Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2015
Harjoitus 1

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 4.9.2015 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 18.9.2015 klo 19.30

Tehtäväsarja I

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 1, joissa käsitellään avaruuksien $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$ vektoreita.

Tehtävissä 1–4 tutkitaan vektoreita $\bar{a} = (0, -2)$, $\bar{b} = (3, 1)$ ja $\bar{c} = (-2, -1)$.

1. Piirrä kuva, jossa havainnollistat näitä avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektoreita
   (a) koordinaatiston pisteinä
   (b) koordinaatiston pisteiden paikkavektoreina.

2. (a) Havainnollista vektoria $\bar{a}$ suuntajanalla, jonka lähtöpiste on $P = (3, 1)$. Mikä on tämän suuntajanan päätepiste? Piirrä kuva ja kirjoita lisäksi näkyviin lasku, jolla päätepisteen saa selville.
   (b) Havainnollista vektoria $\bar{c}$ suuntajanalla, jonka päätepiste on $Q = (-1, 1)$. Mikä on tämän suuntajanan lähtöpiste? Piirrä kuva ja kirjoita lisäksi näkyviin lasku, jolla lähtöpisteen saa selville.

3. Määritä vektorit $\bar{a} + \bar{b}$, $\bar{b} - \bar{c}$ ja $\bar{c} - \bar{a}$
   (a) piirtämällä niitä vastaavat suuntajanat koordinaatistoon ja päättelemällä tulos ilman laskuja
   (b) laskemalla ilman kuvaa.

4. (a) Määritä lineaarikombinaatio $-3\bar{a} + 2\bar{c}$.
   (b) Piirrä kuva vektorista $-3\bar{a} + 2\bar{c}$. Piirrä kuvaan myös vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{c}$ ja selitä omin sanoin, kuinka kuvassa näkyvät luvut -3 ja 2.

Tehtäväsarja II

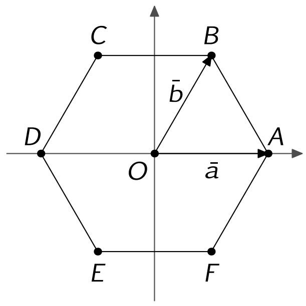
5. Piirrä koordinaatistoon suuntajana $\overline{AB}$ ja määritä sitä vastaava avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektori, jos

   (a) $A = (1, -1)$ ja $B = (4, 2)$ (b) $A = (2,\ 3/2)$ ja $B = (1/2,\ 3)$

   Miten saat laskettua kysytyn vektorin komponentit pisteiden A ja B koordinaateista?

6. Käy Exactumin 3. kerroksessa ja tutustu käytävällä sekä luokassa C323 oleviin ohjaustiloihin. Voit halutessasi jäädä luokkaan tai käytävälle tekemään tehtäviä ja keskustelemaan ohjaajien ja toisten opiskelijoiden kanssa.

7. Oheisessa kuvassa pisteet $A, B, \ldots, F$ ovat säännöllisen kuusikulmion kärkipisteitä. Keskipisteenä on origo. Kirjoita suuntajanat $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ja $\overline{CF}$ vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ lineaarikombinaatioina.



Kirjoita ylös laskujen välivaiheet, jos sellaisia käytät.

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 2, jossa käsitellään n-ulotteista vektoriavaruutta $\mathbb{R}^n$.

8.* Oletetaan, että $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$.

(a) Sievennä lauseke $-3(\bar{a} - \bar{c}) + 2(\bar{a} + 2\bar{b}) - 3(\bar{c} - \bar{b})$.

(b) Onko a-kohdan tulos vektoreiden $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ lineaarikombinaatio? Jos on, anna vektoreiden $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ kertoimet kyseisessä lineaarikombinaatiossa. Kirjoita ratkaisusi kokonaisilla suomen kielen lauseilla.

9. Merkitään $\bar{v} = (1, -1)$ ja $\bar{w} = (1, 1)$.

(a) Piirrä ruutupaperille koordinaatisto, jonka akselit ovat vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ suuntaiset. Piirrä tämän koordinaatiston avulla vektorit $\bar{a} = 2\bar{v} + 4\bar{w}$ ja $\bar{b} = -3\bar{v} + \bar{w}$.

(b) Piirrä tavalliseen koordinaatistoon vektorit $\bar{c} = (1, -3)$ ja $\bar{d} = (6, 2)$. Piirrä samaan kuvaan koordinaatisto, jonka akselit ovat vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ suuntaiset, ja päättele kuvan avulla, miten vektorit $\bar{c}$ ja $\bar{d}$ voidaan kirjoittaa vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ lineaarikombinaationa.

Tehtäväsarja III

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 3.1, jossa käsitellään suoria.

10. Suoran *suuntavektoriksi* nimitetään vektoria, joka saadaan, kun kahden suoralla olevan pisteen välille piirretään suuntajana, ja tämä jana tulkitaan vektoriksi.

Piirrä seuraavia yhtälöitä vastaavat suorat koordinaatistoon ja etsi jokaiselle suorista suuntavektori.

(a) $y = x + 4$ (b) $2x - 4y = 6$ (c) $x = -3$

11. Suoran *paikkavektoriksi* nimitetään vektoria, joka saadaan, kun mikä tahansa suoran piste tulkitaan vektoriksi (pisteen koordinaateista tulee vektorin komponentit). Määritä edellisen tehtävän suorille jotkin paikkavektorit.

12. Tarkastellaan suoraa $S = \{(0, 2) + t(-1, 3) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

(a) Luettele neljä eri vektoria, jotka ovat joukon S alkioita. (Voit tehdä tämän valitsemalla eri arvoja parametrille t.)

(b) Havainnollista a-kohdassa valitsemiasi vektoreita piirtämällä koordinaatistoon niitä vastaavat pisteet.

(c) Havainnollista a-kohdassa valitsemiasi vektoreita piirtämällä koordinaatistoon niitä vastaavien pisteiden paikkavektorit.

(d) Piirrä koordinaatistoon suora S.

13.* Piirrä kuvat seuraavista suorista.

$$S_1 = \{(1,2) + t(2,-1) \mid t \in \mathbb{R}\} \qquad S_2 = \{(2,2) + s(-4,2) \mid s \in \mathbb{R}\}$$
$$S_3 = \{(0,3) + k(-1,\ 1/2) \mid k \in \mathbb{R}\}$$

Päättele kuvien avulla, mitkä suorista ovat samoja. Tarkkoja perusteluja ei tarvita.

Tehtäväsarja IV

14. Merkitään $A = (2,3,6)$ ja $B = (4,-7,-3)$. Tarkastellaan suoraa S, joka kulkee pisteiden A ja B kautta. Kirjoita suora S vektorimuodossa $\{\bar{p} + t\bar{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$. (*Neuvo:* Lue esimerkki 3.3.)

15. Määritä edellisen tehtävän suoran ja xy-tason leikkauspiste.

Tehtäväsarja V

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 9, jossa käsitellään matriiseja.

16. Merkitään

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Laske seuraavista matriiseista ne, jotka ovat määriteltyjä:

(a) $B + D$ (b) $A + B$ (c) $A + C$ (d) $(-3)C$ (e) $2D - B$