

**Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I**  
**Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos**  
**Syksy 2015**  
**Harjoitus 2**

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 11.9.2015 klo 19.30  
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 25.9.2015 klo 19.30

**Tehtäväsarja I**

Lue luvusta 9 matriisien kertolaskusta.

1. Laske matriisien

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

tulo  $AB$

2. Merkitään

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Laske seuraavista matriiseista ne, jotka ovat määriteltyjä:

$$BC, \quad CA, \quad AC, \quad A^3, \quad B^5.$$

3. Anna ja Bella vertailevat kahden apteekin hintoja. He haluavat ostaa alla olevan taulukon mukaiset lääkkeet mahdollisimman edullisesti:

	Särkylääke	Allergialääke	Perusvoide
Anna	10 kpl	2 kpl	3 kpl
Bella	7 kpl	8 kpl	2 kpl

Tuotteiden hinnat eri apteekeissa ovat puolestaan alla:

	Apteekki 1	Apteekki 2
Särkylääke	2,50 e / kpl	2,60 e / kpl
Allergialääke	5,40 e / kpl	5,30 e / kpl
Perusvoide	7,50 e / kpl	7,40 e / kpl

Anna ja Bella laskevat matriisitulon

$$\begin{bmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,50 \text{ e} & 2,60 \text{ e} \\ 5,40 \text{ e} & 5,30 \text{ e} \\ 7,50 \text{ e} & 7,40 \text{ e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58,30 \text{ e} & 58,80 \text{ e} \\ 75,70 \text{ e} & 75,40 \text{ e} \end{bmatrix}.$$

Mitä he voivat siitä päätellä?

4. Opiskelijoiden päivittäinen luentokäyttäytyminen riippuu edellisestä päivästä seuraavasti:

- Opiskelijoista, jotka olivat edellisenä päivänä luennolla, on seuraavana päivänä luennolla 80 % ja kotona 20 %.
  - Opiskelijoista, jotka olivat edellisenä päivänä kotona, on seuraavana päivänä luennolla 30 % ja kotona 70 %.
- (a) Eräänä päivänä luennolla oli 200 opiskelijaa ja kotona 60 opiskelijaa. Kuinka monta opiskelijaa oli luennolla seuraavana päivänä? Entä kotona?
- (b) Laske matriisitulo

$$\begin{bmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 60 \end{bmatrix}.$$

Selitä omin sanoin, miten se liittyy a)-kohdan laskuihin.

- (c) Selvitä matriisikertolaskun avulla, missä opiskelijat ovat kolmen päivän kuluttua, kun lähtötilanne on sama kuin a)-kohdassa.

## Tehtäväsarja II

Seuraavan tehtävän avulla tutustutaan tietokoneen käyttöön lineaarialgebrassa. Voit tehdä tehtävän esimerkiksi Exactumin tietokoneluokan C128 koneilla, joista löytyy ohjelma MATLAB. Jos sinulla on oma tietokone, voit ladata siihen ilmaisen ohjelman FreeMat, joka toimii kuten MATLAB. FreeMat löytyy osoitteesta [freemat.sourceforge.net](http://freemat.sourceforge.net).

Kaikkien kohtien ratkaisuja ei tarvitse kirjoittaa paperille. Riittää, että kirjaat ylös d- ja f-kohtien havainnot.

5. (a) Kopioi seuraava koodinpätkä ohjelman MATLAB/FreeMat komentoikkunaan.

```
A=[20 20 10 10
50 5 7 1
14 0 3 -10
1 -17 4 1]
```

Paina näppäimistön Enter-nappia. Olet nyt muodostanut matriisin nimeltä  $A$ .

- (b) Muodosta matriisi

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 0 \\ 17 & 1 & 11 & 14 \\ -44 & 0 & 0 & 4 \\ 14 & 6 & 1 & 9 \end{bmatrix}.$$

- (c) Matriisien  $A$  ja  $B$  tulo  $AB$  lasketaan komennolla  $A*B$ . Laske  $AB$ .
- (d) Laske sitten tulo  $BA$ . Vertaa tulosta tuloon  $AB$ . Mitä huomaat? Voisiko vastaavaa tapahtua reaalityyppien kertolaskussa?
- (e) Kokeile, mitä komennot `zeros(4)`, `eye(10)` ja `diag([7,-12,3,1])` tekevät.
- (f) Muodosta matriisi  $I=eye(4)$ . Laske sitten tulo  $AI$ , missä  $A$  on a)-kohdassa määritelty matriisi (sitä ei tarvitse enää syöttää ohjelmaan uudelleen, sillä ohjelma muistaa sen nimen). Mitä huomaat? Voiko vastaavaa tapahtua reaalityyppien kanssa?

Tutustu lukuun 9.5, jossa kerrotaan matriisien käänteismatriiseista.

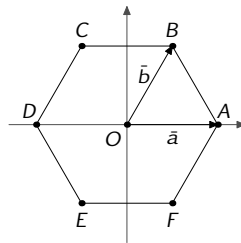
6. Merkitään

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Osoita, että matriisin  $H$  käänteismatriisi on  $M$ .
- (b) Onko matriisi  $H$  kääntyvä? Entä matriisi  $M$ ?
- (c) Mitä yhteistä on käänteismatriiseilla ja käänteisluvuilla?

### Tehtäväsarja III

7. Oheisessa kuvassa pisteet  $A, B, \dots, F$  ovat säännöllisen kuusikulmion kärkipisteitä. Lausu vektorien  $\bar{a}$  ja  $\bar{b}$  lineaarikombinaationa suuntajانات  $\overline{AD}$ ,  $\overline{AC}$  ja  $\overline{BC} + \overline{DE} + \overline{FA}$ . Muista perustella vastauksesi.



8.\* Tutkitaan suoraa, jonka yhtälö on  $y = -5x + 2$ . Kirjoita suora muodossa  $\{\bar{p} + t\bar{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$ . Kirjoita perusteltu vastaus selkeillä ja ymmärrettävillä suomen kielen lauseilla.

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 3, jossa käsitellään tasoja.

9. Merkitään  $A = (-3, 1, 2)$ ,  $B = (2, 4, 1)$  ja  $C = (12, 0, -1)$ . Tarkastellaan tasoa  $T$ , joka kulkee pisteiden  $A$ ,  $B$  ja  $C$  kautta. Kirjoita taso  $T$  muodossa

$$\{\bar{p} + s\bar{w} + t\bar{v} \mid s, t \in \mathbb{R}\}.$$

10. Määritä se taso  $T$ , joka sisältää suoran  $S = \{(-3, 1, 2) + t(1, 0, 5) \mid t \in \mathbb{R}\}$  ja kulkee pisteen  $P = (1, 2, 4)$  kautta. Anna vastauksesi muodossa  $\{\bar{p} + s\bar{w} + t\bar{v} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ .

### Tehtäväsarja IV

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 4, jossa käsitellään vektorien virittämiä aliavaruuksia.

11. Merkitään  $\bar{v} = (3, -1)$ .

- (a) Etsi jokin vektorin  $\bar{v}$  lineaarikombinaatio.
- (b) Kirjoita joukko, jonka muodostavat vektorin  $\bar{v}$  kaikki lineaarikombinaatiot. Käytä joukkomerkinä, joka on muotoa  $\{\text{alkio} \mid \text{ehto, jonka alkio toteuttaa}\}$ .
- (c) Havainnollista b-kohdassa muodostamaasi joukkoa piirtämällä se koordinaatistoon.
- (d) Mitä tarkoittaa merkintä  $\text{span}(\bar{v})$ ?

12. Merkitään  $\bar{v} = (3, -1)$  ja  $\bar{w} = (1, 2)$ .

- (a) Etsi jokin vektoreiden  $\bar{v}$  ja  $\bar{w}$  lineaarikombinaatio.
- (b) Kirjoita joukko, jonka muodostavat vektoreiden  $\bar{v}$  ja  $\bar{w}$  kaikki lineaarikombinaatiot. Käytä vastaavaa joukkomerkintää kuin edellisessä tehtävässä.
- (c) Mitä tarkoittaa merkintä  $\text{span}(\bar{v}, \bar{w})$ ?

13. Tässä tehtävässä kannattaa välttää turhia laskuja.

- (a) Pitääkö paikkansa, että  $(4, 6) \in \text{span}((2, 3), (-2, -3))$ ?
- (b) Pitääkö paikkansa, että  $(5, 6, 1) \in \text{span}((2, 0, 0), (0, 7, 0))$ ?

### Tehtäväsarja V

14. Merkitään  $\bar{v} = (5, 2)$ .

- (a) Kirjoita vektorin  $\bar{v}$  virittämä avaruuden  $\mathbb{R}^2$  aliavaruus  $\text{span}(\bar{v})$  joukkona samaan tapaan kuin määritelmässä 4.1.
- (b) Luettele kolme eri alkioita vektorin  $\bar{v}$  virittämästä aliavaruudesta  $\text{span}(\bar{v})$ . Perustele vastauksesi.
- (c) Piirrä kuva vektorin  $\bar{v}$  virittämästä aliavaruudesta  $\text{span}(\bar{v})$ .

15.\* Merkitään  $\bar{v}_1 = (1, 2, 3)$  ja  $\bar{v}_2 = (4, 5, 6)$ .

- (a) Kirjoita aliavaruus  $\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$  joukkona samaan tapaan kuin määritelmässä 4.1.
- (b) Luettele kolme eri alkioita vektorien  $\bar{v}_1$  ja  $\bar{v}_2$  virittämästä aliavaruudesta  $\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ . Perustele vastauksesi.

16.\* Tämä tehtävä on jatkoa edelliselle tehtävälle. Tutkitaan edelleen vektoreita  $\bar{v}_1 = (1, 2, 3)$  ja  $\bar{v}_2 = (4, 5, 6)$ .

- (a) Osoita, että nollavektori on joukon  $\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$  alkio.
- (b) Selitä omin sanoin, miltä joukko  $\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$  näyttää. Voit halutessasi höyståää selitystäsi kuvalla.

### Ylimääräinen tehtävä

Seuraava tehtävä on hieman haastavampi. Voit korvata sillä minkä tahansa tähdettömän tehtävän.

17. Onko olemassa avaruuden  $\mathbb{R}^3$  tasoa, joka kulkee pisteiden  $A = (1, 2, 1)$ ,  $B = (5, -2, 1)$ ,  $C = (0, 2, -1)$  ja  $D = (3, 2, -1)$  kautta? Perustele vastauksesi huolellisesti.