HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

CAS-laskimet:
Miten uudet tekniset apuvälineet muuttavat lukion pitkän matematiikan opiskelua?

Helsingin yliopisto
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Pro gradu -tutkielma
Matematiikka
Toukokuu 2013
Oskari Wiikinkoski

Ohjaaja: Mika Koskenoja

Tiedekunta - Fakultet - Faculty Matemaattis-luonnontieteellinen	Laitos - Institution - Department Matematiikan ja tilastotieteen laitos	
Tekijä - Författare - Author Oskari Wiikinkoski		
Työn nimi - Arbetets titel - Titel CAS-laskimet: Miten uudet tekniset apuvälineet muuttavat lukion pitkän matematiikan opiskelua?		
Oppiaine - Läroämne - Subject Matematiikka		
Työn laji/ Ohjaaja - Arbetets art/Handledare - Level/Instructor Pro gradu -tutkielma / Mika Koskenoja	Aika - Datum - Month and year Toukokuu 2013	Sivumäärä - Sidoantal - Number of pages 39 s + 4 liites.

Tiivistelmä - Referat - Abstract

Ylioppilastutkintolautakunta päätyi laskinohjetta uudistaessaan sallimaan kevään 2012 matematiikan ylioppilaskokeessa ensimmäistä kertaa myös niin kutsuttujen CAS-laskinten käytön. Tämä uudistus johti tilanteeseen, jossa osa pitkän matematiikan kokeen tehtävistä oli mahdollista ratkaista pelkästään laskimen avulla. Matematiikan opettajat ovat ilmaisseet huolensa laskinten käytön tuomista haasteista ja uhkista matematiikan opiskelulle ja opetukselle lukiossa sekä myös matematiikan tulevaisuudelle oppiaineena. Tässä tutkielmassa perehdytään teknisten apuvälineiden, erityisesti CAS-laskinten, käytön vaikutuksiin matematiikan opiskelussa sekä opettajien näkemyksiin ja odotuksiin siitä, miten laskimet tulevat muuttamaan lukion matematiikan opetusta ja ylioppilaskoetta.

Matematiikan opettajien keskuudessa on herännyt kriittinen keskustelu uusien apuvälineiden käytöstä ja erityisesti CAS-laskinten antamasta edusta pitkän matematiikan ylioppilaskokeessa. Tässä tutkielmassa käydään läpi kevään 2013 pitkän matematiikan kokeen tehtäviä, ja pohditaan millaisen edun CAS-laskinta käyttävä ylioppilaskokelas saa sellaiseen opiskelijatoveriinsa verrattuna, jolla on käytössään tavallinen graafinen laskin ja taulukkokirja. Tehtävien ratkaisuja lähestytään konstruktivistisen oppimiskäsityksen ja -ratkaisuprosessin näkökulmasta. Ratkaisujen lopuksi pohditaan tulevatko ylioppilaskokelaan taidot mitatuksi tehtävän tarkoittamalla tavalla, jos kokelaalla on käytössään uusimmat tekniset apuvälineet. Lisäksi tutkielmassa esitellään mahdollisuuksia hyödyntää CAS-laskinta pitkän matematiikan opetuksen apuvälineenä ja tehdään katsaus saatavilla oleviin matematiikan ohjelmistoihin. Tutkielmassa käydään läpi myös Matemaattisten aineiden opettajien liiton keväällä 2012 tekemän CAS-laskimia koskevan kyselytutkimuksen tuloksia pohjustuksena laskimista käytävälle keskustelulle.

Tutkielman tuloksena todettiin, että opettajakunta on jossain määrin kahtiajakautunut suhteessa teknisten apuvälineiden, erityisesti CAS-laskinten, käyttöön matematiikan opetuksen tukena. Yleinen vallitseva mielipide opettajien keskuudessa oli, että ainakin ylioppilaskokeen tehtäviä täytyy miettiä uudelleen, jos CAS-laskinten käyttö aiotaan sallia myös jatkossa. Jopa koko matematiikan kokeen uudistamista ehdotettiin. Tätä näkemystä tukevat myös tässä tutkielmassa pitkän matematiikan tehtävien ratkaisuista saadut kokemukset. Osa kokeen tehtävistä menetti jossain määrin merkityksensä, kun niiden ratkaisemiseen käytettiin apuvälineenä CAS-laskimia. Tutkielmassa havaittiin, että on silti mahdollista luoda myös sellaisia koetehtäviä, jotka edelleen mittaavat ylioppilaskokelaan matemaattisia taitoja luotettavasti.

Avainsanat - Nyckelord - Keywords
CAS-laskimet, matematiikan opetus, pitkän matematiikan ylioppilaskoe

Säilytyspaikka - Förvaringsställe - Where deposited
Kumpulan tiedekirjasto

Muita tietoja - Övriga uppgifter - Additional information
Tutkielma on tallennettu Helsingin yliopiston digitaaliseen arkistoon Heldaan.

Sisällys

KUVIOT

1 Johdanto

Ylioppilastutkintolautakunta hyväksyi niin kutsutut CAS-laskimet sallituiksi apuvälineiksi matematiikan kokeessa kevään 2012 ylioppilaskirjoituksiin. Aiheen parissa heräsi välittömästi keskustelu siitä, onko laskimien kanssa menty jo liian pitkälle.

Funktiolaskimet ovat olleet sallittuja ylioppilaskirjoituksissa jo pitkään. Niistä saatu hyöty on lähinnä laskutoimintoja nopeuttava, mikä vapauttaa opiskelijan tekemään useampia tehtäviä ja selviytymään sallitusta kymmenestä ylioppilaskokeen tehtävässä järkevässä ajassa. 1990-luvun alussa yleistyivät niin kutsutut graafiset laskimet, joiden merkittävin uudistus funktiolaskimiin oli niiden kyky hahmotella funktioiden kuvaajia. Uudet laskimet sisälsivät toki koko joukon myös muunlaisia uusia toimintoja. Niillä voitiin ratkaista toisen ja kolmannen asteen polynomiyhtälöitä vain syöttämällä termien kertoimet laskimeen. Laskinten avulla oli mahdollista muodostaa rekursiivisia jonoja, niillä voitiin laskea matriiseja, ylläpitää tilastoja, jopa kirjoittaa pieniä ohjelmia. Graafisella laskimella oli melko vaivatonta laskea murtoluvuilla tai selvittää esimerkiksi määrätyn integraalin arvo. Monet laskimen ominaisuuksista olivat lukiossa tarpeettomia, ja niitä käyttivätkin ehkä lähinnä teknisten ja matemaattisten alojen opiskelijat.

Graafisen laskimen täysimääräinen hyödyntäminen ylioppilaskirjoituksissa olikin mahdotonta. Laskimen muisti tyhjennettiin ennen koetta, joten mitään etukäteen kirjoitettua ohjelmaa ei voitu koetilanteessa käyttää. Lisäksi laskimen korostettiin olevan vain tarkistusväline. Mitään sellaista tulosta, jota ei saanut suoraan myös funktiolaskimesta, ei voinut kokeessa käyttää vastauksena. Kaikkien välivaiheiden tuli olla näkyvissä ja niiden täytyi noudattaa matemaattista koheesiota. Mitään sellaista ei saanut vastauksessaan luonnollisesti väittää, mikä rikkoisi matematiikan sääntöjä tai olisi ratkaistavan tehtävän kannalta epäoleellista, vaikka sillä päädyttäisiinkin oikeaan vastaukseen. Täydet kuusi pistettä tuli käytännössä vain oikein ratkaistusta tehtävästä, jossa välivaiheet tukivat oikeaa lopputulosta. Tilanne oli siis näiltä osin sama kuin funktiolaskinten aikana, osa toiminnoista oli ainoastaan helpommin näppäiltävissä ja saadun vastauksen oikeellisuutta pystyi tarkastelemaan hieman monipuolisemmin.

Tällaisen käytännön ylläpitäminen testasi valtakunnallisesti korkeatasoisella tavalla ylioppilaskokelaiden matematiikan taitoja. Gaussin käyrää noudattava arvosanojen jakautuminen tasasi vielä ikäluokkien välisiä eroja ja piti huolen siitä, että vaikka koe oli jonakin vuonna erityisen helppo tai vaikea, jyvät saatiin aina eroteltua akanoista. Ylioppilaskokeen matematiikan arvosanalla oli mahdollista saada suoraan opiskelupaikka korkeakoulusta joidenkin luonnontieteellisten tiedekuntien laitoksilta. Myös muutamat muut alat, kuten lääketiede ja oikeustiede, saattoivat antaa yliopistoon pyrkijöille lähtöpisteitä hakuprosesseissaan.

Nyt olemme tulleet tilanteeseen, jossa matematiikan kokeessa sallitut uudet apuvälineet saattavat olla osaltaan rapauttamassa järjestelmää, joka on tähän asti taannut sekä riittävän määrän matemaattisille ja teknisille aloille pyrkiviä nuoria että hyvän matemaattisen osaamistason myös niille, jotka eivät matematiikkaa suoranaisesti jatko-opinnoissaan ja työelämässään tule käyttämään. CAS-laskin antaa ylioppilaskokelaalle merkittävän edun matematiikan kokeessa sellaiseen opiskelijatoveriin verrattuna, jolla vastaavaa laitetta ei ole käytössä, tai jonka käyttöä hän ei hallitse riittävän hyvin.

Matemaattisten aineiden opettajat ovat olleet jo jonkin aikaa huolissaan laskevasta matematiikan osaamisen trendistä niin peruskoulun kuin lukioidenkin puolella, ja nyt on perusteltua kysyä, ollaanko teknisten apuvälineiden myötä lipsumassa kohti tulevaisuutta, jossa matematiikka on vain harvojen hallitsema ala?

Matematiikan opiskelu on muutakin kuin laskentoa, sanoi eräs vanhempi lukion matematiikan lehtori. On syytä miettiä olemmeko menneet teknisten apuvälineiden käytössä niin pitkälle, että matematiikan menetelmien opiskelu ei enää kiinnosta, koska vastauksen saaminen kaikkine välivaiheineen on mahdollista taskulaskimen avulla. Vai liittyykö uuteen teknologiaan sellaisia hyötyjä, jotka vievät voiton haitoilta, sellaisia hyötyjä, joita emme ehkä halua nähdä, koska tuijotamme liian paljon perinteisen oppimisen menetelmiin? Onko tekniikan kehitys ja laitteiden saatavuuden parantuminen halventuneiden hintojen vuoksi mahdollistamassa jotain uutta ja tavoittelemisen arvoista?

Tässä tutkielmassa perehdyn CAS-laskinten (Computer Algebra System) käyttöön lukion pitkän matematiikan opiskelussa. Pohdin laskinten antamaa hyötyä ylioppilaskirjoitusten matematiikan kokeessa, niiden käyttöä opetuksessa sekä tietotekniikan soveltamista matematiikan opiskelussa ja opetuksessa myös yleisemmällä tasolla. Käyn läpi tällä hetkellä saatavilla olevia matemaattisia apuvälineitä ja ohjelmia sekä esittelen verkosta löytyvän oppimisaihion, jota voidaan hyödyntää lukiomatematiikan opetuksessa.

Tutkielman taustalla on Matemaattisten aineiden opettajien liiton (MAOL) keväällä 2012 tekemä kyselytutkimus matematiikan opettajille CAS-laskinten käytöstä ja sen vaikutuksista ylioppilastutkinnon matematiikan kokeeseen. Kyselyn tulokset sekä verkossa virinnyt matematiikan opettajien käymä keskustelu toimivat perustana tutkielman lopuksi esittämälleni pohdinnalle lukion matematiikan opetuksen ja opiskelun tulevaisuudesta.

2 Teoreettinen tausta

Matematiikkaa opetettaessa on pyrkimyksenä välittää oppilaille sellaiset tiedot ja taidot, joiden avulla he voivat parhaiten sopeutua ja selviytyä nykyaikaisessa tietoyhteiskunnassa. Yleinen vaatimus on, että oppilaiden olisi pystyttävä arvioimaan tietoa kriittisesti ja mahdollisuuksien mukaan saavutettava valmiudet luoda uutta tietoa. (Ahtee & Pehkonen, 2000.)

Oppilaan toimintoihin voidaan olettaa vaikuttavan kulttuuriset tuotteet, joiden kautta välittyvät hänen arvot, taustat ja kehitystekijät. Matemaattiset käsitteet, tietokoneet ja muut mallintamisen apuvälineet asetetaan aluksi johonkin tarkoitukseen, mutta ne jatkavat elämäänsä ja poikkeavat suurestikin syntyvaiheensa muodoista (Leino, 1993).

Perusopintojen suorittamisen jälkeen ihmiset usein käyttävät ainoastaan yksinkertaista matematiikkaa, mutta koulussa opittua *matemaattista ajattelua* voidaan tarvita yllättävänkin paljon. Koulumatematiikassa, ja erityisesti lukion pitkän matematiikan oppimäärässä, ei ole kyse pelkästään mekaanisesta laskutaidosta. Matemaattinen ajattelu antaa lähtökohdan jokapäiväisen elämän perustaitoihin, kuten loogiseen järjestelyyn ja itseilmaisuun. (Soedjadi, 2004.)

Matematiikka ei ole samanlainen oppiaine kaikille oppilaille. Eroja on havaittu myös opettajien uskomuksissa matematiikkaan sekä ongelmanratkaisun eri menetelmiin. (Leino, 1993.)

2.1 Konstruktivistinen oppimiskäsitys

Matematiikan opetuksen perustaksi on 1980-luvulta lähtien muodostunut konstruktivistinen oppimiskäsitys niin opetuksen tutkimuksen kuin käytännönkin teoreettiseksi pohjaksi. Sen mukaan opettaja ei voi siirtää tietoa oppilaalle, vaan oppilaan on oman toimintansa kautta suhteutettava uudet asiat aikaisempiin tietorakenteisiin (Repo, 1993).

Konstruktivistisessa oppimiskäsityksessä opetus ja oppimateriaalit pyrkivät rakentamaan oppimisympäristön opiskelijalle suotuisaksi tilanteeksi, missä opetus voisi pohjata opiskelijan itsensä tekemiin havaintoihin. Opettaessaan opettaja antaa oman käsityksensä tiedon olemuksesta oppilaille, mutta myös oppilaalla ja oppimateriaalin laatijalla tulisi olla samansuuntainen käsitys tiedon luonteesta, jotta tehokasta oppimista voi tapahtua. Tämä korostuu erityisesti silloin kun opettaja käyttää itse tekemäänsä materiaalia. (Koponen, 1991.)

Konstruktivismissa oppija nähdään aktiivisena tiedon rakentajana, jonka yksilöllisyydellä on tärkeä asema. Oppija ei tarkastele tietoa vain ongelmattomana, vaan osa tiedosta kiinnittyy siihen kytkeytyvistä viitteistä ja merkityksistä. Ilman käyttötarkoituksia tieto saattaakin tuntua hyödyttömältä. Oppijan aktiivisuuden korostamiseen liittyy taustaoletus, että hänellä on kontrolli omasta oppimisestaan. (Leino, 1993.)

2.2 Oppilaiden uskomukset matematiikan luonteesta

Selvitettäessä oppilaiden uskomuksia matematiikkaa kohtaan oppiaineena on havaittu samankaltaisuuksia useissa eri tutkimuksissa. Niitä ovat muun muassa ajatukset siitä, että matematiikka on vain laskemista ja että matematiikan probleemien pitäisi olla nopeasti ratkaistavissa muutaman välivaiheen kautta. Yleinen käsitys on myös se, että harjoittelun tavoitteena on pelkästään oikean vastauksen saaminen. Oppilaiden roolina nähdään matemaattisen tiedon vastaanottaja, opettaja nähdään puolestaan tiedon välittäjänä sekä sen varmistajana, että tieto on otettu vastaan. (Pehkonen, 1993.)

Tätä näkemystä vahvistaa ylioppilaskokeen asema lopullisena, ratkaisevana päättökokeena, jossa nähdään kulminoituvan koko peruskoulutuksen matemaattinen taival. Ei siis ihme, että ylioppilaskokelas haluaa panostaa kokeeseen hankkimalla parhaat apuvälineet käyttöönsä. Apuvälineiden tarpeellisuuden voidaan kuitenkin nähdä korostavan ratkaisukeskeisyyttä, missä oikea vastaus halutaan saada nopeasti ilman sen laajempaa pohdintaa (Pehkonen, 1993).

On paljastunut, ettei tosiasioiden, kuten algoritmien ja toimintamenetelmien, tunteminen pelkästään takaa menestystä matemaattisessa ongelmanratkaisussa. Tähän vaikuttavat myös ratkaisijan tekemät päätökset, käytetyt strategiat sekä hänen ratkaisunaikainen emotionaalinen tilansa. Matemaattisen ajattelun kehittyminen ei tapahdu nopeasti, koska oppija mielellään oikaisee tilaisuuden tullen ja turvautuu rutiineihin. Oppilaiden uskomusten korjaus- ja kehittämistoimenpiteet voivat lähteä vain opettajista. (Pehkonen, 1993.)

Opiskelijoiden käsitykset oppimisesta voidaan jakaa karkeasti kahteen päätyyppiin. Toisten mielestä oppiminen on lukemista, kuuntelemista, toistamista ja muistamista. Toiset taas näkevät oppimisen sisältävän ajattelua, pohtimista ja ongelmanratkaisua. Jälkimmäinen on tärkeää, kun oppimista ajatellaan konstruktivistisena prosessina. Siinä kiinnitetään huomiota erityisesti siihen, miten tietoa hankitaan ja analysoidaan. (Yrjönsuuri, 1993.)

2.3 Algoritminen ja dialektinen matematiikka

Yksi tapa mallintaa matemaattisen tiedon luonnetta on kuvata sitä joko algoritmisena tai dialektisena matematiikkana. Jälkimmäinen näistä tarkoittaa ongelmakeskeistä matematiikkaa, ensimmäinen suuntautuu toimintaan. Dialektinen matematiikka voidaan nähdä täsmällisenä loogisena tieteenä, jossa asiat ovat joko tosia tai epätosia. Algoritminen matematiikka on taas työkalu tehtävien ratkaisemiseen. (Yrjönsuuri, 1993.)

Dialektisessä matematiikassa leikitellään matematiikan pelisääntöjen määräämissä rajoissa, kun taas algoritmisessa lähestymistavassa sääntöjä voidaan vaihdella tehtävien tärkeyden sekä käytettävissä olevien välineiden mukaan. Dialektinen matematiikka kannustaa mietiskelyyn sekä päätelmien tekemiseen. Algoritminen puolestaan pyrkii kehittämään approksimaatiota, työvälineitä ja tuloksia. (Yrjönsuuri, 1993.)

2.4 Konstruktivistinen ratkaisuprosessi

Malli, jonka pohjalta konstruktivistinen ratkaisuprosessi syntyy, sisältää seuraavat vaiheet:

1. Tehtävän sisällöllinen tavoite ja sen havainnollistaminen
2. Verbaalisesta kielestä siirtyminen symboliseen esitykseen
3. Matemaattisten käsitteiden, lauseiden ja operaattoreiden ominaisuuksien pohtiminen
4. Operaattorin käyttäminen
5. Ongelman rajojen arviointi ja ratkaisun esittäminen

Mallissa pohditaan aluksi tehtävän sosiaalista viitekehystä, eli mitä menetelmää voitaisiin ratkaisussa käyttää. Verbaalisesta kielestä siirrytään tämän jälkeen merkintöjen avulla matemaattisen symbolisen kielen ympäristöön, missä lauseilla ja kaavoilla tiivistetään ongelman alkutila ja lopputila. Tämän lisäksi joudutaan pohtimaan muuttujien valintaa sekä lisäehtoja, mitkä muuttujista tunnetaan ja mitkä täytyy rakentaa uudelleen. Alkutilan muuttaminen lopputilaksi vaatii käsitteiden ja operaattoreiden ominaisuuksien pohtimista.

Tämän jälkeen siirrytään käyttämään operaattoria tai menetelmää joko päässä laskien, laskimella tai muulla vastaavalla apuvälineellä. Kun ratkaisu on saatu, täytyy lopuksi vielä arvioida ongelman rajoja sekä sitä, että kaikki mahdollisuudet on huomioitu. Rinnakkaistulosten kriittinen vertailu tavoiteltuun lopputulokseen edeltää tuloksen täsmentämistä parhaalla mahdollisella tavalla sekä matemaattisesti, että reaalimaailman kielellä. Lopputulos täytyy olla sidottu alkutilanteeseen ja vastaajan täytyy pohtia onko hän todella vastannut siihen ongelmaan, johon oli tarkoituskin vastata. (Yrjönsuuri, 1993.)

2.5 Matematiikan tehtävätyypit

Haapasalon (2004) mukaan matematiikan tehtävätyypit voidaan jakaa karkeasti kolmeen ryhmään: interpolaatio-ongelmat, dialektiset ongelmat ja suljetut ongelmat.

Interpolaatio-ongelmissa on ennalta määrätty alku- ja lopputila, jossa ratkaisuna on polun määritteleminen alusta loppuun. On mahdollista luoda myös tehtävä, jossa alkutila tiedetään, mutta loppu on avoin.

Dialektisissä ongelmissa oppilaalle annetaan vapaus vaikuttaa valintojensa kautta lopputulokseen. Alkutilanteen pohjalta valitaan oma lähestymistapa ja luodaan prosessi, jossa yrityksen ja erehdyksen kautta syntyy ristiriitatilanteita, joiden perusteella oppilas korjaa polkuaan.

Suljetuissa ongelmissa on tarkat ehdot, joiden lopputila tunnetaan. Tehtävätyyppi ei anna tilaa oppilaan omalle konstruktiolle, eikä ole siksi hyvä tehtävätyyppi uuden asian käsitteellistämiselle. Tällaisilla tehtävillä voidaan kuitenkin automatisoida laskutoimituksia ja muokata laskurutiineja.

2.6 Tekniset apuvälineet matematiikan opetuksessa

Nykyisenkaltaisen teknisen edistymisen jatkuminen riippuu hyvin pitkälti siitä, kykeneekö ihminen ymmärtämään oman ajattelunsa luonnetta. Ihmisen ajattelu edellyttää kykyä ottaa vastaan valikoidusti tietoa ympäröivästä maailmasta, sekä yhdistää se omiin aikaisempiin kokemuksiin ja muokata näin syntynyttä uutta tietoainesta. Kaikessa ihmisen ajattelutoiminnassa matemaattinen ajattelu onkin erityisen pitkälle kehittynyttä siihen sisäänrakennetun loogisuuden ja abstraktisuuden vuoksi (Yrjönsuuri, 1993). Tekniset apuvälineet voivat parhaassa tapauksessa edistää matemaattisen ajattelun kehittymistä.

2.6.1 Graafiset laskimet

Graafisten laskimien yleistyminen avasi vallankumouksellisia mahdollisuuksia tehdä kokeellista matematiikkaa käsitteenmuodostuksen johdatteluvaiheessa. Laskimet tuottivat tarvittaessa nopeasti suuren joukon kuvaajia ja antoivat oppilaille tilaisuuden tutustua funktion lausekkeen ja kuvaajan väliseen yhteyteen aikaisempaa tehokkaamman. Käyttämällä matematiikkaohjelmia päästiin toki samaan tulokseen, mutta graafisen laskimen etuina olivat henkilökohtaisuus, liikuteltavuus ja edullinen hinta. (Paasonen, 1993.)

2.6.2 CAS-ohjelmat

Tietokonealgebraohjelmat eli symbolisen laskennan ohjelmat on nähty erityisen sopiviksi matematiikan konstruktiivisen opetuksen apuvälineiksi. Ne soveltuvat oikein käytettyinä juuri matemaattisen käsitteenmuodostusprosessin ja aktiivisen tiedonhankinnan välineiksi. Niiden avulla voidaan taulukoida funktion arvoja, piirtää kuvaajia sekä käsitellä algebrallisesti funktioiden lausekkeita: sieventää muuttujan lausekkeita, ratkaista graafisesti tai symbolisesti yhtälöitä, yhtälöryhmiä, muodostaa raja-arvoja, derivoida ja integroida. Tämä mahdollistaa käsitteen eri esitysmuotojen systemaattisen analysoimisen ja tulkitsemisen siinä vaiheessa, kun käsitettä ollaan vasta muodostamassa. Kun kaikki sovellustehtävissä tarvittavat algebralliset, graafiset ja numeeriset tarkastelut suoritetaan ohjelmalla, voidaan keskittyä käsitteiden oppimiseen, säännönmukaisuuksien etsimiseen ja niiden perustelemiseen. (Repo, 1993.)

Yhdysvalloissa alettiin käyttää CAS-ohjelmistoja opetuksessa jo mikrotietokoneiden yleistyttyä 1980-luvulla ja niiden tutkimus ja käyttö räjähti lopullisesti 1990-luvulle tultaessa. Sovelluskäyttökohteina ovat olleet erityisesti differentiaalilaskenta, diskreetti matematiikka sekä lineaarialgebra. Hyötyjinä ovat olleet niin fysikaaliset tieteet, biologiset tieteet, kauppatieteet kuin liikejohtaminenkin. Sovellusten käyttö on johtanut nopeasti perinteisten kurssien sisällön uudelleen organisoimiseen, jotta matematiikkaa voitaisiin opettaa tehokkaammin. Esimerkiksi derivaatan käsitettä pyritään enenevässä määrin opettamaan CAS-ohjelmistojen avulla. (Fey, 1991.)

Monet yhdysvaltalaiset matemaatikot, jotka ovat ottaneet tietokonepohjaiset matemaattiset menetelmät osaksi opetustaan, ovat huomanneet opiskelijoiden keskittyvän entistä tarkkaavaisemmin opiskeluun, kun se tapahtuu teknologiaa hyödyntämällä perinteisten luentojen sijaan. Ohjelmistojen tarjoama mahdollisuus muokata oman tekemisen tuloksia on huomattu motivoivan opiskelijoita tekemään uudenlaista matematiikan tutkimista. Apuvälineiden käytöllä on ollut myös rinnakkaisvaikutus sosiaalisempaan matematiikan tutkimiseen, koska laitteistoja ei ole aina saatavilla jokaiselle käyttäjälle omaa, vaan joudutaan muodostamaan työpareja tai toimimaan suuremmissa ryhmissä. (Fey, 1991.)

2.6.3 Tietokoneavusteisuus opetuksessa

Samansuuntaisia näkemyksiä kuin Feyn tekemät havainnot Yhdysvalloissa on myös kotimaassa. Haapasalo (1991) näkee tietokoneavusteisen opetuksen parhaina etuina sen, että oppilaat innostuvat keskustelemaan ja pohtimaan matemaattista ongelmaa yhdessä. Ohjelmien mahdollistama palautteen nopea saaminen koetaan niinikään myönteisenä asiana. Tutkimusten tulokset näyttäisivät puhuvan myös sen puolesta, että raskasta symboliseen muotoon puettua matematiikkaa voitaisiin vähentää ja tarjota sen tilalla toisenlaista matemaattista ajattelua, missä tietokoneavusteisuus toimisi hyvänä linkkinä reaalimaailman merkintöjen ja matemaattisen symbolimaailman välillä (Haapasalo, 1991).

Meisalon ym. (2003) mielestä tietotekniikan opetuskäytön tärkeä työtapa on juuri luova ongelmanratkaisu. Parhaimmillaan teknologia antaa luovalle prosessille uusia välineitä, jotka tukevat ongelmien muotoilua, uusien ideoiden löytämistä ja laajemmin prosessin työstämistä ryhmässä. Luovassa ongelmanratkaisussa hankitaan tietoa ja yhdistellään aikaisempia tietoja uudella tavalla siten, että tulos on tekijälleen uusi. Teknologian hyväksikäyttö antaa erinomaiset puitteet juuri tähän. Kun otetaan vielä avuksi käyttäjien keskinäinen sosiaalinen toiminta laitteiden parissa tai jopa niiden välityksellä, syntyy parhaassa tapauksessa hedelmällistä keskustelua ongelmanratkaisun keinoista.

Jo lähes 40 % opettajista käyttää oman aineensa tietokoneavusteisia opetusohjelmia vähintään kuukausittain ja määrä on jatkuvasti kasvussa. Kynnys tietotekniikan yhdistämiseen opetuksessa ei ole siis välttämättä kovin korkea. (Ilomäki, 2005.)

2.6.4 Smartboardit ja oppimisaihiot

Interaktiivisella valkotaululla eli smartboardilla on mahdollista toteuttaa opetusta siten, että käytetään hyväksi auditiivisia, kinesteettisiä ja visuaalisia oppimiskanavia. Liikkuva kuva, äänet ja liikkeet havainnollistavat opetusta liittäen asian oppilaan kokemusmaailmaan sekä ennalta tuttuihin asioihin. (Laherto, 2011.)

Oppimisaihiolla tarkoitetaan digitaalista, monikäyttöistä ja monimuotoista opetusmateriaalia, jota jaetaan esimerkiksi Internetin välityksellä. Oppimisaihio voi olla myös yksittäinen pieni oppimisohjelma, joka mahdollistaa erilaisten pedagogisten mallien käytön. Aihioon liittyvä muunneltavuus mahdollistaa sen käytön myös eri vaikeustasoilla ja jopa eri oppiaineissa. (Koli & Silander, 2003.)

Sandelinin (2007) mukaan hyvässä opetusohjelmistossa on oleellisesti kolme osaa: oppimateriaali, tehtäviä ja kehityksen seuranta. Tällaisten ohjelmistojen ongelma on yleensä se, että ratkaisuja ei päästä tekemään itse ohjelmalla, vaan tehtävät ovat monivalintakysymyksiä, ja ne täytyy ratkaista erikseen kynällä ja paperilla ennen kuin vastaus annetaan koneelle. On kuitenkin kehitetty alkeismatematiikan, kuten jakolaskujen ja kertolaskujen, opetusta varten apuvälineitä, jotka opastavat käyttäjäänsä visuaalisesti askel askeleelta. Vastaavia ohjelmia on mahdollista kehittää myös vaativampien matemaattisten käsitteiden visualisointiin. (Sandelin, 2007.)

3 Tutkimusmenetelmien esittely

Seuraavassa luvussa käyn läpi CAS-laskinten käyttöä ja niistä saatua välitöntä hyötyä ylioppilaskirjoitusten matematiikan kokeessa. Esimerkkeinä toimivat kevään 2013 pitkän matematiikan kokeen kolme tehtävää. Arvioin tehtävien ratkaisuissa sitä, miten hyvin koetehtävät mittaavat ylioppilaskokelaan ongelmanratkaisutaitoja konstruktivistisen ratkaisuprosessin teorian pohjalta. Tehtäviä ratkaistaessa on apuvälineenä käytetty Texas Instrumentsin TI-Nspire CX CAS -laskinta sekä saman yrityksen tekemää opettajan PC-sovellusta.

Tämän jälkeen esittelen CAS-laskimen käyttöä matematiikan opetuksessa sekä käyn läpi tällä hetkellä saatavilla olevia matematiikan ohjelmistoja. Esimerkkinä jälkimmäisistä esittelen verkosta löytyvän GeoGebra-sovelluksen pohjalta luodun oppimisaihion.

Luvussa 5 käyn läpi tuloksia matematiikan opettajien ajatuksista CAS-laskinten käytöstä MAOLin tekemän kyselytutkimuksen pohjalta.

4 Tutkimuksen toteutus

Ylioppilastutkintolautakunta salli kevään 2012 ylioppilaskokeesta lähtien kaikkien laskinten käytön apuvälineenä matematiikan kokeessa. Aiheen tiimoilta nousi jo tuolloin kriittistä keskustelua, joka sai jatkoa kevään 2013 kokeen jälkeen. Tutkielman liitteenä 2 on Lohjan Yhteislyseon lukion matemaattisten aineiden opettajien julkinen kannanotto viimeisimpään ylioppilaskokeeseen.

4.1 Ylioppilaskoetehtävien ratkaiseminen CAS-laskimilla

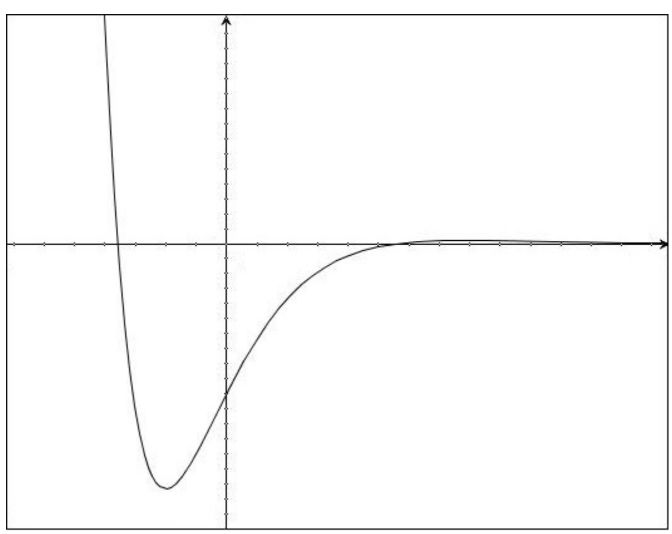
Seuraavassa tutkin tuoreita, kevään 2013 pitkän matematiikan tehtäviä, ja pohdin niiden ratkaisuja sekä perinteisin menetelmin että CAS-laskinta käyttäen.

4.1.1 MAA K2013 tehtävä 5

Määritä funktion $(x^2 - x - 5)e^{-x}$ suurin ja pienin arvo, kun $x \geq 0$.

Pohditaan tehtävää ensin sellaisen ratkaisijan näkökulmasta, jolla on käytössään graafinen laskin ja taulukkokirja.

Ensimmäisenä askeleena tehtävää hahmottaakseen on luonnollista piirtää funktion kuvaaja. Laskimen GRAPH-toiminnolla sellainen syntyy helposti.



Kuva 4-1. Funktion $f(x) = (x^2 - x - 5)e^{-x}$ kuvaaja

Kuvaajasta nähdään funktion kulku, ja voidaan päätellä, että kun $x \geq 0$, funktio saa minimiarvonsa pisteessä, jossa kuvaaja leikkaa y-akselin. Maksimiarvon selvittämiseen tarvitaan derivaattaa.

Taulukkokirjasta löytyy kaava $D(fg) = f'g + fg'$. Näin ollen

$$\begin{aligned} f'(x) &= D[(x^2 - x - 5)e^{-x}] \\ &= (2x-1)e^{-x} - (x^2 - x - 5)e^{-x} \\ &= (2x - 1 - x^2 + x + 5)e^{-x} \\ &= (-x^2 + 3x + 4)e^{-x}. \end{aligned}$$

Tämän jälkeen etsitään derivaatan nollakohdat. Tulon nollasäännön mukaan $f'(x) = 0$, kun $-x^2 + 3x + 4 = 0$ tai $e^{-x} = 0$. Jälkimmäinen ei toteudu millään x:n arvolla, joten ratkaistaan $-x^2 + 3x + 4 = 0$. Vastaus saadaan joko syöttämällä kertoimet suoraan laskimen ratkaisukaavaan tai laskemalla

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 4}}{2 \cdot (-1)}.$$

Ratkaisuksi saadaan $x = 4$ ja $x = -1$. Koska ehtona oli $x \geq 0$, vain $x = 4$ kelpaa. Tehdään seuraavaksi derivaatan merkkikaavio.

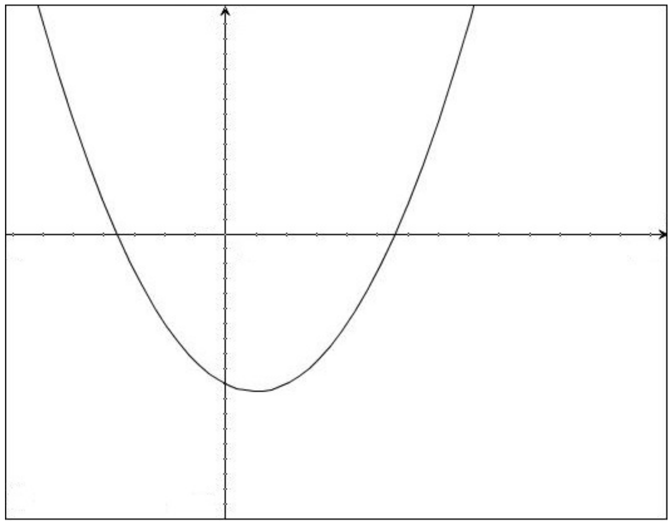
	-1	0	4
$-x^2 + 3x + 4$		$+$	$-$
e^{-x}		$+$	$+$
$f'(x)$		$+$	$-$
f:n kulku		$\nearrow$	$\searrow$

Kuva 4-2. Derivaatan merkkikaavio

Lasketaan sitten $f(x)$:n arvo pisteissä $x = 0$ ja $x = 4$. Saadaan

$$f(0) = (0^2 - 0 - 5)e^{-0} = -5 \text{ ja } f(4) = (4^2 - 4 - 5)e^{-4} = \frac{7}{e^4} (\approx 0{,}128).$$

Varmistetaan vielä, että $f(x) \geq 0$, kun $x > 4$. Saadaan $(x^2 - x - 5)e^{-x} \geq 0$. Ratkaistaan nyt $(x^2 - x - 5)e^{-x} = 0$, josta $e^{-x} = 0$ ei ole määritelty. Etsitään siis yhtälön $x^2 - x - 5 = 0$ ratkaisuja, joiksi saadaan $x = \frac{1-\sqrt{21}}{2}$ ja $x = \frac{1+\sqrt{21}}{2}$.



Kuva 4-3. Funktion $g(x) = x^2 - x - 5$ kuvaaja

Piirtämällä kuvaajan, näemme, että $g(x) \geq 0$, kun $x \leq \frac{1-\sqrt{21}}{2} \approx -1{,}79$ tai $x \geq \frac{1+\sqrt{21}}{2} \approx 2{,}79$. Näin ollen voimme todeta, että $f(x) \geq 0$, kun $x > 4$, joten funktion pienin arvo todella on $f(0) = -5$ ja suurin arvo on $f(4) = \frac{7}{e^4}$, kun $x \geq 0$.

Päätelmiä

Ratkaisusta nähdään, että vaikka kyseessä on helponoloinen rutiinitehtävä, on täysin oikein lasketun tuloksen eteen nähtävä kohtuullisesti vaivaa. Tutkitaan tehtävän ratkaisua konstruktivistisen ratkaisuprosessin pohjalta:

1. Tehtävän sisällöllinen tavoite ja sen havainnollistaminen
2. Verbaalisesta kielestä siirtyminen symboliseen esitykseen

Tehtävässä on annettu tulomuodossa oleva funktio, jonka toinen tekijä on polynomi- ja toinen eksponenttifunktio. Tehtävässä kysytään funktion minimi- ja maksimiarvoa annetulla välillä. Koska funktion lausekkeesta on melko vaikeaa suoraan nähdä sen kuvaajan kulkua, siitä on järkevää piirtää kuva laskimen avulla. Graafia voi myös zoomata laskimen ruudulla kaikkien kriittisten pisteiden tarkistamiseksi.

3. Matemaattisten käsitteiden, lauseiden ja operaattoreiden ominaisuuksien pohtiminen

Kun funktion kuvaajan perusteella on havaittu, miten määrittelyjoukko rajaa vastausta, voidaan alkaa pohtia keinoja ongelman ratkaisemiseksi. Funktion minimiarvo näyttäisi ratkeavan helposti, mutta maksimiarvon etsimiseen tarvitaan jotain muuta operaatiota. Paikallisten ääriarvojen etsimiseen soveltuu derivaatta, jonka pohjalta voidaankin jo lähteä laskemaan. Jos tulon derivaatta ei ole muistissa, taulukkokirja toimii apuna.

4. Operaattorin käyttäminen

Funktion maksimi ja minimi löytyvät joko derivaatan nollakohdista tai välin päätepisteistä. Derivaatan nollakohdista selviää, että toinen huipuista on maksimiarvo, mutta minimiarvo ei mahdu määrittelyalueelle, joten sen täytyy olla välin päätepisteessä. Mekaaniset laskutoimitukset eivät ole vaikeita, mutta vaativat silti tarkkaavaisuutta, jotta lauseke sieventyy paperilla oikein.

5. Ongelman rajojen arviointi ja ratkaisun esittäminen

Kun derivaatan nollakohdat on selvitetty, joudutaan uudelleen pohtimaan määrittelyjoukkoa. Onko varmasti tutkittu kaikki ratkaisut? Ennen kuin lopullinen vastaus annetaan, joudutaan itse asiassa palaamaan vielä kohtiin 3 ja 4, jotta varmistutaan tehtävän kaikkien ratkaisujen, myös hylättävien, läpikäynnistä.

Pohditaan seuraavaksi tehtävää sellaisen ratkaisijan kannalta, jolla on käytössään symbolista laskentaa osaava CAS-laskin.

Näppäillään laskimeen: $f\mathrm{Min}\left((x^2 - x - 5)e^{-x}, x\right) \mid x \geq 0$.

Laskin antaa vastaukseksi: $x = 0$.

Näppäillään laskimeen: $f\mathrm{Max}\big((x^2 - x - 5)e^{-x}, x\big) \mid x \geq 0$.

Laskin antaa vastaukseksi: $x = 4$.

Näppäillään laskimeen: $(0^2 - 0 - 5)e^{-0}$.

Laskin antaa vastaukseksi: -5.

Näppäillään laskimeen: $(4^2 - 4 - 5)e^{-4}$.

Laskin antaa vastaukseksi: $\frac{7}{e^4}$.

Päätelmiä

Tehtävän luonne muuttuu täysin erilaiseksi. Probleema, joka lähtökohtaisesti vastasi hyvin Haapasalon (2004) määritelmää interpolaatio-ongelmasta, jossa tehtävän loppuosa oli avoin, muuntautuukin suljetuksi ongelmaksi ja rutiinilaskutehtäväksi. Tehtävän vaatimustaso ilman CAS-laskinta on aivan toista luokkaa ja ratkaisumallin keksiminen mittaa aivan toisenlaisia taitoja.

Molempien ratkaisijoiden täytyy tietysti ymmärtää, mitä halutaan saada selville, kun kysytään funktion suurinta ja pienintä arvoa. Jälkimmäisessä ratkaisumenetelmässä, joka sisältää vain mekaanisen laskutoimituksen, jää kuitenkin tehtävän geometrinen tulkinta kokonaan läpikäymättä. Laskija ottaa lisäksi tietoisen riskin siitä, että laskin todella huomioi ehtona annetun määrittelyjoukon oikein. Ensimmäisessä ratkaisumallissa oli nimittäin tarkasteltavana useita eri funktioita samalla määrittelyvälillä, eikä CAS-laskimella ratkaistaessa tarvitse olla kiinnostunut kuin tehtävän annosta suoraan saadusta yhtälöstä määrittelyväleineen, jotka saadaan näppärästi syötettyä laskimen $f\mathrm{Min}$- ja $f\mathrm{Max}$-toimintojen parametreiksi.

Myöskään derivaatan käsitettä ei CAS-ratkaisijan tarvitse ymmärtää. Tämä on kuitenkin tehtävätyypin kannalta yksi keskeisimmistä asioista, mitä ylioppilaskokelaan osaamisesta juuri tällä ongelmalla haluttiin mitata. Haapasalon ym. (1995) tutkimuksessa paljastuu, että suurimmat puutteet korkeakouluun tulevien raja-arvon käsitteen tuntemuksessa ovat nimenomaan geometriseen tulkintaan liittyviä. Tutkimuksessa esitetään, että jos derivaatan geometrista ideaa ei ymmärrä, ei mekaanisista laskurutiineista ole paljon hyötyä. Geometrista hahmottamista ei puolestaan osata, koska opiskelijat eivät pysty luomaan käsitteisiin sopivia mielikuvia (Haapasalo ym., 1995).

Mitä CAS-laskimella annettu ratkaisu sitten mittaa? Tietystikin laskimen käytön hallintaa. Syntaksi tulee syöttää tarkalleen oikein, muuten laskin antaa virheilmoituksen. Operaattorin valinta täytyy tehdä oikein, mutta tämänkin voi nähdä enemmän ohjelmallisena osaamisena. Operaattoria kun ei sitäkään tarvitse muistaa ulkoa, koska laskimen valikoista voi halutessaan selata tarjolla olevia ratkaisufunktioita, ja myös syntaksin kirjoitukseen saa apua.

Miten Ylioppilastutkintolautakunta sitten suhtautuu kyseisen tehtävän annettuihin ratkaisuihin? Laskinohjeessa sanotaan seuraavaa:

> "Matematiikan kokeessa saa käyttää yhtä tai useampaa laskinta. Kaikki funktio-, graafiset ja symboliset laskimet ovat sallittuja. Kokelaan on tyhjennettävä laskimen muisti ennen koetta, ja tarvittaessa hänen on selvitettävä tyhjennysmenetelmä tarkastajalle. Epäselvissä tapauksissa laskinta ei hyväksytä. Kokeessa ei saa olla mukana laskinten erillisiä käyttöohjeita, lisämuisteja eikä tiedonsiirtoon tarkoitettuja välineitä. Kokeen aikana laskinta ei saa lainata toiselta kokelaalta. Koulu voi kuitenkin lainata laskimen, jos kokelaan laskin menee epäkuntoon."

Ohjetta tarkennettiin vielä ennen koetta seuraavasti:

> "Laskin on kokeen apuväline, jonka rooli arvioidaan tehtäväkohtaisesti. Jos ratkaisussa on käytetty symbolista laskintaa, sen on käytävä ilmi suorituksesta. Analysointia vaativien tehtävien ratkaisemisessa pelkkä laskimella saatu vastaus ei riitä ilman muita perusteluja. Sen sijaan laskimesta saatu tulos yleensä riittää rutiinitehtävissä ja laajempien tehtävien rutiiniosissa. Tällaisia ovat esimerkiksi lausekkeiden muokkaaminen, yhtälöiden ratkaiseminen sekä funktioiden derivointi ja integrointi."

(Ylioppilastutkintolautakunta, 2013).

On toistaiseksi epäselvää, miten YTL reagoi esimerkkitehtävän arvostelussa. Onko kyseessä rutiinitehtävä vai soveltava tehtävä? Täytyykö kokelaan osoittaa ymmärtäneensä tehtävän merkitys esimerkiksi geometrisen tarkastelun kautta, ja onko tehtävän ratkaisun ohessa syntyvien hylättävien rinnakkaisratkaisujen oltava näkyvissä tehtäväpaperissa perusteluineen? Symbolinen laskinhan toimii tässä tehtävässä sikäli erikoisella tavalla, että se antaa neljän rivin näppäilyllä täsmälleen oikean tuloksen, eikä mitään virheellistä tulkintaa pääse vastauksen antajalle edes syntymään.

4.1.2 MAA K2013 tehtävä 11

Millä muuttujan x arvolla jono $\ln 2, \ln(2^x - 2), \ln(2^x + 2)$ on aritmeettinen?

Tarkastellaan tehtävän ratkaisua ensin CAS-laskinta käyttäen.

On tiedettävä, mitä tarkoittaa aritmeettinen jono. Siinä jonon jäsenten pitää olla yhtä etäällä toisistaan, toisin sanoen peräkkäisten jäsenten erotus on vakio $a_{n+1} - a_n = d$. Tässä tehtävässä se tarkoittaa siis $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$ eli $\ln(2^x - 2) - \ln 2 = \ln(2^x + 2) - \ln(2^x - 2)$.

Syötetään laskimeen: $\mathrm{solve}(\ln(2^x - 2) - \ln(2) = \ln(2^x + 2) - \ln(2^x - 2), x)$.
Laskin antaa vastauksen: $x = \frac{\ln 6}{\ln 2}$.

Tarkastellaan sitten ratkaisua ilman CAS-laskimen apua. Sievennetään

$$\begin{aligned}
\ln(2^x - 2) - \ln 2 &= \ln(2^x + 2) - \ln(2^x - 2) \\
\ln(2^x - 2) + \ln(2^x - 2) &= \ln(2^x + 2) + \ln 2 \\
\ln(2^x - 2)^2 &= \ln\big(2 \cdot (2^x + 2)\big) \\
(2^x - 2)^2 &= 2 \cdot (2^x + 2) \\
2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 4 &= 2 \cdot 2^x + 4 \\
2^{2x} - 6 \cdot 2^x &= 0 \\
2^x \cdot 2^x - 6 \cdot 2^x &= 0 \\
2^x \cdot (2^x - 6) &= 0,
\end{aligned}$$

josta tulon nollasäännön mukaan $2^x = 0$ tai $2^x - 6 = 0$. Koska $2^x = 0$ ei tuota ratkaisua, lasketaan vielä $2^x - 6 = 0$. Saadaan

$$\begin{aligned}
2^x &= 6 \\
\ln 2^x &= \ln 6 \\
x \cdot \ln 2 &= \ln 6 \\
x &= \frac{\ln 6}{\ln 2}.
\end{aligned}$$

Päätelmiä

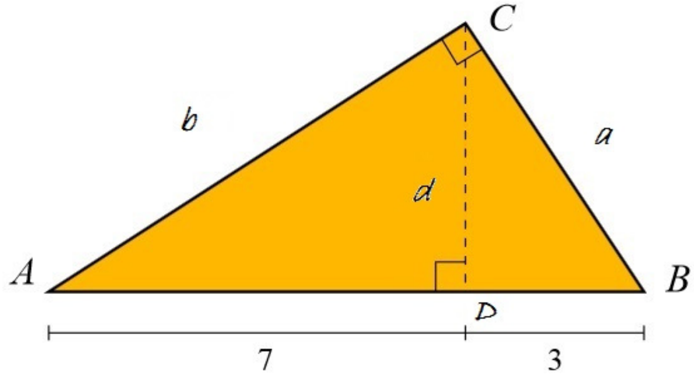
Tehtävätyyppi on suljettu ongelma, joka mittaa kahden asian osamista: lukujonoja sekä eksponenttilauseen sieventämistä. Tehtävän vastaus sievenee vaihe vaiheelta, kun käytetään logaritmin laskusääntöjä.

Lukiomatematiikassa esitellään sekä aritmeettinen että geometrinen jono, ja kokelaan tulee kyseistä tehtävää ratkaistessaan muistaa aritmeettisen jonon määritelmä, jotta hän voi aloittaa tehtävän ratkaisun. CAS-laskinta käyttävän henkilön pohdinta päättyy kuitenkin tähän. Hän saa vastauksen suoraan laskimen solve-toiminnolla. Ilman CAS-laskinta oleva henkilö joutuu puolestaan esittämään aritmeettisia taitojaan oikean vastauksen löytämiseksi, eikä tähän ole oikeastaan mitään oikotietä. Tehtävän päätteeksi hän joutuu vielä tekemään päätöksen siitä, missä muodossa hän tuloksen antaa. Lauseen sieventämisen testaamisen yksi mittari on luonnollisesti se, kuinka hyvin tehtävän tekijä ymmärtää tarkkojen arvojen merkintämaailmaa. Yksi virhetyyppi on tarjota kyseisen tehtävän vastaukseksi desimaalilukua $2{,}584962501$, joka pahimmassa tapauksessa vie ratkaisijaltaan muuten oikein tehdystä tehtävästä pisteen tai kaksi. CAS-laskin puolestaan tekee valinnan ratkaisijan puolesta ja antaa käyttäjälleen varmuuden siitä, että lopputulos on varmasti sievennetyssä muodossa.

On täysin selvää, että jos tehtävä ratkaistaan CAS-laskinta käyttäen, ainoa asia mikä tulee mitatuksi (näppäilytekniikan lisäksi) on ymmärrys aritmeettisen jonon luonteesta. Logaritmi- ja eksponenttitermejä sisältävät lausekkeet ovat haastavimpia sievennystaitoja vaativia lukiomatematiikan tehtäviä. Opettajat ovat olleet erityisen huolissaan juuri näiden taitojen heikkenevästä tasosta (ks. liite 2). On vaikeaa nähdä, miten jatkossa esimerkiksi differentiaaliyhtälöiden ratkaiseminen onnistuu henkilöltä, jolla ei ole käsitystä eksponenttifunktion luonteesta. Toki, jos lähtökohtana pidetään sitä, että CAS-laskinta käytetään myös jatko-opinnoissa kaikkien matemaattisten tehtävien ratkaisemiseen, kyseistä ongelmaa ei välttämättä ole.

4.1.3 MAA K2013 tehtävä 4

Laske oheisen kuvan suorakulmaisen kolmion ABC pinta-alan tarkka-arvo.



Kuva 4-4. MAA K2013 tehtävän 4 kuva

Merkitään hypotenuusalle AB piirrettyä normaalia d:llä. Merkitään d:n ja AB:n leikkauspistettä D:llä. Huomataan, että kolmiot ADC ja CDB ovat yhtenevät, sillä $\sphericalangle ADC = \sphericalangle CDB = 90°$ ja $\sphericalangle CAD = 90° - \sphericalangle DCA = \sphericalangle BCD$, eli kolmioilla on kaksi yhtä suurta kulmaa ja yksi yhteinen sivu (kks). Nyt voidaan merkitä $\frac{7}{d} = \frac{d}{3} \Rightarrow d^2 = 21 \Rightarrow d = \pm\sqrt{21}$. Kolmion pinta-alaksi saadaan $\frac{1}{2}(7+3)\sqrt{21} = 5\sqrt{21}$.

Toinen tapa: Tehtävää voi lähteä ratkaisemaan Pythagoraan lauseen avulla merkitsemällä kulman A vastaista kateettia a:lla ja kulman B vastaista kateettia b:llä. Nyt pätee

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = (7+3)^2 \\ 7^2 + d^2 = b^2 \\ 3^2 + d^2 = a^2 \end{cases}.$$

Sijoittamalla toinen ja kolmas yhtälö ensimmäiseen yhtälöön saadaan

$$\begin{aligned} 3^2 + d^2 + 7^2 + d^2 &= 10^2 \\ 2d^2 &= 10^2 - 3^2 - 7^2 \\ d^2 &= \frac{42}{2} \\ d &= \pm\sqrt{21}. \end{aligned}$$

Ja kysytty pinta-ala on siis $5\sqrt{21}$.

Yhtälöryhmä voidaan ratkaista myös CAS-laskimella.

Syötetään laskimeen: cSolve$\left(\begin{cases} a^2+b^2=(7+3)^2 \\ 7^2+d^2=b^2 \\ 3^2+d^2=a^2 \end{cases}, d\right)$.

Laskin antaa vastauksen: $d=\sqrt{(b^2-49)}$ and $a=\sqrt{(b^2-40)}$ and $b^2=70$.

Syötetään laskimeen: $\frac{1}{2}(7+3)\sqrt{70-49}$.

Laskin antaa vastauksen: $5\sqrt{21}$.

Päätelmiä.

Tehtävä on tyypiltään varsin onnistunut dialektinen ongelma, johon on olemassa enemmän kuin yksi oikea ratkaisutapa. Pohditaan tehtävää konstruktivistisen ratkaisuprosessin kannalta:

Kolmion pinta-ala saadaan kaavasta $\frac{kanta \cdot korkeus}{2}$, mutta mikä tehtävässä annetuista mitoista on järkevintä kiinnittää kannaksi ja mikä korkeudeksi? Mitä muita muuttujia kuvioon voidaan kiinnittää? Kuviota voidaan lähteä tutkimaan yhtenä isona tai kahtena pienempänä suorakulmaisena kolmiona. Käytettävissä olevia operaattoreita on ainakin Pythagoraan lause.

Yrityksen ja erehdyksen kautta tehtävän ratkaisijan on mahdollista päästä oikeaan lopputulokseen useita eri reittejä. Jos geometriset tulkinnat yhtenevistä kolmioista on hallinnassa, tehtävästä saadaan helppo verranto, jolla kolmion korkeus selviää. Pythagoraan lausetta soveltamalla korkeus selviää myös yhtälöryhmän avulla. Kolmion kanta on tehtävässä valmiiksi ilmoitettu, joten pinta-ala saadaan ratkaistua.

CAS-laskimesta ei ole tehtävän ratkaisun kannalta olennaista apua. Ratkaistaessa toisen asteen polynomeja sisältäviä yhtälöryhmiä CAS-laskin antaa joukon vastauksia, jotka joudutaan hylkäämään, koska geometrisissä tehtävissä negatiivisia pituuksia ei huomioida. Helppojen lukuarvojen vuoksi laskinta ei tarvita tehtävässä myöskään tarkan arvon ratkaisemiseen.

4.2 Teknisten apuvälineiden hyödyntäminen opetuksessa

Suurimman muutoksen CAS-laskinten hyödyntämisessä voidaan ajatella tulevan algebrallisten laskujen opettamisessa. Ajankäytön jaossa opettajan on mahdollista suunnitella perushahmotuksen ja laskutoimitusten rutiiniharjoittelun suhdetta uudelleen. Molempia tarvitaan, mutta CAS-laskimia hyödyntämällä painopistettä voidaan siirtää uuden asian oppimisen alkuvaiheessa käsitteiden ymmärtämisen varmistamiseen. CAS-laskimien eduiksi on luettava myös oppilaan mahdollisuus tarkistaa suorituksensa ja merkintänsä, minkä toivoisi tuovan varmuutta toimia itsenäisenä matemaattisena ajattelijana. Erityisesti kirjainalgebran kohdalla hyöty on kiistaton. Ylioppilastutkintolautakunnan jäsenet ja sensorit valittelevatkin vuodesta toiseen, että kokelaat eivät algebrallisissa tehtävissä ymmärrä mitä ovat tekemässä. (Luoma-aho & Korhonen, 2011.)

4.2.1 CAS-laskimen käyttö jatkuvuuden opettamisessa

Haapasalon ym. (1997) tutkimuksessa paljastui, että lukion pitkän matematiikan toisen luokan oppilaat hallitsevat melko heikosti funktion jatkuvuuden käsitteen. Symbolinen tuottaminen hallittiin testeissä merkittävästi heikommin kuin kuvallinen ja verbaalinen tuottaminen. Huolimatta symbolisten muotojen ylitarjonnasta kouluopetuksessa oppilaat kokivat ne vaikeiksi ja pyrkivät muistamaan ne ulkoa niiden merkityksen jäädessä lähes vaille ymmärrystä. Haapasalon ym. mielestä syitä voi etsiä oppikirjoista, joissa jatkuvuus käsitellään varsin yksipuolisesti lähinnä mekaanisten tehtävien avulla. Jopa oppilaat, joilla oli hyvä matematiikan arvosana, kykenivät prosessoimaan jatkuvuuden käsitettä kovin suppeasti. (Haapasalo ym., 1997.)

Tutkitaan seuraavaksi jatkuvuuden opettamista CAS-laskinympäristössä. Esimerkki on laadittu TI-Nspire CX CAS -opettajaohjelmalla.

Tehtävä: Millä a:n arvolla f on jatkuva kohdassa $x = a$, kun

$$f(x) = \begin{cases} x+1, x \leq a \\ 2x^2 + 3x - 3, x > a \end{cases}?$$

Tutki ratkaisua myös geometrisesti.

Funktio on jatkuva pisteessä a, jos sillä on raja-arvo pisteessä a, eli sen molemmin puoleiset raja-arvot ovat samat, ja jos funktion arvo pisteessä a on sama kuin sen raja-arvo pisteessä a. Symbolisesti ilmaistuna siis

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

Syötetään laskimeen: $\mathrm{Define}\, f(x) = \begin{cases} x+1, x \leq a \\ 2x^2+3x-3, x > a \end{cases}.$

Laskin ilmoittaa: Valmis.

Lasketaan sitten vasemmanpuoleinen raja-arvo: $\lim_{x \to a^-} f(x)$.

Laskin antaa vastauksen: $a+1$.

Lasketaan seuraavaksi oikeanpuoleinen raja-arvo: $\lim_{x \to a^+} f(x)$.

Laskin antaa vastauksen: $2 \cdot a^2 + 3 \cdot a - 3$.

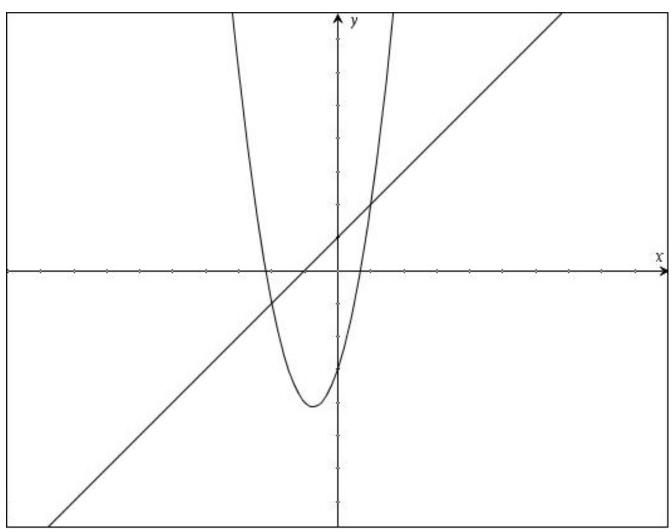
Lasketaan vielä funktion arvo kohdassa a: $f(a)$.

Laskin antaa vastauksen: $a+1$.

Merkitään seuraavaksi saadut vastaukset yhtä suuriksi ja ratkaistaan a. Syötetään laskimeen: $\mathrm{solve}(2a^2+3a-3 = a+1, a)$.

Laskin antaa vastauksen: $a = -2 \text{ or } a = 1$.

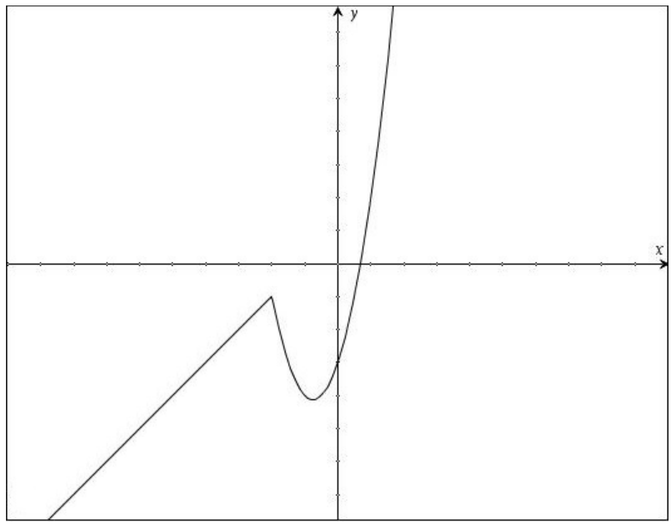
Tarkastellaan sitten tuloksia laskimen kuvaaja-toiminnolla.



Kuva 4-5. Funktioiden $f_1(x) = x + 1$ ja $f_2(x) = 2x^2 + 3x - 3$ kuvaajat

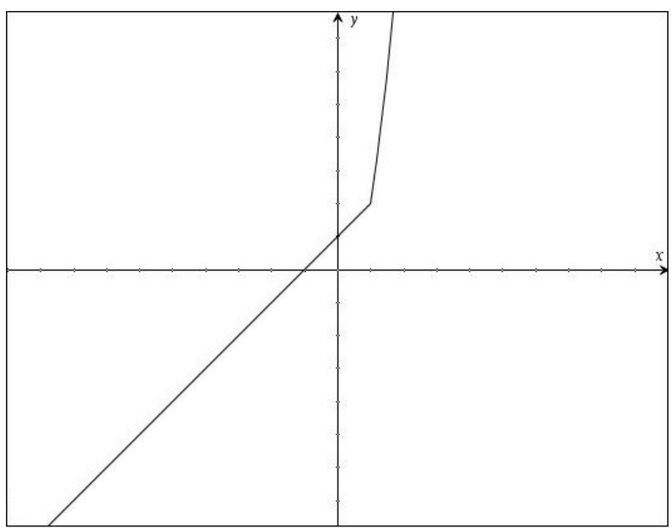
Syötetään laskimeen funktioiksi $f_1(x) = x + 1$ ja $f_2(x) = 2x^2 + 3x - 3$. Kuvaajasta nähdään, että kohdissa $x = -2$ ja $x = 1$ voidaan paloitellusti määritellyn funktion osa vaihtaa toiseen siten, että se säilyy jatkuvana.

Todetaan tämä syöttämällä laskimeen: $f_3(x) = f(x)|a = -2$. Saadaan kuvaaja:



Kuva 4-6. Funktion $f_3(x) = f(x)|a = -2$ kuvaaja

Syötetään sitten laskimeen $f_4(x) = f(x)|a = 1$. Saadaan kuvaaja:



Kuva 4-7. Funktion $f_4(x) = f(x)|a = 1$ kuvaaja

Funktioiden f_3 ja f_4 kuvaajat voidaan siis piirtää "nostamatta kynää paperista".

Päätelmiä

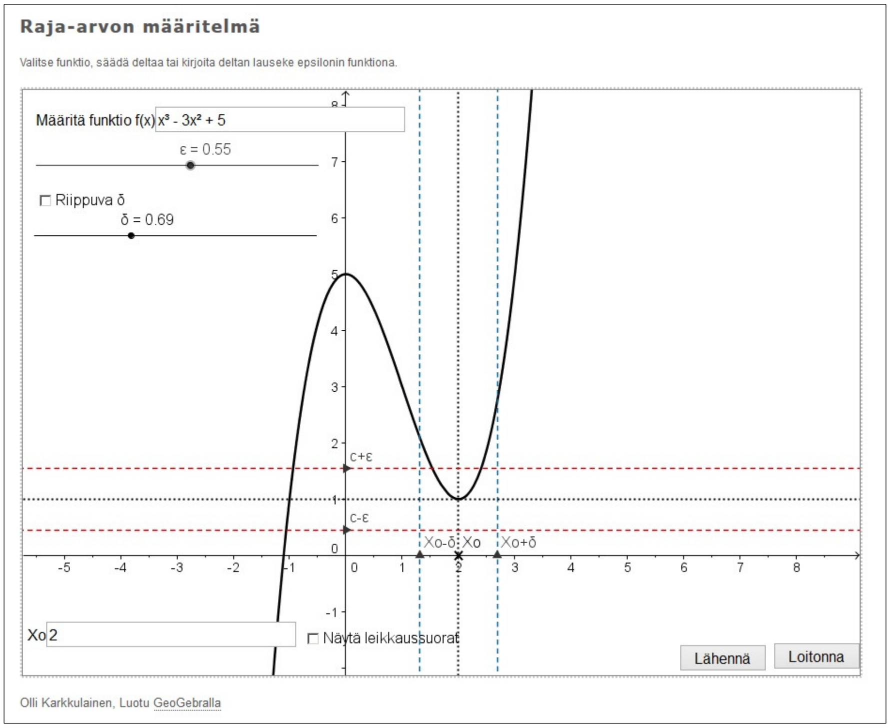
Tehtävää voisi kuvailla dialektiseksi ongelmaksi, jossa oppilaalla on mahdollisuus kokeilla erilaisia keinoja ratkaisun löytämiseksi. Vaikka CAS-laskimella saatu hyöty tehtävän ratkaisemisessa on kiistaton, se ei kuitenkaan anna kohtuutonta etulyöntiasemaa sellaiseen oppilaaseen nähden, jolla on käytössään tavallinen graafinen laskin. Funktion paloittain määrittely sekä merkintöjen kiinnittäminen ja niiden vieminen sovelluksesta toiseen tekevät toki CAS-laskimesta miellyttävämmän käyttää. On kuitenkin ymmärrettävä tehtävän matemaattinen luonne, jotta se olisi mahdollista ratkaista teknisillä apuvälineillä.

Vaikka algebralliseen työhön ei käytetä aikaa, Haapasalon ym. (1995, 1997) peräänkuuluttaman raja-arvon ja jatkuvuuden käsittely geometrisin tulkinnoin toteutuu tässä tehtävässä Pehkosen (1993) ja Yrjönsuuren (1993) toivomalla tavalla, missä dialektinen matematiikka kannustaa mietiskelyyn sekä päätelmien tekemiseen. Vastaus ei selviä liian helposti muutamalla laskimen klikkauksella.

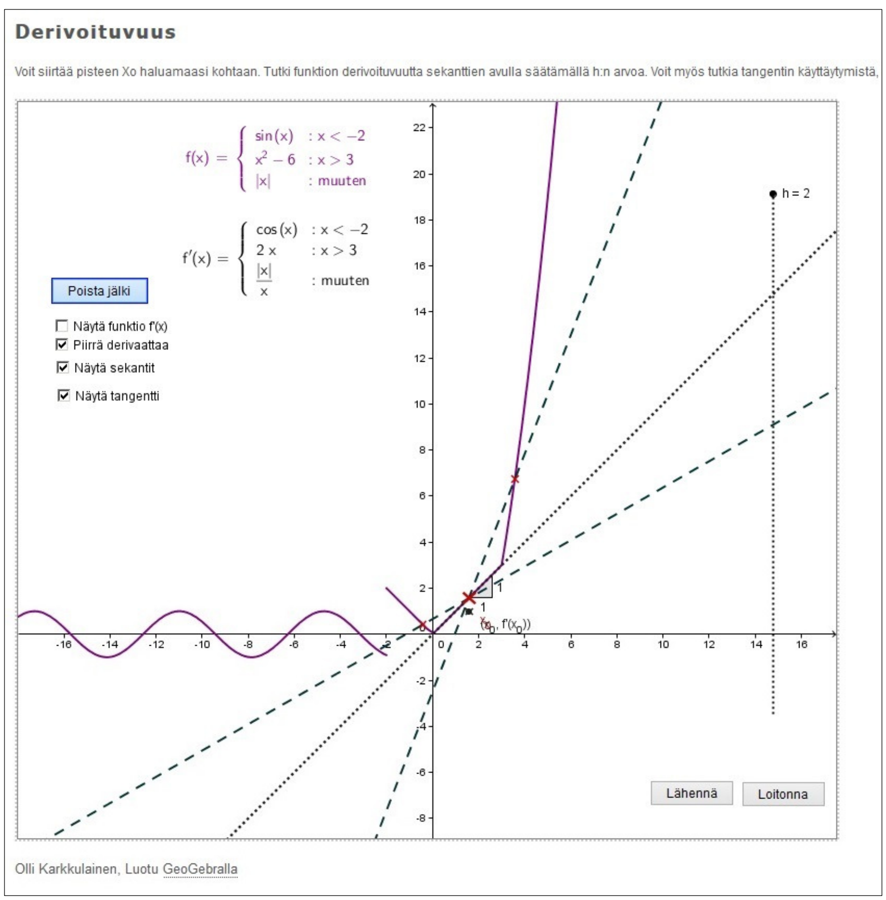
4.2.2 GeoGebra

Geometrisia tehtäviä ratkaistaessa peruskoulun ja lukion luokkaopetuksessa suositaan erityisesti ilmaisohjelma GeoGebraa. Se on helppo ja nopeakäyttöinen, ja sen uusimmassa versiossa on tuki myös symboliselle laskemiselle. GeoGebran erityinen hyöty tulee mahdollisuudesta kytkeä se java-sovelmana omille www-sivuille, jolloin opettajan on kätevää luoda verkkoon tehtäväpankkeja tai opetuksen tueksi itseopiskelumateriaaleja.

Olli Karkkulaisen ansiokkailla www-sivuilta (karkkulainen.net) löytyy muun muassa differentiaalilaskennan opetusvälineet, joiden pohjana on GeoGebra-sovelma. Sivut ovat erinomainen esimerkki Kolin & Silanderin (2003) määrittelemästä oppimisaihiosta. Luodut sovellukset ovat monikäyttöisiä ja interaktiivisia. Vertailevia kokeiluja päästään tekemään helposti muuttamalla ilmiöön liittyviä tunnuslukuja, mikä tukee opetettavien käsitteiden universaalisuutta. Sivuja on mahdollista käyttää oppituntitilanteessa opettajajohtoisesti, mutta myös itsenäisesti oman opiskelun tukena. Seuraavassa kuvankaappauksia ohjelmasta:



Kuva 4-8. Raja-arvon määritelmän havainnollistamista GeoGebralla



Kuva 4-9. Paloittain määritellyn funktion derivoituvuus GeoGebran avulla

4.2.3 Muita saatavilla olevia matemaattisia sovelluksia

Matematiikan ilmiöiden mallintamiseen on tarjolla lukuisia ohjelmia. Liitteessä 3 on luettelo tällä hetkellä verkosta löytyvistä interaktiivisista geometrisista ohjelmista. Monet ohjelmista ovat ilmaisia, toiset maksullisia. Myös älypuhelimiin on saatavilla monenlaisia sovelluksia puhelinlaitevalmistajien käyttöjärjestelmäkohtaisesta tarjonnasta riippuen. Esimerkiksi Applen iPhonelle on saatavilla sovelluksena tämänkin tutkielman apuna käytetty TI-Nspire CX CAS -laskinohjelma. Muita matemaattisia älypuhelinsovelluksia ovat muun muassa FreeGraCalk, Quick Graph, Algebra Touch ja MyScript Calculator.

Yksi suosituimmista ilmaisista matematiikkaohjelmistoista on verkosta löytyvä WolframAlpha (www.wolframalpha.com). Se sisältää monia samoja toimintoja, joita CAS-laskimistakin löytyy. Muita ilmaisia ohjelmia ovat muun muassa Scilab ja LibreOffice Math.

Kaupallisia, varsinaisia perinteisiä matematiikkasovelluksia, joilla voi tehdä hyvin raskaitakin matematiikan projekteja, ovat esimerkiksi Matlab, Maple ja Mathematica. Monipuolisten toimintojensa vuoksi niiden hyödyntäminen opetuksessa voi olla melko raskasta, ja niiden käyttäminen lukiotasolla pysähtyykin usein opettajan omaan osaamiseen.

Taulukkolaskentaohjelmien, kuten Microsoftin Excel, valjastaminen funktioiden kuvaajien piirtämiseen on mahdollista esimerkiksi taulukoitujen arvojen pohjalta. Tilastoanalyysien tekeminen ja diagrammien piirtäminen on suoraviivaista ja helppoa sekä visuaalisesti näyttävää taulukkolaskentaohjelman avulla. Myös tilastollisen todennäköisyyden havainnollistaminen sekä tunnuslukujen etsiminen aineistosta onnistuu lukio-oppimäärän puitteissa helpommin taulukkolaskentaohjelmalla kuin esimerkiksi SPSS-tyyppisellä erityisesti tilastoanalyysiin tarkoitetulla ohjelmalla.

5 MAOLin tekemän CAS-tutkimuksen tuloksia

Keväällä 2012 Matemaattisten aineiden opettajien liitto teki kyselytutkimuksen matematiikan opettajille ja tutkijoille CAS-laskimista. Tutkimukseen saatiin vastaus 101 henkilöltä, joista peruskoulun opettajia oli 3, lukion opettajia 77, sekä peruskoulun että lukion opettajia 9, opettajankouluttajia (didaktikkoja ja normaalikoulun opettajia) 2 sekä korkeakouluopettajia ja tutkijoita 10. Kaikille kyselyyn vastanneille esitetyt kysymykset ovat tutkielman liitteenä 1. Eniten huomiota herättäviä asioita opettajien vastauksissa on koottu seuraaviin tiivistelmiin.

5.1 Valikoituja tuloksia opettajien vastauksista

Vain noin 10 % vastaajista kokee, että oppilaidemme menestys Pisa-tutkimuksessa korreloi suomalaisen koulumatematiikan tilaa, ja että koulumatematiikka voi hyvin. Melkein 50 % vastaajista kokee, että peruskoulussa ei opita riittävästi matematiikkaa lukio-opintoja varten. Vastaavasti yli 50 % on sitä mieltä, että lukiosta valmistuvien matematiikan osaaminen on huomattavasti heikentynyt viimeisen 20 vuoden aikana.

Kysyttäessä TVT-välineiden käytöstä matematiikan opetuksessa, yli 50 % vastaajista kokee GeoGebran ja vastaavat välineet hyödyllisiksi matematiikan oppimisen kannalta. Noin 30 % vastaajista ei kuitenkaan pidä tutkivaa oppimista lukioon hyvin sopivana opetusmenetelmänä. 40 % vastaajista onkin sitä mieltä, että pitkän matematiikan lukio-opetuksessa tärkeintä on riittävän laskutaidon hankkiminen jatko-opintoihin, noin kolmasosan mielestä se on lukio-opetuksessa toiseksi tärkeintä. Saman verran vastaajista pitää toiseksi tärkeimpänä oppilaan itseluottamuksen kehittämistä matematiikan osaajana.

Kolme neljästä vastaajasta tekisi ylioppilaskokeesta kaksiosaisen, jonka ensimmäisessä osassa ei käytetä apuvälineitä. Kolme neljästä uskoi myös CAS-laskimien lisäävän oppilaiden välistä eriarvoisuutta. Tämän voi tulkita tarkoittavan yhtäältä normaalissa luokkaopetuksessa tapahtuvaa eriarvoistumista, mutta erityisesti laskimen tuomaa etua, mikä kulminoituu ylioppilaskokeessa.

Kyselyn ehkä selkeiten mielipiteitä jakaneet kysymykset liittyivät CAS-laskinten käyttöön lukiossa. 40 % vastaajista oli samaa mieltä siitä, että CAS-laskinten ansiosta lukiossa ei tarvitse tavoitella enää niin korkeaa laskurutiinia mekaanisissa taidoissa kuten yhtälön ratkaiseminen ja derivointi. Noin 47 % oli kuitenkin selkeästi eri mieltä ja kokee, että laskurutiineja tulee harjoittaa apuvälineistä huolimatta. Hieman yli 40 % ei pidä CAS-laskinten sallimista hyvänä asiana matematiikan opetuksen kannalta, hieman alle 40 % puolestaan näkee sen hyvänä asiana. 60 % vastaajista ei myöskään ottaisi CAS-laskimia aktiiviseen käyttöön lyhyessä matematiikassa.

Noin puolet vastaajista on sitä mieltä, että CAS-laskinten käyttö ei vapauta aikaa matematiikan luonteen, perustelujen ja todistamisen opettamiseen. Noin puolet vastaajista näkee, että CAS-laskinten käyttö lukiossa suorastaan heikentää oppilaiden osaamista jatko-opintojen kannalta.

46 % vastaajista uskoo CAS-laskinten edistävän uusia opetusmenetelmiä ja uuden pedagogiikan käyttöönottoa lukiomatematiikassa. Vain 16 % vastaajista ei usko CAS-laskinten aiheuttavan suurta muutosta pitkän matematiikan opetukseen.

5.2 Lukion opettajien vastauksia eriteltynä tutkimuksesta

Noin 80 % lukion opettajista on opetuksessaan huomioinut 90-luvun alusta saakka hyväksytyt graafiset laskimet ja 60 % opettajista on kehottanut oppilaitaan hankkimaan uudet CAS-laskimet.

Noin 75 % lukion opettajista tulee jatkossa huomioimaan opetuksessan CAS-laskimet, noin 4 % ei aio huomioida lainkaan ja 21 % vastaajista ei osannut vielä sanoa.

Noin 6 % kouluista lainaa koulun omia laskimia oppilaille siten, että jokaisella pitkän matematiikan opiskelijalla on CAS-laskin käytössään.

Noin 67 % lukion opettajista kokee tarvitsevansa lisää koulutusta CAS-laskimen käytössä.

Noin 63 % lukion opettajista kokee, että kevään 2012 matematiikan yo-kokeen pisteytysohjeen CAS-linjaukset eivät olleet tasapuoliset oppilaiden oikeusturvan kannalta.

(Setälä, 2012)

Yhteenveto

Tuloksista on selvästi havaittavissa, että opettajakunta on jossain määrin kahtiajakautunut suhteessa CAS-laskinten sallimiseen ja käyttöön. Johtopäätökseni on se, että jos matematiikan opettaja näkee CAS-laskimen hyödyllisenä apuvälineenä, hän todennäköisesti keksii sille myös opetuksessaan käyttötarkoituksia ja sovelluskohteita. Uskoa uudenlaisen pedagogiikan kehittymiseen CAS-laskinten avulla voisi löytyä erityisesti niiltä, jotka näkevät myös matemaattisen ohjelmistoteknologian kehityksen positiivisena asiana. Jos opettaja puolestaan näkee CAS-laskimen turhakkeena tai uhkana oppilaidensa matemaattisen ajattelun kehittymiselle ja jatko-opinnoissa menestymiselle, on hänen todennäköisesti myöskin vaikeaa löytää opetuksessaan kohtia, missä laskimen voisi hyödyllisesti valjastaa oppimisen tueksi.

MAOLin tekemät johtopäätökset tutkimuksesta olivat seuraavat:

- Oppilaiden tasa-arvoisuus pitää paremmin varmistaa sekä CAS-laskimen käyttäjien että ilman CAS-laskinta laskevien kannalta.
- Matematiikan yo-koe pitää uudistaa.
- Opettajien pedagogista täydennyskoulutusta (ei pelkästään teknistä näppäilytekniikkaa) aiheesta on lisättävä.

(Setälä, 2012)

6 Luotettavuus

Tutkimuksen ensimmäinen osa on luonteeltaan ongelmanratkaisukeskeinen, jossa pyritään tarkastelemaan sekä CAS-laskinten että matemaattisten ohjelmistojen käyttöä opetuksen ja ylioppilaskirjoitusten apuvälineenä. Näissä tutkimustehtävissä on pyritty käyttämään pohjana konstruktivistisen oppimiskäsityksen linjauksia sekä etsitty verkosta valmiiksi ratkaistujen tehtävien, niin kutsuttujen mallivastauksien, ominaispiirteitä. On selvää, että tämänlaatuisen empiirisen tutkimuksen taustalla vaikuttaa tekijän oma matemaattinen osaaminen, suhtautuminen käytettäviin apuvälineisiin sekä yleinen kiinnostuneisuus teknisten apuvälineiden käyttöön ja käytön opettelemiseen.

Ylioppilastehtävien ratkaisujen tekemiseen on käytetty vain yhden valmistajan ohjelmistoa, joka kaventaa luonnollisesti näkökulmaa erilaisten apuvälineiden ominaisuuksista. Jokin toinen laskin tai ohjelma antaa käyttäjälleen mahdollisesti erilaisen edun esimerkiksi sievennystehtävän välivaiheiden selvittämiseksi. Tässä tutkimuksessa ei ole tarkoituksenmukaista ottaa kantaa kaikkien tarjolla olevien laskinten ominaisuuksiin, koska niiden kirjo on niin laaja, ja uusia apuvälineitä kehitetään jatkuvasti lisää.

Tutkimuksen toinen osa kokoaa MAOLin keväällä 2012 tekemän kyselytutkimuksen tuloksia. Tutkimus oli valtakunnallinen ja otanta varsin kattava. Pitkälle menevien johtopäätösten tekeminen ei ole kuitenkaan tässä tutkielmassa mahdollista, koska tutkimusmateriaali ei ole ollut kokonaisuudessaan käytettävissäni, ainoastaan siitä saadut tulokset. Tutkimustulosten läpikäymisen motiivina onkin tässä tutkielmassa opettajien tuntemusten esiintuominen ja aiheesta käytävän keskustelun pohjustaminen.

7 Pohdintaa

Matematiikan ylioppilaskoe mittaa kokelaan taitoja matematiikan eri osa-alueilla hyvin laajasti. Uudet tekniset apuvälineet voisivat positiivisesta lähtökohdasta ajatellen toimia ylioppilaskokeen uudistajana ja sellaisen kokeellisen matematiikan esitaistelijana, jota matematiikanopetus kaipaa yleisen osaamistason ja matematiikan kiinnostavuuden parantamiseksi.

Jos ylioppilaskoetta ei lähdetä uudistamaan, joudutaan todennäköisesti tekemään hankala valinta siitä rajoitetaanko apuvälineiden käyttöä uudelleen vai muutetaanko vaihtoehtoisesti tehtävätyyppejä siihen suuntaan, että CAS-laskinten hankkiminen on välttämätöntä kaikille kokeesta selviytymiseksi. On vaikeaa nähdä, että samankaltainen tilanne kuin kevään 2013 ylioppilaskirjoituksissa toistuisi, missä valtaosa pitkän matematiikan tehtävistä ratkeaa syöttämällä ne laskimeen, ja vastaus saadaan ilman sen suurempaa matemaattista pohdintaa. Tämän ei uskoisi palvelevan kenenkään intressejä. Ylioppilaskokeen merkitystä ollaan pikemminkin haluttu korostaa esimerkiksi jatko-opintoihin haettaessa.

7.1 Tekniikan pelkoa vai huolta matematiikan opetuksen suunnasta?

Opettajien kommentit laskinuudistuksesta käydyn keskustelun ympärillä on jaettavissa karkeasti ottaen kahdenlaisiin näkemyksiin. Ensimmäinen näkökulma sisältää ajatuksen siitä, että matematiikan perusteiden oppiminen ei vaadi mitä hienoimpia teknisiä apuvälineitä, vain kynä ja paperi riittää:

> *"Alkeismatematiikassa ei ole vuosikymmeniin tapahtunut mitään muutoksia. Viimeisin, ja siitä kaikki ovat yhtä mieltä, erinomainen muutos oli numeeristen taulukoiden korvautuminen funktiolaskimella. Nykyistä uudistusta pyritään vertaamaan tähän, mutta nämä asiat ovat laadullisesti erilaisia. Funktiolaskinten tulo todella vapautti koululaiset turhasta rutiinityöstä oppimaan varsinaista matematiikkaa, mutta tämä uusin laskinuudistus pahimmillaan vapauttaa heidät matemaattisten käsitteiden oppimisesta kokonaan. Koulun tehtävä on nimenomaan opettaa lapsille, niille, jotka kykenevät oppimaan, algebran ja geometrian perusteet, jotka sitten jalostuvat jatko-opinnoissa lopulta sellaiseksi käsitteistöksi, jonka avulla voidaan mallintaa erilaisia ilmiöitä. Jos perustaa ei luoda koulussa, se jää luomatta, sillä vanhana oppiminen on hankalampaa."*

"Yläkäsitteiden hallinta ja soveltamiskyky ei kuitenkaan ole mahdollista ilman vahvaa perusasioiden osaamista – tässä ei voi yhtään oikaista. Näin ollen symbolisten laskimien sallimista on nähdäkseni vaikeaa perustella yhteiskunnan teknistymisen kautta. [...] Integraalilaskenta lukiossa perustuu derivaatoille, erotusosamäärille, rationaalilausekkeille, polynomien jaollisuuden ymmärtämiselle jne. eli perusalgebralle. Ainakin itselleni on epäselvää, mistä kohdasta edellä kuvatussa oppimisen ketjussa voidaan luistaa ja olettaa laskinten käytön korvaavan työn kynällä ja paperilla."

Toinen joukko näkökulmia sisältää puolestaan avoimemman suhtautumisen teknisten apuvälineiden käyttöön ja kannustaa uusien menetelmien tuomiseen niin ylioppilaskokeeseen kuin matematiikan kouluopetukseen yleensäkin:

"Muutos oli odotettu ja ehdottomasti askel oikeaan suuntaan. Matematiikan opetuksen ja opittua mittaavan ylioppilaskokeen pitää seurata aikaansa ja symbolisten laskinten käyttö on todennäköisesti vain välivaihe kohti tietokoneiden tuloa apuvälineeksi kaikissa ylioppilaskokeissa."

"Mielestäni oppilaiden tasa-arvon vuoksi jokaisen pitkän matematiikan opettajan kuuluisi hankituttaa oppilaille CAS-laskimet ja ohjata niiden käytössä, vaikka kokisikin suomalaisen koulumatematiikan tässä jotenkin häviävän. Oppilas ja hänen (välitön) etunsa (yo-kokeessa) on kuitenkin meille opettajille tärkein, vai onko?"

"Olen täysin samaa mieltä siitä, että symboliset laskimet ovat nykyaikaa ja ne pitää sallia ylioppilaskirjoituksessa. Kysymys ei ole niinkään siitä, että opetettava matematiikka tai sen vaatimukset olisivat muuttuneet vaan siitä, että maailma matematiikan ympärillä on muuttunut.

Myös matematiikan asema oppiaineena, opetuksen tavat ja oppilaiden suhtautuminen matematiikkaan jakavat keskustelijoiden mielipiteitä:

"Opetuksen tarvitsee muuttua. Suunta joka valitaan on se asia, mihin me voimme vaikuttaa. Mikäli muutosta ei tapahdu, tuloksena on tilanne, jossa entistä harvempi opiskelija pitää matematiikkaa hyödyllisenä tai mielekkäänä. Tästä voi seurata joko pakkoruotsin kaltainen tilanne, jossa tuntimääristä ja opetussuunnitelmista pidetään kiinni mutta oppimisen tosiasiallinen taso on useimpien opiskelijoiden vähäisestä sitoutumisesta johtuen hyvin alhainen; tai sitten yksinkertaisesti matematiikan valitsevat entistä harvemmat."

"Kyse on myös siitä, millainen kuva matematiikasta annetaan. Pitäytyminen vanhaan on viesti siitä, että matematiikalla ei ole annettavaa nykymaailmassa. Pelkään, että liian moni vain koulussa matematiikkaa opiskellut näkee sen hyödyttömänä saivarteluna."

"Matematiikkaan ei todellakaan ole oikotietä. On ihmeellistä, että tätä selviötä pitää toistaa moneen kertaan ja vielä henkilöille, joilla itsellään on alan yliopistotutkinto. Mitä on se korkeampi ja hienompi ja kiinnostavampi matematiikka, johon laskimen avulla päästään perusasiat ohittaen?"

> *"Suomen koululaitoksen eri tasoilla on viimeisten vuosikymmenien aikana käytännössä kokonaan luovuttu matematiikan opetuksesta laskennon opetuksen hyväksi. Tätä suren. En myöskään usko tilanteen kohentuvan. Uudet matematiikan opettajat ovat yliopistoihin tullessaan jo lähtökohtaisesti etääntyneet matematiikasta, eikä siihen oikein enää aikuinen osaa sisään."*

Yksi näkökulma, joka keskusteluissa tulee esille, johon myös MAOLin kyselytutkimuksessa kolme neljästä opettajasta yhtyi, liittyy oppilaiden tasavertaisuuteen teknologian käytössä. Tässä korostuu erityisesti taloudelliset lähtökohdat, joko ajatus siitä, että kaikilla oppilaiden vanhemmilla ei ole mahdollisuutta hankkia lapsilleen tarpeellisia teknisiä apuvälineitä, tai realistinen pelko siitä, että kouluilla ei kuitenkaan ole mahdollisuutta varmistaa oppilaiden tasavertaisia taitoja laitteiden käytössä, jos ne tulisivat yhtäkkiä kaikkien saataville. Erilaisissa kouluissa ja kunnissa opiskelevat oppilaat eivät ole jatkossakaan varmasti tasavertaisessa asemassa, mikäli teknologian parempi hyödyntäminen otetaan opetuksen lähtökohdaksi. Lisäksi opettajat näkevät, että Ylioppilastutkintolautakunta ei ole toistaiseksi saanut luotua tarpeeksi kattavia pelisääntöjä sen takaamiseksi, että ilman CAS-laskinta ja CAS-laskimen kanssa kirjoituksiin osallistuvat kokelaat olisivat arvostelun kanssa samalla viivalla.

7.2 Täytyykö ylioppilaskirjoitusten matematiikan koetta uudistaa?

Ylioppilastutkinto elää jatkuvassa murrosvaiheessa ja on hyvin todennäköistä, että matematiikan koetta tullaan lähivuosina uudistamaan, tähän kannustaa myös Matemaattisten aineiden opettajien liitto. Ylioppilastutkintolautakunta suhtautui vielä vuosi sitten melko tyynesti opettajien huolestuneisiin kannanottoihin koskien teknisten apuvälineiden käyttöä matematiikan kokeessa, ja on todennut, että kokeen tehtävätyyppejä ei tulla laskinten vuoksi aivan heti muuttamaan. CAS-laskimet nähdään YTL:ssä todennäköisesti vain lyhyehkönä välivaiheena ennen seuraavien teknisten uudistusten tuloa.

Yksi laskinohjeen uudelleen kirjoittamisen vaikeuksista on ollut hyvin monenlaiset käytössä olevat apuvälineet. On lähes mahdotonta laatia kaikenkattavaa laskinohjetta ylioppilaskoetta varten, kun laitteiden kirjo on niin laaja. Vaihtoehtoja onkin oikeastaan vain kaksi: joko sallia kaikki laskimet tai kieltää ne kokonaan. YTL päätti sallia kevään 2012 matematiikan kokeessa kaikki apuvälineet ja ottikin kenties jo katseen kohti tulevaa, sähköistä tutkinnon suoritusta.

Opettajat pohtivat uuden matematiikan ylioppilaskokeen luonnetta seuraavasti:

> *"MAOL ehdotti taannoin kaksiosaista matematiikan yo-koetta, ja se näyttäisi saavan varovaista kannatusta myös näissä keskusteluissa. Ilman apuvälineitä suoritettavassa osassa tulisi mielestäni olla myös laadukkaita todistustehtäviä geometriasta, lukuteoriasta yms., missä laskimista ei ole hyötyä."*
>
> *"Kun laskeminen liittyy yleensä johonkin reaalimaailman ilmiöihin, voisi ajatella, että laskemisen kontrolli tapahtuisi ylioppilaskirjoituksissamme reaalikokeen eri osioissa. Tällöin olisi luonnollista, että kokelas käyttäisi laskemisen apuneuvoja siinä määrin kuin tarpeen olisi. Toki mahdollista olisi myös kehittää erityinen laskemistaitojen koe."*
>
> *"Symbolisten laskinten salliminen voi kehittää yo-koetta hyvään suuntaan, jos samalla huolehditaan siitä, ettei opiskelu tule entistäkin 'laskinriippuvammaksi' vaan päinvastoin antaa enemmän tilaa oikealle matemaattiselle ajattelulle. Siksi pitkän matematiikan koe pitäisi muuttaa kaksiosaiseksi, joista toisessa osassa saa käyttää laskinta ja taulukkokirjaa mutta toisessa ei."*
>
> Opettajien kommentit poimittu lähteestä Vihtilä (2011).

7.3 Kokeet ja opetus uudistuu – uudistuvatko oppimateriaalit?

On perusteltua odottaa, että mentäessä kohti sähköistä koetta koko ylioppilastutkinto menee jossain määrin uusiksi. Uusina asioina voidaan jatkossa testata, jopa omana aineenaan, pelkkiä tiedonhauntaitoja, jotka kehittyvät oppilailla jatkuvasti, ja jotka ovat avainasemassa tietoyhteyskunnassa. Ulkoa oppimisen ajat saattavat olla lähivuosina historiaa, jos halutaan painottaa oppilaiden kykyä erotella hyvän ja huonon tiedon aineistoja toisistaan.

Oppikirjat saattavat jäädä vanhakantaisina opiskeluvälineinä unholaan, tai ainakin niiden ulkoasu voi muuntautua lopulta kokonaan digitaaliseksi. Oppilaan koulurepusta löytyy tulevaisuudessa todennäköisemmin kirjojen sijasta tablettitietokone, joka sisältää kaikkien aineiden opiskelumateriaalin. Jos koulumatematiikan perusteet on nyt pakattavissa noin pariinkymmeneen oppikirjaan, voi vain arvailla mitä kaikkea tietoa saadaan kirjankokoiseen digitaaliseen oppimisvälineeseen tallennettua. Interaktiiviset oppimisvälineet ja audiovisuaaliset tietokirjat animaatioineen antavat mahdollisuudet aivan toisenlaiseen matematiikan opetukseen kuin mihin olemme tähän asti tottuneet.

Kannustaminen multimedian käytön lisäämiseen opetuksessa saattaa kuulostaa joidenkin korviin kliseiseltä, jos ilmapiiri on sellainen, että hyviä digitaalisia materiaaleja ei kuitenkaan ole saatavilla. On oikeastaan vain oppimateriaalin tuottajien ja opettajien halukkuudesta kiinni, kuinka pitkälle teknologiaa koululuokassa hyödynnetään. Tämä on mielestäni aihepiiri, jota voisi hyvinkin tutkia. Oppimateriaalin tuottajat kehittävät digitaalisissa kanavissa jaettavia tuotteitaan kokoajan paremmiksi. Tarjolla olevien opetusmateriaalien vertailu olisi hyvin ajankohtainen ja mielenkiintoinen tutkimusaihe.

Lähteet

Ahtee, M. & Pehkonen, E. (2000). *Johdatus matemaattisten aineiden didaktiikkaan.* Helsinki: Edita.

Fey, J. (1991). Computer Algebra Systems and Mathematics Teaching: Experiences in the United States. Teoksessa J. Kinnunen & P. Neittaanmäki, *Tietokoneavusteinen matematiikka* (ss. 15-24). Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto.

Haapasalo, L. (1991). Teoksessa J. Kinnunen & P. Neittaanmäki, *Tietokoneavusteinen matematiikka* (ss. 25-39). Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto.

Haapasalo, L. (2004). Ongelmanratkaisukulttuuri konstruktivistisena peruselementtinä. Teoksessa P. Räsänen; P. Kupari; T. Ahonen & P. Malinen, *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (ss. 84-99). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

Haapasalo, L.; Hirvi, T. & Huhtamäki, J. (1995). *Miten lukiolaiset hallitsevat raja-arvon käsitteen?* Jyväskylä: Jyväskylän yliopistopaino.

Haapasalo, L.; Luotonen, S. & Pellikka, P. (1997). *Miten lukiolaiset hallitsevat funktion jatkuvuuden käsitteen?* Jyväskylä: Jyväskylän yliopistopaino.

Ilomäki, L. (2005). *Opi ja onnistu verkkossa – aihiot avuksi.* Opetushallitus. Helsinki: Hakapaino Oy.

Koli, H. & Silander, P. (2003). *Verkko-opetuksen työkalupakki – oppimisaihiosta oppimisprosessiin.* Saarijärvi: Saarijärven Offset Oy.

Koponen, R. (1991). *Matematiikan didaktiikkaa luonkanopettajille.* Jyväskylä: Atena Kustannus Oy.

Laherto, J. (2009). *Interaktiivisten valkotaulujen oppimateriaali: Tapatutkimus kahden opettajan taulun käytöstä matematiikan alkuopetuksessa.* Helsingin yliopisto. Soveltavan kasvatustieteenlaitos. Pro gradu -tutkielma.

Leino, J. (1993). Konstruktivismi ja matematiikan opetus. Teoksessa J. Paasonen; E. Pehkonen & J. Leino, *Matematiikan opetus ja konstruktivismi – teoriaa ja käytäntöä* (ss. 11-18). Helsinki: Yliopistopaino.

Luoma-aho, E. & Korhonen, H. (2011). Symbolinen laskenta ja GeoGebra 4. *Dimensio 4/2011*, 28-29.

Meisalo, V.; Sutinen, E. & Tarhio, J. (2003). *Modernit oppimisympäristöt.* Pieksämäki: Tietosanoma.

Paasonen, J. (1993). Graafinen laskin peruskoulun yläasteella. Kokemuksia funktiokäsitteen opettamisesta. Teoksessa J. Paasonen; E. Pehkonen & J. Leino, *Matematiikan opetus ja konstruktivismi – teoriaa ja käytäntöä* (ss. 110-114). Helsinki: Yliopistopaino.

Pehkonen, E. (1993). Oppilaiden matemaattiset uskomukset oppimisen piilovaikuttajina. Teoksessa J. Paasonen; E. Pehkonen & J. Leino, *Matematiikan opetus ja konstruktivismi – teoriaa ja käytäntöä* (ss. 36-41). Helsinki: Yliopistopaino.

Repo, S. (1993). Derivaatan käsitteen oppiminen konstruktiivisessa oppimisympäristössä. Teoksessa J. Paasonen; E. Pehkonen & J. Leino, *Matematiikan opetus ja konstruktivismi – teoriaa ja käytäntöä* (ss. 123-130). Helsinki: Yliopistopaino.

Sandelin, J.-E. (2007). *Päättelyn tarkistaminen tietokoneohjelmalla ja tarkistamisen soveltaminen opetusohjelmistoissa.* Helsingin yliopisto. Matematiikan ja tilastotieteen laitos. Pro gradu -tutkielma.

Setälä, M. (2012). *Tuloksia MAOL:n CAS-kyselystä.* Haettu 26. huhtikuuta 2013 osoitteesta http://ouluma.fi/2012/10/tuloksia-maoln-cas-kyselysta

Soedjadi, R. (2004). Designing Instruction of Values in School Mathematics. Teoksessa H. Fujita; Y. Hashimoto; B. Hodgson; P. Yee Lee; S. Lerman & T. Sawada, *Proceedings of the Ninth International Congress on Mathematical Education* (ss. 195-196). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Vihtilä, M. (2011). *Mikä muuttuu kun symboliset laskimet sallitaan ylioppilaskirjoituksissa?* Haettu 26. huhtikuuta 2013 osoitteesta http://www.luma.fi/artikkelit/918

Ylioppilastutkintolautakunta. (2013). *Ylioppilastutkinto Suomessa*. Haettu 28. huhtikuuta 2013 osoitteesta http://www.ylioppilastutkinto.fi/fi/

Yrjönsuuri, R. (1993). Algoritminen ja reflektoiva ajattelu matematiikan oppimisessa. Teoksessa J. Paasonen; E. Pehkonen & J. Leino, *Matematiikan opetus ja konstruktivismi – teoriaa ja käytäntöä* (ss. 45-53). Helsinki: Yliopistopaino.

Liitteet

LIITE 1

MAOLin CAS-kyselyn kysymykset kaikille kyselyyn vastanneille.

Vastauksissa käytettiin asteikkoa 1-5, jossa väite 1) pitää erittäin hyvin paikkansa 2) pitää hyvin paikkansa 3) pitää jossakin määrin paikkansa 4) ei juurikaan pidä paikkaansa 5) ei ollenkaan pidä paikkaansa.

1. Kuten Pisa-tuloksetkin osoittavat, suomalainen koulumatematiikka voi hyvin.

2. Peruskoulussa opitaan riittävästi matematiikkaa lukio-opintojen pohjaksi.

3. Lukiosta valmistuvien matematiikan osaaminen on huomattavasti heikentynyt viimeisen 20 vuoden aikana.

4. GeoGebra ja muut TVT-välineet ovat hyödyllisiä matematiikan oppimisen kannalta lukiossa.

5. Oppikirja Väisälän Algebra edustaa sitä koulumatematiikan ideaalia, johon vieläkin pitäisi pyrkiä. (http://solmu.math.helsinki.fi/2007/vaisala/vaisala.pdf)

6. Peruskoulussa pitäisi käyttää enemmän toiminnallisia opetusmenetelmiä.

7. Tutkiva oppiminen on lukioon hyvin sopiva opetusmenetelmä.

8. Pitkän matematiikan lukio-opetuksessa on tärkeintä (laita järjestykseen)

   1) oppia soveltamaan matematiikkaa
   2) oppia matemaattisen todistamisen periaatteita ja matematiikan luonnetta itsenäisenä tieteenä
   3) kehittää oppilaan itseluottamusta matematiikan osaajana
   4) hankkia riittävä laskurutiini jatko-opintojen kannalta
   5) että mahdollisimman suuri osa ikäluokasta opiskelee pitkää matematiikkaa

9. CAS-laskinten salliminen aiheuttaa suuren muutoksen matematiikan opetukseen lukion pitkässä matematiikassa.

10. CAS-laskinten käyttö lukiossa heikentää oppilaiden osaamista jatko-opintojen kannalta.

11. CAS-laskinten salliminen on hyvä asia lukion matematiikan opetuksen kannalta.

12. Myös lyhyessä matematiikassa tulisi aktiivisesti ottaa käyttöön CAS-laskimet.

13. CAS-laskimet tulisi hyväksyä myös korkeakouluissa ja yliopistoissa.

14. CAS-laskinten vuoksi matematiikan yo-kokeesta tulisi tehdä kaksiosainen, josta ensimmäinen osa tehdään ilman apuvälineitä.

15. CAS-laskin on teknologinen turhake ja tietokoneet tulisi sallia yo-kokeessa mahdollisimman nopeasti.

16. CAS-laskinten ansiosta lukiossa ei tarvitse tavoitella enää niin korkeaa laskurutiinia mekaanisissa taidoissa kuten yhtälön ratkaiseminen ja derivointi.

17. CAS-laskinten käyttö mahdollistaa sen, että jää enemmän aikaa matematiikan luonteen, perustelujen ja todistamisen opettamiseen.

18. CAS-laskimet viimeistelevät suomalaisen koulumatematiikan tuhon.

19. CAS-laskimet lisäävät oppilaiden välistä eriarvoisuutta.

20. CAS-laskimet edistävät uusien opetusmenetelmien / uuden pedagogiikan käyttöönottoa lukiomatematiikassa.

LIITE 2

Lohjan Yhteislyseon lukion matemaattisten aineiden opettajien julkilausuma.

MAA YO K2013 ja symbolinen laskin

Tämä tutkielma on tehty, jotta selviäisi, mikä merkitys symbolisella laskimella on pitkän matematiikan yo-tehtävien ratkaisussa tällä hetkellä. Tulos on yllättävä, ellei peräti järkyttävä. Jopa 9 tehtävistä ratkeaa suoraan laskimen avulla ilman, että laskija joutuu tekemään juurikaan omia johtopäätöksiä. Mihin on matematiikan opetus menossa? Lopussa on kommentteja aiheeseen liittyen. Ratkaisut on tehty TI nSpire CX CAS–laskimella, suomenkielinen käyttöjärjestelmä, vain perustoiminnot käytössä. Tehtävistä laskettu vain ne, joista selviää ilman suurempaa ajattelutoimintaa, kunhan laskimen käyttö on hallinnassa.

Panu Ruoste, rehtori
Lohjan Yhteislyseon lukio

[tehtävien ratkaisut jätetty pois tilan säästämiseksi]

Kommentteja liittyen symbolisen laskimen käyttöön lukiomatematiikassa

Onko tämä nyt sitten matematiikkaa? Pitkän matematiikan yo-kokeessa peräti 9 tehtävää voi laskea suoraan laskimella käyttämättä hiukkaakaan omaa päätään. Ainoa, mitä vaaditaan on yksinkertainen nappulatekniikka ja laskimen mukana tulleen 40-sivuisen suomenkielisen ohjeen sivujen 2-29 muutamien esimerkkien harjoittelu jossain opiskelun lomassa. Mikäli koetilanteessa aivan kaikki ei muistu mieleen, niin laskin kyllä auliisti opastaa, ja ihan halutulla kielellä, myös suomeksi. Jos lisänä on pieni päättelykyky, voi helposti täydentää tehtävien ratkaisut sellaisiksi, että niistä saa ihan reilusti pisteitäkin. Kokeen maksimipistemäärä on 66. Edellä olevista 9 tehtävästä on mahdollista saada 57 pistettä laskimen avustuksella. Haloo!

Miten toteutuu opiskelijoiden tasavertainen kohtelu? Osalla opiskelijoista on tällainen menestyksen mahdollistama laskin. Osa heistä jopa on opetellut sitä käyttämään. Muilla ei tällaista luvallista lunttausmenetelmää ole, syynä esimerkiksi taloudelliset seikat, tekniikkapelko, opettajan esimerkki/asenne tms. Mikäli taas yotehtävät laaditaan niin, että estetään laskimen suora käyttö (vertaa edellä tehtävät 4, 7, 9, 10, 13 ja 15), niistä tulee samalla aivan liian vaativia suurimmalle osalle laskijoista.

Jos laskimen on tarkoitus olla apuväline ja opiskelijan on määrä itse tuottaa ”oleelliset välivaiheet” tehtävänsä ratkaisuun, niin heti tulee mieleen kaksi ongelmaa: Laskimen avustuksella nuo välivaiheet on kohtuullisen helppo arpoa, kun on jo suuntaviivat selvitetty muutamalla näppäimen painalluksella. Osa laskimista pystyy jopa antamaan vaadittavat välivaiheet. Toiseksi, onko kohtuullista jättää opiskelijan pääteltäväksi, mitkä ovat kulloinkin vaadittavat oleelliset välivaiheet? Eiväthän sitä nykyisin tiedä opettajakaan, kun aiheeseen liittyviä kattavia ohjeita ei ole eikä sellaisia varmasti voi ollakaan olemassa. Ei niitä ainakaan kukaan osaa aukottomasti soveltaa.

Lukion matematiikan opiskelijoilla on nykyisin suuria vaikeuksia aivan peruslaskutoimituksissa: murtoluvut, yhtälön ja epäyhtälön ratkaisu, yhdistetyn funktion derivointi jne. Hyvin harva osaa esimerkiksi jakaa luvun toisella käyttäen ala-asteella opittua ja sittemmin laskimen rutiininomaisen käytön takia täysin unohdettua jakokulmaa. Samoin tulee laskimen myötä käymään hyvin monelle muullekin aivan oleelliselle perusmatematiikan osa-alueelle. Jos kuvitelmissa on, että laskimen avustuksella laskurutiineihin ennen kulunut aika voidaan käyttää itse ongelmien ratkaisuun, niin tämä on täyttä puppua. Laskimen myötä nimittäin katoaa myös kyky ratkoa niitä ongelmia, koska matemaattinen ajattelutaito surkastuu ja muuttuu laitteistoriippuvuudeksi. Jo nyt monelle ylivoimainen lausekkeiden sieventäminen tulee olemaan katoavien taitojen listan kärkipäässä.

Laskimen myötä tulee yleistymään vastauskeskeinen matemaattisten ongelmien ratkaisumalli: tärkeintä on lopputulos eikä se, miten siihen päädytään. Matemaattisen ymmärryksen ja loogisen päättelyn kehittymisen kannalta kuitenkin paljon tärkeämpää on ymmärtää ongelman luonne ja siihen liittyvä matemaattinen problematiikka. Vastaus tulee sitten siinä sivutuotteena ja kylkiäisenä tulee aimo annos rutiinia ja kykyä selviytyä uusista vastaantulevista haasteista. Ja jos ymmärryksen löytymisen jälkeen vastaus on vähän pielessä, niin korjaaminen on pikku juttu, jos matemaattinen perusta on kunnossa.

Pikaisena korjausliikkeenä olisi syytä harkita sitä, että osa pitkän matematiikan kursseista suoritetaan ilman minkään tyypin laskimen apua. Valitsemalla tehtävien ja harjoitusten lukuarvot sopivasti, voi ratkaisuista selvitä ilman teknisiä apuneuvoja. Jos laskimettomuus aiheuttaa hankaluuksia, niin sitten otettakoon käyttöön aivan perusmallin funktiolaskimet, jotka esimerkiksi koulu voisi hankkia yo-kirjoituksia varten. Kustannukset ovat alle 10 euroa laskimelta, joten kenenkään talous ei tähän kaadu. Jotta itse matematiikan osaaminen korostuisi, voisi myös matematiikan ylioppilaskirjoituksista suorittaa esimerkiksi alkuosan ilman laskinta. Kun puolet kokeesta on selvitetty, palautetaan alkupään tehtävät ja noudetaan uudet sekä tarvittava laskin.

Nykyinen symbolisen laskimen käyttö johtaa siihen, että opiskelija tehtävää ratkaistessaan kysyy ensin oikeat vastaukset laskimelta ja sen jälkeen naamioi laskun näyttämään siltä, että hän on itse selvittänyt ongelman. Onko tässä tarkoitus huijata opiskelijaa itseään, koetehtävän korjaajaa vai kansainvälisiä osaamistutkimuksia tekevää suurta maailmaa? Lopputuloksena tulee joka tapauksessa olemaan se, että jo nykyisellään heikko matemaattinen osaaminen vähenee entisestään. Jos se on tavoite, niin sitten ollaan oikealla tiellä.

Lohjan Yhteislyseon lukio
matemaattisten aineiden lehtorit

FL Jukka Lehtonen FM Samuli Heikinaho
FM Sari Korte FT Sara Lehtovuori
FM Erkki Mustonen FM Olavi Nurmi
FM Tapio Nygren FM Esa Ritvanen

LIITE 3

Joitakin verkossa saatavilla olevia interaktiivisia geometrisia ohjelmia.

2D-ohjelmia	GRACE
	iGeom
Apollonius	Isard
Baghera	Jeometry
Cabri Geometry	JSXGraph
Cabri-Euclide	Kig
C.a.R.	Kgeo
CaRMetal	KmPlot
Cinderella 1.4	KSEG
Cinderella 2.0	Live Geometry
Defi	MathKit
DrGeo	Mentoniezh
Euklid DynaGeo	OpenEuclide
Euklides	Tabula
Eukleides	Tabulae
Gambol	WinGeom
GCLC	WIRIS
GeoGebra	
Geolog	**3D-ohjelmia**
The Geometer's Sketchpad	
Geometric Supposer	Archimedes Geo3D
Geometrix	Cabri 3D
Geometry Expert (GEX)	GeoGebra (from version 5.0 Beta)
Geometry Explorer	Geometria
Geometry Expressions	GeomSpace
Geometry Tutor	GeomView
GeoNext	Géospace
Géoplan	GEUP 3D
GeoProof	Yenka 3D Shapes
GeoView	WIRIS
GEUP	SpaceFuncs (any-dimensional software)