\bar{w} \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$. Millaista yhtälöä pitää tutkia? Millainen yhtälöryhmä siitä saadaan? Perustele vastauksesi.

Kun luennoitsija muokkasi alkeisrivitoimituksilla yhtälöryhmän matriisin redusoiduksi porrasmatriisiksi, oli tuloksena

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Päättele tämän perusteella, päteekö $\bar{w} \in \text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$. Jos pätee, kirjoita $\bar{w}$ vektoreiden $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ lineaarikombinaationa.

14. (a) Laske matriisitulo
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$
(b) Tarkastellaan yhtälöryhmää
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \phantom{{}+x_3} = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ -2x_1 \phantom{{}+3x_2} + x_3 = 1. \end{cases}$$
Kirjoita yhtälöryhmä matriisimuodossa $A\bar{x} = \bar{b}$. Toisin sanottuna etsi matriisi A ja vektorit $\bar{x}$ ja $\bar{b}$ siten, että yhtälöryhmä vastaa matriisiyhtälöä $A\bar{x} = \bar{b}$.

Tehtäväsarja V

15.* Oletetaan, että $n \times n$ -matriisit A ja B ovat kääntyviä. Osoita, että matriisin AB on kääntyvä näyttämällä, että sen käänteismatriisi on $B^{-1}A^{-1}$.

16. Oletetaan, että matriisit A ja B ovat kääntyviä samantyyppisiä neliömatriiseja. Ratkaise seuraavasta yhtälöstä matriisi X ja sievennä vastauksesi mahdollisimman pitkälle:
$$AXA^{-1} = (AB^{-1})^{-1}(AB^2).$$

Tehtäväsarja VI

Tee tämän tehtäväsarjan tehtäviä samalla, kun tutustut lukuun 7. Tutkitaan vektoreita $\bar{u} = (1, -3)$, $\bar{v} = (-3, 8)$ ja $\bar{w} = (-3, 9)$.

17. (a) Etsi sellaiset reaaliluvut s ja t, että vektori $s\bar{u} + t\bar{v}$ on nollavektori.
(b) Piirrä kuva tilanteesta.
(c) Kuinka monella eri tavalla voit valita luvut s ja t?
(d) Onko jono $(\bar{u}, \bar{v})$ vapaa vai sidottu?

18. (a) Etsi sellaiset reaaliluvut s ja t, että vektori $s\bar{u} + t\bar{w}$ on nollavektori.
(b) Piirrä kuva tilanteesta.
(c) Kuinka monella eri tavalla voit valita luvut s ja t?
(d) Onko jono $(\bar{u}, \bar{w})$ vapaa vai sidottu?

Ylimääräinen tehtävä

Seuraava tehtävä on hieman haastavampi. Sillä voi korvata minkä tahansa tähdettömän tehtävän.

19. Millainen avaruuden $\mathbb{R}^3$ osajoukko on vektoreiden $\bar{v}_1 = (1, -2, -6)$, $\bar{v}_2 = (0, 3, 6)$ ja $\bar{v}_3 = (-1, -1, 0)$ virittämä aliavaruus $\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$? Onko se suora, taso vai jotain muuta? Perustele huolellisesti.