Opiskelijoiden uskomuksia matematiikkaa ja sen eri osa-alueita kohtaan

Tapaustutkimus pääkaupunkiseudun aikuislukiosta

Helsingin yliopisto
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta
Matematiikka
Aineenopettajan koulutus
Pro gradu -tutkielma
Helmikuu 2013
Reetta Kaikkonen

Ohjaaja: Mika Koskenoja

HELSINGIN YLIOPISTO

Tiedekunta - Fakultet - Faculty	Laitos - Institution - Department	
Matemaattis-luonnontieteellinen	Matematiikan ja tilastotieteen laitos	
Tekijä - Författare - Author Reetta Kaikkonen		
Työn nimi - Arbetets titel Opiskelijoiden uskomuksia matematiikkaa ja sen eri osa-alueita kohtaan: Tapaustutkimus pääkaupunkiseudun aikuislukiosta		
Oppiaine - Läroämne - Subject Matematiikan aineenopettaja		
Työn laji/ Ohjaaja - Arbetets art/Handledare - Level/Instructor Pro gradu -tutkielma/ Mika Koskenoja	Aika - Datum - Month and year Helmikuu 2013	Sivumäärä - Sidoantal - Number of pages 63 s. + 15 liites.

Tiivistelmä - Referat - Abstract

Tavoitteet. Tutkimus esittelee eri matematiikan osa-alueisiin kohdistuvia uskomuksia, koska tähänastiset tutkimukset käsittelevät matematiikkakuvaa yhtenä kokonaisuutena. Tutkimuksessa pyrittiin vastaamaan seuraaviin kysymyksiin: 1. *Mitä uskomuksia yksittäisen opiskelijan matematiikkakuva sekä kuva tietystä osa-alueesta sisältävät?* 2. *Mitä tekijöitä yksittäisen opiskelijan matemaattisissa uskomuksissa nousee esiin?* 3. *Mitkä tekijät matematiikkaan ja sen osa-alueisiin kohdistuvista uskomuksissa toistuvat opiskelijoiden kesken?* Tähänastiset tutkimukset ovat todistaneet, että matematiikkauskomukset ohjaavat oppijan matemaattista toimintaa. Uskomusten kokonaisuus, matematiikkakuva, jakautuu kahteen osaan: kuvaan itsestä matematiikan oppijana ja käyttäjänä sekä kuvaan matematiikasta, matematiikan opettamisesta ja oppimisesta. Näihin molempiin vaikuttavat matematiikkakokemukset. Intuitiivinen ja omakohtainen käsitys siitä, että eri matematiikan osa-alueisiin ei suhtauduta keskenään samalla tavalla, sai kriittisesti arvioimaan nykytutkimusta ja sen hyödyllisyyttä etenkin lukio-opetuksessa.

Menetelmät. Tutkimukseen osallistui 31 aikuislukion matematiikan opiskelijaa. Opiskelijoilla teetettiin kysely, johon he saivat itsenäisesti vastata oppitunnin aikana. Kyselylomake oli 5-osainen ja tutki aiheita: matematiikka (yleisesti), geometria, todennäköisyys, derivointi ja vektorit. Kussakin osiossa oli toisiaan vastaavat väitteet, joihin sai vastata asteikolla 1–5 (täysin eri mieltä… täysin samaa mieltä). Lisäksi osioissa oli avoin kysymys, jolla selvitettiin opiskelijan näkemystä aiheen luonteesta. Aineistoa analysoitiin havainnoimalla väitekohtaisesti aihealueiden välisiä eroja. Eroksi tulkittiin yli yhden poikkeama vastausten välillä (asteikolla 1–5). Kunkin opiskelijan vastaukset käytiin ensin läpi yksitellen. Lopuksi verrattiin väitekohtaisesti eri opiskelijoiden välisiä vastauksia.

Tulokset ja johtopäätökset. Tutkimuksessa nousi esiin matematiikan osa-alueisiin kohdistuvia uskomuksia. Usealla yksittäisellä opiskelijalla oli jokin osa-alue, jota kohtaan hänellä oli positiivisia uskomuksia, erityisesti kuvasta itsestä matematiikan oppijana ja käyttäjänä. Matematiikan osa-alueiden luonteista opiskelijoilla oli hyvin erilaisia uskomuksia. Joillain opiskelijoilla matematiikan osa-alueisiin kohdistuvat uskomukset voidaan sanoa noudattavan heidän yleistä matematiikkakuvaansa. Kuitenkin vastaajajoukossa oli useita opiskelijoita, joilla ainakin yhden osa-alueen uskomukset poikkesivat hänen matematiikkakuvastaan tai jonkin toisen osa-alueen kokonaiskuvasta. Täten on merkittävää huomioida, mitä matematiikan osa-aluetta ajatellaan, kun puhutaan matematiikkakuvasta. Tulevaisuudessa matematiikkauskomuksia koskevissa tutkimuksissa on oleellista erotella matematiikan osa-alueet.

Avainsanat - Nyckelord - Keywords
Matematiikan osa-alueet, matematiikkauskomukset, matematiikkakuva

Säilytyspaikka - Förvaringsställe - Where deposited
Helsingin yliopiston kirjasto, Kumpulan kampuskirjasto, matematiikka

Muita tietoja - Övriga uppgifter - Additional information

UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta - Fakultet - Faculty	Laitos - Institution - Department	
Science	Mathematics and Statistics	

Tekijä - Författare - Author
Reetta Kaikkonen

Työn nimi - Arbetets titel - Titel
Students' Beliefs about Mathematics and the Different Areas of Mathematics: The Case Study about an Adult High School at the Capital Region

Oppiaine - Läroämne - Subject
Teacher of Mathematics

Työn laji/ Ohjaaja - Arbetets art/Handledare - Level/Instructor	Aika - Datum - Month and year	Sivumäärä - Sidoantal - Number of pages
Master's Thesis/ Mika Koskenoja	February 2013	63 pp. + 15 appendices

Tiivistelmä - Referat - Abstract

Efforts. The research introduces beliefs about different areas of mathematics, because the current research is dealing with the views of mathematics. An effort was made to answer the questions: 1. *What beliefs are including to the student's views of mathematics and views of the areas of mathematics?* 2. *What factors emerges in the student's views of mathematics?* 3. *What factors emerges repeatedly between students' views of mathematics?* The current research has proven that mathematical beliefs guide the learner's mathematical skills and actions. The views of mathematics consist of two parts: about themselves as learners and users of mathematics and about mathematics and its teaching and learning. Both of these are influenced by the experiences of mathematics. The intuitive notion that students don't deal with mathematics in the same way made me evaluate current research and the usefulness of it especially in the high school education.

Methods. The study involved 31 Adult High School students of mathematics. The students were commissioned the survey. They had to respond independently during a lesson. The survey includes five parts and explores the topics: mathematics (general), Geometry, Probability, Calculus and Vectors. Each section had arguments comparable for each other's, and students could answer them on a scale of 1–5 (strongly disagree... strongly agree). In addition, sections had the open-ended question in order to clarify student's views of the nature of a topic. The data were analyzed by observing the differences between areas. It was interpreted as difference if there is more than one deviation between the responses (on a scale of 1–5). At First, each student's answers were read by reviewing one by one. Finally, regional answers were compared between students.

Results and conclusions. The study emerged beliefs of the different areas of mathematics. Several individual students had one of the areas, where he had positive beliefs about mathematics, in particular, in the view of oneself as a learner and as a user. Students had very different answers according to the nature of mathematics. Some students' beliefs of the different areas of mathematics seem to comply with their views of mathematics. However, there are a few students who had the difference between his view of one area of mathematics and his views of mathematics generally. So, it is remarkable to take into account which area of mathematics we are thinking when we talk about views of mathematics. In the future, it is essential to separate the different areas of mathematics in the researches about mathematical beliefs.

Avainsanat - Nyckelord - Keywords
The different areas of mathematics, mathematical beliefs, the views of mathematics

Säilytyspaikka - Förvaringsställe - Where deposited
Helsinki University Library/ Kumpula Campus Library/ Mathematics

Muita tietoja - Övriga uppgifter - Additional information

UNIVERSITY OF HELSINKI

Sisällys

UNIVERSITY OF HELSINKI

UNIVERSITY OF HELSINKI

TAULUKOT

KUVIOT

1 Johdanto

Matematiikan oppiminen pohjautuu menneiden vuosikymmenten tutkimusten mukaan muuhunkin kuin laskemiseen ja matemaattisiin merkintöihin. Tunnepohjaisilla ja tiedollisilla tekijöillä on huomattu olevan merkittävä rooli niin opettajan kuin oppilaidenkin toiminnassa. Näitä tekijöitä on tutkimusten yhteydessä alettu kutsua uskomuksiksi. Uskomukset ja niihin läheisesti liittyvät tekijät yhdistetään monien tutkijoiden (mm. Kaasila, Laine & Pehkonen, 2004) teoksissa käsitteellä *matematiikkakuva*. Uskomukset sen sijaan voidaan määritellä yksilön käsityksinä itsestään sekä matematiikasta.

Itsekin käytän tutkimuksessani käsitettä matematiikkakuva ja tarkoitan tällä matematiikkauskomusten kokonaisuutta yksilön omasta näkökulmasta. Tutkimukseni käsittelee siis opiskelijoiden matematiikkauskomuksia heidän omasta näkökulmastaan.

Oppijan käsitykset ja suhtautuminen matematiikkaan saa pohjan pitkälti opettajan toiminnasta, mutta muokkautuu oppijan omien toimintojen ja niiden ohjauksen myötä. On huomattu, että opiskelijoiden uskomuksilla matematiikkaa kohtaan on vaikutus matematiikan tuloksiin.

Koska yleisesti matematiikkauskomuksilla on todettu olevan merkitystä matematiikan oppimiseen ja osaamiseen, on perusteltua tutkia lähemmin yksittäisen opiskelijan uskomuksia matematiikan eri osa-alueita kohtaan. Aiheeseen liittyvä jo olemassaoleva tutkimusaineisto keskittyy yleisesti matematiikkauskomuksiin, muttei vertaile uskomuksia eri matematiikan osa-alueilla.

Olen itse opettanut paria yksityisoppilasta ja olen yllätykseksi huomannut heillä melko selviä uskomuksia joihinkin matematiikan alueisiin liittyen. Tämä on ollut osaltaan innoittamassa minua aiheen pariin. Lisäksi olen vasta opettajaurani alkuvaiheessa ja pidän ammatillisen osaamiseni kannalta merkityksellisenä selvittää, minkä tyyppisiä uskomuksia opiskelijoillani voi olla.

Omassa tutkimuksessani en pidä tarpeellisena tutkia matematiikkakuvan muodostumista, koska aiemmissa tutkimuksissa se on jo hyvin selvitetty. Enemmänkin analysoin sitä, mitä uskomuksia opiskelijoilla on eri matematiikan osa-alueita kohtaan ja kuinka nämä uskomukset liittyvät heidän yleiseen matematiikkakuvaansa. Pyrin tuomaan tutkimukseni kautta uusia näkökulmia matematiikan opetukseen ja sen kehittämiseen eri opintovaiheissa sekä nostamaan esiin mahdollista matematiikan luonteen jakautumista eri osa-alueille.

Tutkimus on toteutettu kyselylomakkeilla oppilaitoksessa, jossa tällä hetkellä työskentelen. Opiskelijat ovat saaneet itse vastata kyselyyn, jonka jälkeen olen kirjannut vastaukset taulukko-ohjelmalla. Taulukoinnin jälkeen olen analysoinut vuorotellen kunkin opiskelijan vastauksia. Tavoitteeni on tehdä havaintoja erityisesti tapauksista, joissa yksittäisellä opiskelijalla on toisistaan poikkeavia vastauksia eri aihealueiden kesken tai hänellä on voimakkaita ennakkouskomuksia aiheesta, jonka lukiokurssilla hän ei ole vielä ollut.

2 Uskomusten osa matemaattisessa osaamisessa

Teollisuusmaissa tiedetään yleisesti ottaen, mitä matematiikka on. Kuitenkin näkemykset matematiikasta vaihtelevat riippuen siitä, keneltä sitä kysytään: opettajalta, oppilaalta tai vaikkapa kadunkulkijalta. (Pehkonen, 1998, 37) Useat tutkijat ovat havainneet, että uskomuksilla ja odotuksilla matematiikkaa kohtaan on vaikutusta matemaattisten ongelmien ratkaisemiseen (Schoenfeld, 1985; Yrjönsuuri, 1990). Pehkonen ja Törner toteavat usean tutkimuksen nojalla, että oppilaat, joilla on pinttyneitä tai negatiivisia matematiikkauskomuksia, tulevat helposti passiivisiksi oppijoiksi. Tämä taas tarkoittaa, että matematiikkaa opitaan muistamalla ennemmin kuin ymmärtämällä. (Pehkonen & Törner, 1995, 2) Kaasila, Laine ja Pehkonen (2004) määrittelevät yksilön uskomukset tämän subjektiivisena, kokemukseen perustuvana, usein implisiittisenä tietona ja tuntemuksena jostakin asiasta tai asiantilasta. Käytän itsekin tätä määritelmää puhuessani *uskomuksista*, jotka voivat liittyä niin tiedolliseen kuin tunnepitoiseen toimintaan. Käsittelen uskomuksia näin ollen laajana kokonaisuutena, johon voi kuulua käsityksiä, tietoa, asenteita ja tunteita.

Pekka Kupari (1999) osoittaa tutkimuksessaan, että opettajien matematiikkakuvat koostuvat monesta eri osatekijästä. Jotkut näistä tekijöistä saattavat olla keskenään ristiriitaisia. Lisäksi Kuparin tutkimustulokset näyttävät, että vaikka yksilöllä olisi useampi keskenään ristiriitainen käsitys tai uskomus tietystä aiheesta, ne eivät välttämättä kumoa toisiaan. Erityisesti opiskelijoiden suhtautuminen matematiikkaa kohtaan on huolestuttanut.

> ”Opetusta on haluttu uudistaa, koska on oltu huolestuneita muun muassa oppilaiden osaamisesta ja heidän suhtautumisestaan matematiikkaan.” (Pietilä 2002,1)

Tämän huolen seurauksena useat tutkijat ovatkin tutkineet matematiikkakuvaa, joka voidaan määritellä matematiikkauskomusten kokonaisuutena. Kuitenkaan matematiikan eri osa-alueita kohtaan olevia uskomuksia ei ole ainakaan Suomessa tiettävästi tutkittu. Yrjönsuuren (1990) tutkimus sisältää kylläkin neljän eri matematiikan lukiokurssin vertailua, mutta keskittyy lukiolaisten matemaattiseen ajatteluun eli toisin sanoen yksittäisten asioiden osaamiseen, ymmärtämiseen tai käyttämiseen.

2.1 Matematiikkakuvaa rakentamassa

Matematiikkakuva on Kaasilan, Laineen ja Pehkosen (2004) mukaan yksilön uskomusten, koskien yksilöä itseään matematiikan oppijana ja käyttäjänä sekä matematiikan opettamista ja oppimista, ja näihin läheisesti liittyvien tekijöiden muodostama kokonaisuus. Yleisesti tutkijat näkevät matematiikkakuvan ainakin jokseenkin subjektiivisena käsitteenä (Pehkonen, 1993; Pietilä, 2002). Matematiikkakuva näyttää ilmaisevan melko selväsi opiskelijan joko pitävän tai ei-pitävän matematiikasta. Niitä, jotka asennoituvat matematiikkaa kohtaan neutraalisti, ei juuri ole. Matematiikasta pitäminen näyttää olevan yhteydessä matematiikasta kiinnostumiseen, sen helpohkona pitämiseen sekä muihin asenteellisiin tekijöihin. (Pietilä, 2002)

Matematiikkakuva voidaan jakaa kahteen osaan: kuvaan itsestä matematiikan oppijana ja käyttäjänä sekä kuvaan matematiikasta, matematiikan opettamisesta ja oppimisesta. Ensimmäinen osa liittyy vahvasti tunnepitoiseen (affektiivinen) toimintaan ja jälkimmäinen puolestaan tiedolliseen (kognitiivinen). (Kaasila, Laine & Pehkonen, 2004, 399) Molemmat osat ovat syntyneet kokemuksiin pohjautuen uskomuksen määritelmän mukaan (ks. Malmivuori, 1993).

Matematiikkakuva voidaan jäsentää sen keskeisten käsitteiden avulla vielä asteen pidemmälle. Kuva itsestä matematiikan oppijana ja käyttäjänä sisältää muun muassa motiiveja, tavoitteita, suhtautumisen matematiikkaan ja sen syyt, arvion omista kyvyistä, heikot ja vahvat osa-alueet sekä syyt onnistumiseen ja epäonnistumiseen. Sen sijaan käsitykset siitä, mitä ja millaista matematiikka on, miten matematiikkaa opitaan ja opetetaan kuuluvat osioon: kuva matematiikasta ja matematiikan opettamisesta sekä oppimisesta. Näin matematiikkakuva voidaan jakaa osatekijöihin, jotka jälleen sisältävät omia osatekijöitä. (Kaasila, Laine & Pehkonen, 2004, 400–401) Osatekijöitä voi hahmottaa Vennin diagrammin (kuvio 1) avulla, kun matemaattisesti ajatellaan matematiikkakuvan osatekijöitä matematiikkakuvan aliavaruuksina. Jokainen osatekijä on tietynlainen uskomus yksilön matematiikkakuvassa. Koska yksilön uskomukset muokkaavat matematiikkakuvaa, voidaan osatekijät jäsentää diagrammissa leikkaamaan toisiaan.

Kuvio 1. Matematiikkakuvan osa-tekijöitä.

Schoenfeld (1985) kertoo havainneensa, että ”matemaattinen maailmankuva” määrittää osittain yksilöiden tavan käsitellä matemaattisia ongelmia. Aikuisopiskelijat kertovat joidenkin matematiikan osa-alueiden jääneen vaille kokonaiskuvaa. Syinä tähän he pitävät matematiikan luonnetta, ominaisuuksia sekä matematiikan opetusmenetelmiä. (Huhtala & Laine, 2004, 324.)

Matematiikkakuva syntyykin osittain matematiikkakokemusten seurauksena, joihin ovat vaikuttaneet tieto, uskomukset, käsitykset, asenteet ja tunteet. Lisäksi affektiivisten, kognitiivisten ja konatiivisten (motivationaalinen, tahdonalainen) tekijöiden vuorovaikutuksella näyttää olevan merkitystä matematiikkakuvan muodostumiseen. Samat tekijät muokkaavat yksilön jo syntynyttä matematiikkakuvaa. (Kaasila, Laine & Pehkonen, 2004, 400) Kun ajatellaan matematiikkakuvan muodostuvan matematiikkauskomusten kokonaisuudesta, tulee määritellä tarkemmin matematiikkauskomukset. Malmivuori (1993, 162–163) käyttää matematiikkauskomuksista määritelmää: ”Matematiikkauskomukset muodostuvat ja kehittyvät niiden kokemusten pohjalta, joita oppilailla on ollessaan tekemisissä matematiikan ja matemaattisten kohteiden kanssa.”

Matematiikkakuvan sanotaan toisaalta muodostuvan tiedosta, käsityksistä, uskomuksista, asenteista ja tunteista, joita matematiikkakokemukset sittemmin muokkaavat. (Huhtala & Laine, 2004, 326.) Matematiikkakokemukset eli kokemukset matematiikasta ja itsestä matematiikan oppijana vaikuttavat opiskelijan matematiikkakuvaan (Huhtala & Laine, 2004, 320).

2.1.1 Uskomukset itsestä matematiikan oppijana ja käyttäjänä pääosin tunneperäisiä

Benjamin Bloomin tutkimusten mukaan oppilaiden saavutusten tulosten eroavaisuuksista jopa 25 prosenttia voidaan selittää affektiivisilla tekijöillä (Lindgren, 2004, 383). Asenteet matematiikkaa kohtaan syntyvät matematiikkakokemusten myötä ja usein niihin liittyvät tunteet ovat asenteiden määritteleviä tekijöitä. Asenteisiin kuuluvat myös oppilaan käsitykset matematiikan vaikeusasteesta ja tärkeydestä. Käsitys itsestä matematiikan oppijana on puolestaan ohjaamassa oppilaan asenteita matematiikkaa kohtaan. (Huhtala & Laine, 2004, 329.) Yleisesti matematiikkaa kohtaan suhtaudutaan toisinaan välttelevästi ja torjuvasti. Asenteet ovatkin puolustusmekanismeja oppijalle vaikean matematiikan asian tullessa esiin. (Huhtala & Laine, 2004, 324)

Osa kokemuksista vaikuttaa voimakkaasti oppijan tunteisiin matematiikkaa kohtaan. Matematiikkaan liittyvät tunteet ovat usein voimakkaita ja hetkellisiä ja yksi tutkituimmista matematiikkaan liittyvistä tunteista on matematiikkapelko (Huhtala & Laine, 2004, 324). Matematiikkapelolla, matemaattisten tehtävien välttämisellä ja vahvalla jännittyneisyydellä matematiikan koetilanteissa näyttää olevan negatiivista vaikutusta matematiikan oppimismahdollisuuksiin (Sovchik, 1996). Matematiikkapelko kehittyy useimmiten lapsuusiässä ja huomataan vasta lapsuusiän lopulla tai sen jälkeen. (Huhtala & Laine, 2004, 329–332) Täten myös aikuisiällä opiskelevilla voi olla matematiikkapelkoja, mikäli niitä ei ole käsitelty pelkojen syntymisen jälkeen.

Uskomukset voivat näin ollen olla melko negatiivisia, mutta myös positiivisia. Positiivisen matematiikkakuvan muodostumista edistävät ymmärtämisen ja onnistumisen kokemukset. Näiden kokemusten kautta oppilas oppii kohtaamaan matematiikan entistä avoimemmin ja innostuneemmin. (Huhtala & Laine, 2004, 344)

Minäkäsityksen, eli ihmisen käsityksen omasta ulkonäöstään, taustastaan, kyvyistään, resursseistaan, asenteistaan ja tunteistaan, on todettu olevan yhteydessä koulusaavutuksiin, asenteisiin koulua kohtaan ja opiskelumotivaatioon. Matematiikkaan liittyvää minäkäsitystä on pidetty jopa merkittävimpänä matematiikan saavutuksiin vaikuttavana tunnepitoisena tekijänä aina 1970-luvulta alkaen. Oppilaan matematiikkaan liittyvän minäkäsityksen on huomattu vahvistuvan hänen saamansa päivittäisen erityisopetuksen määrän kasvaessa. (Linnanmäki, 2004, 242–245)

Minäkäsityksen muotoutumiselle merkityksellistä aikaa ovat ensimmäiset kouluvuodet. Tällöin saadut erityisesti heikot tulokset matematiikassa voivat siten vaikuttaa tulevien vuosien suorituksiin. Myöhempiä opiskeluvuosia voi katsoa jokseenkin positiivisesti, koska Byrnen mukaan matemaattinen minäkuva realisoituu tai heikkenee iän myötä. (Linnanmäki, 2004, 245–251) Vastaavaa on todennut Huhtala ja Laine (2004) matematiikkapelkoja tutkiessaan.

2.1.2 Tiedollinen lähestymistapa viittaa kuvaan matematiikasta, matematiikan opettamisesta ja oppimisesta

Uskomukset voidaan hahmottaa enemmän joko kognitiiviselle (tiedolliselle) tai affektiiviselle (tunnepitoiselle) alueelle kuuluviksi. Pehkonen (1998) kuvaa jakautumista siten, että jos pidämme uskomusten ja tiedon rajaa häilyvänä, niin käsitämme uskomukset osana kognitiivista kokonaisuutta. Jos taas ymmärrämme uskomukset lähinnä asenteisiin liittyvänä käsitteenä, niin uskomukset ovat mielestämme osa affektiivista kokonaisuutta. (Pehkonen, 1998, 43).

Sekä korkeakouluopiskelijat että lukiolaiset vastaavat hyvin vaihtelevin kommentein kysymykseen ”Mitä matematiikka on?”. Tutkimuksessa ilmenee, että maisteriopiskelijoilla on hyvin monipuolisia käsityksiä matematiikan luonteesta. Jonkun mielestä matematiikalla ei ole yhteyttä kulttuuriin, toinen ajattelee matematiikan olevan maailmankaikkeuden kieli ja eräs taas pitää matematiikkaa erilaisten mallien opiskeluna. Tällaiset matematiikan luonnetta koskevat uskomukset voivat olla ”joko mahdollisuus tai rajoite luoda yhteyksiä matematiikan käsitteiden ja arkielämän välille”. (Presmeg, 2002)

Tutkimukset (mm. Presmeg, 2002) ovat osoittaneet, että yksilön uskomukset siitä, mitä matematiikka on, voivat vaihdella suurestikin. Eräs kooste opettajien uskomuksista matematiikan luonteesta esiintyy Thompsonin mallissa. Malli jakaantuu kolmelle eri tasolle, jotka on nimetty tasoiksi *Taso 0*, *Taso 1* ja *Taso 2*. Näistä Tasolla 0 matematiikka on aritmeettisten taitojen yleistä käyttämistä arkipäivän tilanteissa. Lisäksi tällä tasolla matemaattinen tieto tarkoittaa mekaanista toistoa ja taitoa menettelytavoissa. Tasolla 1 kaikki matemaattinen tekeminen perustuu säännöille, jolloin ymmärtämisen ja periaatteiden arvostus jää sääntöjen varjoon. Tasolla 2 puolestaan matematiikka on monimutkainen kokonaisuus käsitteitä, menetelmiä ja esitystapoja. (Pehkonen, 1998)

Suomalaiset yläkouluikäiset ovat puolestaan pitäneet mekaanista oppimista hieman tärkeämpänä kuin samanikäiset ruotsalaiset ja unkarilaiset. Myös matemaattinen täsmällisyys ja peruslaskeminen saavat kannatusta suomalaisoppilailta, mutta hieman muita maita vähemmän. (Pehkonen, 1993)

Matemaattisiin uskomuksiin kuuluvat Pehkosen (1993) tutkimuksessa opiskelijoiden käsitykset matematiikan opettamisesta ja oppimisesta. Uskomuksiin vaikuttavat vahvasti opiskelijoiden kehittämät *miniteoriat*. Claxtonin määrittelemänä miniteoriat ovat ”oppijan tiettyä tarkoitusta (esim. jakolaskua) varten muodostamia, tilannesidonnaisia, opetuksen ja oppimisen kautta syntyneitä subjektiivisen tiedon ’pakkauksia’”. Koska miniteoriat syntyvät opetuksen kautta, opettajan rooli niissä ja niiden muokkautumisessa on merkittävä. Toisinaan miniteoriat ohjaavat oppilasta oikeaan suuntaan, mutta joskus ne ovat niin yleistettyjä, että niitä käytetään väärissä tilanteissa. Joissain tapauksissa miniteoria voi olla sääntö, joka ei päde missään tilanteessa. Myös opettajalla voi olla omia miniteorioita, jopa harhaanjohtavia. (Huhtala & Laine, 2004) Usein tutkimuksissa (mm. Hart, 1981) esiin tulleet oppilaiden miniteoriat liittyvät johonkin yksittäiseen matematiikan osa-alueeseen. Näin ollen oppilailla voidaan ajatella olevan myös erilaisia uskomuksia eri matematiikan osa-alueista.

Peruskoululaisilla matematiikan opetuksen sisällöistä on havaittavissa tietyntyyppisiä mielipiteitä, esimerkiksi keskimääräisesti heidän mielestään kunnolliseen matematiikan opetukseen tulee kuulua päässälaskentaa ja mekaanista laskemista (Pehkonen, 1993, 153–159). Lukion pitkän matematiikan oppimiseen suhtaudutaan kaksijakoisesti. Osa panostaa siihen ja osa pyrkii niin sanotusti kokeilemaan, mitä tuloksia matematiikasta saa ilman perusteellista opiskelua. Lukiossa matematiikan opiskeluun panostamisella ja motivoitumisella suuri merkitys näyttää olevan kuitenkin opiskelijan valitsema pakollisuus tai vastaavasti valinnaisuus ylioppilaskirjoituksissa. Valinnaisuuden tultua vaihtoehdoksi pitkän matematiikan opiskelijoilla on alkanut näkyä vastaavia motivaatio-ongelmia matematiikkaa kohtaan kuin lyhyen matematiikan opiskelijoilla on jo aiemmin ollut havaittavissa. (Joutsenlahti, 2004)

Kuparin mukaan useat tutkijat ovat jo 1980-luvulla havainneet, että opettajan uskomuksilla, tiedoilla, arvioilla, ajatuksilla ja päätöksillä on vaikutus opettajan tapaan opettaa (Kupari, 1999, 4). Pehkosen (1993) neljässä maassa tekemän tutkimuksen perusteella suomalaisten yläkouluikäisten oppilaiden mielestä opettajajohtoisuus ei ole yhtä merkittävää kuin samanikäisten ruotsalaisten ja unkarilaisten mielestä. Virossa opettajajohtoisuuden tärkeys oli Suomen kanssa samaa luokkaa. Tästä huolimatta kyseinen tutkimus osoittaa, että oppilaiden osaamiseen vaikuttaa merkittävästi opettajan rooli opetuksessa jokaisen neljän maan kohdalla. Lisäksi opettajien omilla matematiikkakokemuksilla ja heidän matematiikan opintojensa opetuskäytännöillä on todettu olevan yhteys heidän omaan opetustyyliinsä (Lindgren, 2004, 386). Näin ollen oppilaiden matematiikkakuvan muodostumiseen vaikuttavat heidän opettajansa käsitykset ja uskomukset matematiikasta.

Sandqvist kertoo erityisesti ympäristön odotusten näyttävän vaikuttavan siihen, miten oppilas näkee oman osaamisensa ja kuinka hän suhtautuu kyseisen aineen opiskeluun (Lindgren, 2004). Pehkonen (1998, 57) painottaa luokkahuoneessa tapahtuvaa matematiikan opetusta oppilaan matematiikkakuvan muotoutumisessa. Myös opettajaopiskelijat pitävät luokassa vaikuttavaa tunnelmaa ja ilmapiiriä tärkeänä. Siihen liittyy juuri opettajan rooli luokassa ja hänen suhteensa matematiikkaan. Matematiikan opettamisen kehittämisen kannalta tärkeiksi tekijöiksi tutkija Paul Ernest nostaa esiin opettajan henkiset skeemat matematiikasta, sen opettamisesta ja oppimisesta, oppimistilanteen sosiaalinen rakenteen ja erikoisesti sen sisältämät rajoitukset ja mahdollisuudet sekä opettajan ajattelun ja reflektion tason. (Lindgren, 2004)

2.2 Uskomusten muuttamisesta

Opettajilla on omien kokemustensa pohjalta muodostuneita ja myös säilyneitä ennakkouskomuksia matematiikasta. Kaganin tutkimuksen mukaan opettajaopiskelijat helpommin vahvistavat heidän jo vallitsevia käsityksiään kuin muuttavat niitä. Wubbelsin ja Watzlawickin teoria kertoo käsitysten muuttamisen ja vahvistamisen olevan kytköksissä eri aivopuoliskojen kykyyn vastaanottaa ja muuttaa tietoa. Vasemmalle aivopuoliskolle ominaista loogista kieltä käytettäessä on tavanomaista rationalisoida aiempia käsityksiä. Oikea aivopuolisko aktivoituu puolestaan mielikuvitusta sekä vertaus- ja kielikuvia käytettäessä ja näin vaikuttaa vanhojen käsitysten muuttamiseen. Näin ollen opetuksen tulisi sisältää näitä elementtejä, mikäli vääriä käsityksiä halutaan oikaista. (Lindgren, 2004, 386–394)

Ilmeisesti myös opetustavoilla on merkitystä uskomusten muuttamisessa. Aikuisopiskelijoiden uskomuksia matematiikasta tutkiessa on huomattu heilläkin olevan joitain opettajan näkemyksistä poikkeavia uskomuksia. Esimerkiksi itävaltalaiset aikuisopiskelijoista selvästi yli puolet pitää matematiikkaa ainakin osittain laskusääntöjen kokoelmana. Tähän vaikuttavana tekijänä nähdään juuri opetus- ja oppimismetodit. (Schlöglmann & Kepler, 2007)

Uskomusten muotoutumisen ja muokkaamisen kannalta matematiikkakuvan huomioimista opetuksessa pidetään tärkeänä. Syynä tähän on se, että matematiikkakuva vaikuttaa opiskelijoiden kykyyn omaksua uutta matemaattista tietoa.

Näin ollen uskomukset voivat olla joko esteenä tai edistävänä tekijänä uuden oppimisessa. (Kaasila, Laine & Pehkonen, 2004, 397–398)

Presmegin (2002) tutkimus osoittaa, että uskomukset voivat muuttua harjoittelun myötä. Kaganin mukaan kuitenkin matematiikkaan liittyvien käsitysten muuttaminen näyttää olevan haasteellista (Lindgren, 1997, 309). Matematiikkakuvan muuttumista edistäviä tekijöitä ovat onnistumisen kokemukset, varmuuden kokeminen, innostuminen ja matematiikan hyödylliseksi kokeminen, kannustava ja turvallinen ilmapiiri. Erityisesti opettajakokelailla opettajan vastuun herääminen ja asettuminen oppilaan asemaan sekä omien kokemusten pohtiminen ja työstäminen muovaavat matematiikkakuvaa. Suurimpaan osaan näistä tekijöistä liittyy kognitiivinen ja affektiivinen osa, mutta myös sosiaalisuus ja kulttuurisuus määrittävät joitain tekijöistä. (Kaasila, Laine & Pehkonen, 2004)

Yksilö on itse uskomustensa määrittelijä ja liittää usein uskomuksensa jo olemassa oleviin uskomuksiin, joko omiin tai yleisesti vallitseviin (Green, 1971). Näin uskomuksista syntyy tietynlainen verkosto, joka saattaa sisältää myös epäloogisia yhteyksiä. Yleisesti määriteltynä epälooginen yhteys on kuitenkin tätä yhteyttä käyttävän yksilön mielestä looginen, jolloin sitä kutsutaan kvasiloogiseksi. (Kaasila, Laine & Pehkonen, 2004)

2.3 Matematiikan osa-alueita eri vuosisatoina ja -kymmeninä yleissivistävässä opetuksessa

Monet matematiikan opetukseen liittyvät toimintatavat ovat saaneet alkunsa jo ennen peruskoulumalliin siirtymistä. Näin ollen myös uskomusten historia ulottuu menneille vuosisadoille. Matematiikan opetus Suomen kouluissa sai varsinaisesti alkunsa vasta Turun lukion perustamisen yhteydessä 1630. Geometria vaikutti ajan matemaattiseen ajatteluun voimakkaasti, vaikka matematiikan kurssiin kuuluikin tällöin geometrian lisäksi aritmetiikkaa, algebraa, kirkollista ajanlaskua ja matemaattista maantietoa. (Kupari, 1999, 44–45)

Malmion ja Junnilan tutkimukset kertovat, että 1700-luvun alkupuolella Vanhan Suomen triviaalikouluissa luvunlaskua opetettiin vain kahdella luokalla 2 tuntia viikossa. Vuosisadan vaihtuessa piirikouluissa alettiin antaa aritmetiikan opetusta hieman enemmän ja 1800-luvun puolivälin tienoilla matematiikan opetuksen arvostuksen kasvaessa myös yläalkeiskoulun opetukseen tuli mukaan geometria. Matematiikan määrä opetuksessa kasvoi entisestään vuosisadan loppupuolella ja 5-vuotisen reaalikoulun opetusohjelmaan kuului aritmetiikkaa, algebraa, trigonometriaa, geometriaa ja kuvioiden muoto-oppia. Vuoden 1916 opetussuunnitelma vähensi huomattavasti matematiikan opetuksen määrää kouluissa ja lukioon vaadittiin jopa linjaa, jossa ei olisi ollenkaan matematiikkaa. (Kupari, 1999, 45–46)

Monien matematiikan opetuksen uudistamisyritysten jälkeen matematiikan opetussisältöjen painotuksia muutettiin hieman 1940-luvun oppikouluissa. Etenkin Kalle Väisälän laatimat oppikirjat Algebran oppi- ja esimerkkikirja (useampi osa) sekä Geometrian ensimmäinen osa loivat vahvan pohjan 1950- ja 1960-lukujen matematiikan opetukselle. (Kupari, 1999, 47–48)

Pohjoismaiden matematiikan opetuksen uudistamistoimikunta (PMOU) määritti 12-luokkaisen yleissivistävän koulun (peruskoulun ja lukion) matematiikan opetuksen tavoitteet 1960-luvulla. Tähän perustuen suunniteltiin Suomen peruskoulun matematiikan opetussuunnitelma. (Kupari, 1999, 48–49) Matematiikkaa pyrittiin muuttamaan nykyaikaisemmaksi 1970-luvulla, mikä puolestaan johti yleisesti matematiikan luonteen esilletulemiseen eritavalla. Nimittäin todistamisajattelu oli keskeinen kiistelyn aihe 1970-luvun uudistuksen yhteydessä. (Malinen, 2004, 100) 2000-luvun peruskoulun oppikirjoja tarkasteltaessa voidaan todeta, että heidän aikanaan koulussa on opetettu suurimmalta osin aritmetiikkaan ja algebraan pohjautuvaa matematiikkaa sekä jonkin verran geometriaa ja todennäköisyyttä. Tosin harva opiskelija tietää, että esimerkiksi polynomilausekkeet ovat osa algebraa. Osa lukion käyneistä opiskelijoista näyttääkin osaavan melko heikosti lukiossa usein läpikäytyjä tehtävätyyppejä (Tarvainen, 2004). Tähän he kertovat syiksi muun muassa lukion oppimäärän laajuuden, motivaation tai sen puutteen, vähäiset vaatimukset lukiossa ja hitaimman oppilaan heikko tukeminen opettajan taholta (Tarvainen, 2004).

Eukleideen Alkeet vaikutti merkittävästi Länsi-Euroopan matematiikan kouluopetukseen Nykäsen mukaan 1900-luvulle saakka (Malinen, 2004, 101). Tällöin klassinen todistaminen oli keskeistä koulumatematiikkaa. Eukleideen ongelmanratkaisuprosessin tärkeitä vaiheita ovat esittäminen (enunciation), selventäminen (setting-out), määritteleminen (definition tai specification), konstruointi (construction tai machinery), todistaminen (proof) ja johtopäätös (conclusion) (Heath, 1956, 129). Nyttemmin vaiheina pidetään oletusta, väitöstä ja todistusta (Malinen, 2004, 102).

Yleisesti ottaen tämä matematiikan perusosaamisen taito, todistaminen, ei näytä juuri tulevan esiin nykyään lukion oppikirjoissa. Tämän onkin todettu tuottavan vaikeuksia yliopiston matematiikan osaamiseen. Osa yliopiston matematiikan opiskelijoista onkin toivonut lukioon matemaattisen ajattelun opettamista sekä todistamisen periaatteita. (Malinen, 1991, 20) Lisäksi jotkin matematiikan osa-alueita kuvaavat käsitteet ovat lähes kadonneet lukiokirjoista. Sanat algebra ja differentiaalilaskenta tulevat harvoin vastaan. Algebraa tosin on usealla kurssilla ja näillä käytetään usein funktio- ja yhtälö-käsitteitä sekä muita laskutoimituksia kuvaavia otsikoita. Differentiaalilaskennasta puhutaan usein vain derivointina tai derivaattana.

Matematiikka onkin nykyisin lukiossa jaoteltu osa-alueisiin pääasiassa kurssijaottelulla. Lukion matematiikan pitkän oppimäärän pakolliset kurssit ovat Funktiot ja yhtälöt (MAA1), Polynomifunktiot (MAA2), Geometria (MAA3), Analyyttinen geometria (MAA4), Vektorit (MAA5), Todennäköisyys ja tilastot (MAA6), Derivaatta (MAA7), Juuri- ja logaritmifunktiot (MAA8), Trigonometriset funktiot ja lukujonot (MAA9) ja Integraalilaskenta (MAA10) sekä syventävät kurssit Lukuteoria ja logiikka (MAA11), Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä (MAA12) ja Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi (MAA13). Puolestaan lyhyen oppimäärän pakollisia kursseja ovat Lausekkeet ja yhtälöt (MAB1), Geometria (MAB2), Matemaattisia malleja I (MAB3), Matemaattinen analyysi (MAB4, jonka keskeisenä sisältönä mm. polynomifunktion derivaatta), Tilastot ja todennäköisyys (MAB5) ja Matemaattisia malleja II (MAB6). Syventäviä kursseja ovat Talousmatematiikka (MAB7), Matemaattisia malleja III (MAB8, jonka keskeisiä sisältöjä ovat mm. vektorin käsite ja vektoreiden peruslaskutoimitusten periaatteet). (LOPS, 2003)

3 Tutkimustehtävä ja tutkimuskysymykset

Tutkimuksen tarkoituksena on analysoida aikuislukiolaisten matematiikan opiskelijoiden uskomuksia matematiikasta. Tarkemmin ottaen pyritään kuvaamaan, millaisia uskomuksia (itsestä, matematiikasta, matematiikan opettamisesta ja oppimisesta) heillä on, sekä erityisesti tulkitsemaan, millaisia uskomuksia heillä on matematiikan osa-alueita kohtaan. Tutkimuskysymykset ovat seuraavat:

1. Mitä uskomuksia yksittäisen opiskelijan matematiikkakuva sekä kuva tietystä osa-alueesta sisältävät?
    a. Mitä uskomuksia itsestään matematiikan oppijana ja käyttäjänä heillä on matematiikan eri osa-alueista sekä matematiikasta yleisesti?
    b. Millä tavoin opiskelijat käsittävät kunkin osa-alueen sekä yleisesti matematiikan sisällön ja luonteen?
    c. Mitä uskomuksia heillä on matematiikan opettamisesta ja oppimisesta matematiikan eri osa-alueilla sekä matematiikassa yleisesti?

2. Mitä tekijöitä yksittäisen opiskelijan matemaattisissa uskomuksissa nousee esiin?
    a. Mitä ennakkokäsityksiä opiskelijoilla on aiheista, joita he eivät ole käsitelleet vielä lukiossa?
    b. Mitä eroja ja yhtäläisyyksiä eri matematiikan osa-alueisiin kohdistuvissa uskomuksissa on?
    c. Millä tavoin uskomukset matematiikasta yleisesti eroavat matematiikan osa-alueisiin kohdistuvista uskomuksista?

3. Mitkä tekijät matematiikkaan ja sen osa-alueisiin kohdistuvista uskomuksissa toistuvat opiskelijoiden kesken?

Tutkimuskysymyksiin pyritään saamaan vastauksia kyselylomakkeen väitteiden ja avointen kysymysten perusteella. Yleisesti matematiikkaa koskevia väitteitä on 14 ja yksi avoin kysymys, joita ovat:

1. Matematiikka on vaikeaa.
2. Opettajan rooli on matematiikan oppimisessa suuri.
3. Matematiikka on kiinnostavaa.
4. Tavoitteeni matematiikan tehtävissä on korkealla.
5. Olen taitava matematiikassa.
6. Matematiikassa keskeistä on laskutekniikka.
7. Matematiikassa keskeistä on hahmottamiskyky.
8. Matematiikassa keskeistä on looginen päättely.
9. Pidän matematiikasta.
10. Matematiikka on tärkeää.
11. Matematiikkaa kuuluu opettaa monipuolisesti.
12. Matematiikkaa voi oppia monella eri tavalla.
13. Voin käyttää matematiikkaa arkielämässä.
14. Voin käyttää matematiikkaa jatko-opinnoissani tai työssäni.

sekä avoin kysymys

”Mitä matematiikka on?”.

Neljää matematiikan osa-aluetta (geometriaa, todennäköisyyttä, derivointia ja vektoreita) koskevia väitteitä on 15 ja yksi avoin kysymys. Esimerkiksi geometriaa koskevat väitteet ovat seuraavat.

1. Geometria on vaikeaa.
2. Opettajan rooli on geometrian oppimisessa suuri.
3. Geometria on kiinnostavaa.
4. Tavoitteeni geometrian tehtävissä on korkealla.
5. Olen taitava geometriassa.
6. Geometriassa keskeistä on laskutekniikka.
7. Geometriassa keskeistä on hahmottamiskyky.
8. Geometriassa keskeistä on looginen päättely.
9. Pidän geometriasta.
10. Geometria on tärkeä osa matematiikkaa.
11. Geometriaa kuuluu opettaa monipuolisesti.
12. Geometriaa voi oppia monella eri tavalla.
13. Voin käyttää geometriaa arkielämässä.
14. Voin käyttää geometriaa jatko-opinnoissani tai työssäni.

Olen osallistunut MAA3- tai MAB2-kurssille. (Kyllä/ Ei)

Mitä geometria on?

4 Tutkimuksen toteuttaminen ja tutkimustulosten esittämisen vaiheet

Tutkimusstrategiani on lähinnä kvalitatiivinen (l. laadullinen), koska tutkimukseni tarkoitus on tuoda esiin mahdollisia piirteitä eri matematiikan osa-alueilla yksittäisen opiskelijan näkökulmasta. Toisaalta tutkimustani voidaan rajatussa ympäristössä pitää määrällisenä, koska yhden opiskelijan omia vastauksia eri matematiikan osa-alueita koskevissa väitteissä voidaan verrata keskenään.

Menetelmä tutkimuksessani on empiirinen, koska mittaan kyselyllä opiskelijoiden senhetkisiä kokemusperäisiä uskomuksia ja vertaan niitä jo olemassa olevaan tutkimustietoon. Analysoin aineistoa niin empiirisesti kuin deskriptiivisesti eli yhtäältä pyrin tekemään päätelmiä aiemman tiedon varassa ja toisaalta pyrin kuvailemaan ilmiöitä, jotka ovat vielä toistaiseksi vieraita.

Tutkimusasetelmana on tapaustutkimus, koska aineisto koostuu vain yhden oppilaitoksen opiskelijoiden vastauksista. Tutkimustulokset voivat antaa viitteitä yleisesti lukio-opiskelijoiden uskomuksista eri matematiikan osa-alueita kohtaan, mutta suoranaisesti niitä ei voida yleistää koko suomalaiseen opiskelijakuntaan. Tutkimuksen tarkoituksena onkin pohtia tämän pienehkön opiskelijajoukon uskomuksia matematiikan eri osa-alueista eri puolilta. Näkökulma tutkimukseen on opiskelijoiden oma ja sen taustalla on kunkin opiskelijan kokemukset perustuen suomalaiseen opetuskulttuuriin.

4.1 Aineiston hankinta

Koska aiemmin ei ole tehty vastaavaa kurssi- tai aihekohtaista tutkimusta Suomessa, otan tutkimuskohteekseni melko pienen joukon lukiolaisia. Tutkimuksen tarkoituksena on nostaa opiskelijoiden matematiikkakuvasta mahdollisia eroavaisuuksia esille eri matematiikan osa-alueiden välillä sekä verrattuna yleiseen matematiikkakuvaan. Mikäli eroavaisuuksia löytyy, mahdollisissa jatkotutkimuksissa olisi merkittävää laajentaa vastaajajoukkoa.

Tutkimukseni kohteena ovat yhden pääkaupunkiseudun aikuislukion matematiikan opiskelijat. Tutkimukseen osallistuneista osa on nuorisoikäisiä ja osa aikuisia. Lisäksi osa opiskelijoista on kaksoistutkinto-opiskelijoita. Näin tutkimusaineistolla on mahdollisuus nostaa esiin keskenään erityyppisten opiskelijoiden mielipiteitä ja uskomuksia opiskelijoiden keskuudesta. Kerään aineiston nykyisen työpaikkani matematiikan opiskelijoiltani. Tarkemmin ottaen tutkimusaineistoon osallistuu sekä pitkän, että lyhyen matematiikan opiskelijoita ja ne henkilöt, jotka aineistoa kerättäessä ajoittuvat pitämilleni matematiikan kursseille. Syy siihen, miksi valitsen marraskuun 2012 aineiston keruulle, on se, että opiskelijoistani jokainen oli siihen mennessä jo tutustunut vähintään yhden kurssin verran lukiomatematiikkaan.

Suunnittelin tutkimusaineiston hankintaa varten kyselylomakkeen. Kyselylomake koostuu neljään eri matematiikan osa-alueeseen liittyvistä väitteistä ja avoimista kysymyksistä sekä yleisistä matematiikkaan liittyvistä väitteistä. Kyselyyn aioin valita muutaman lukiomatematiikkaan kuuluvan osa-alueen. Aiheiden valintaan vaikutti kyselyhetkellä meneillään olevat kurssit sekä oma arvio siitä, millä aihealuilla opiskelijoilla saattaisi olla toisistaan poikkeavia mielipiteitä. Tarkoituksena ei ole tutkimuksessa osoittaa kaikkia uskomuksia kaikista matematiikan osa-alueista, vaan pikemminkin nostaa esiin joitain merkittäviä tekijöitä.

Kyselylomake jakaantuu viiteen osaan; matematiikkaan, geometriaan, todennäköisyyteen, derivointiin ja vektoreihin. Lukion opetussuunnitelman perusteiden (LOPS, 2003) mukaisesti nimesin kuhunkin osioon yhden lukion matematiikan pitkän oppimäärän ja lyhyen oppimäärän kurssin. Osa näistä kursseista on suoraan aiheesta, joissain kyseinen aihe on kurssin keskeistä sisältöä. Lisäsin jokaisen osion loppuun kysymyksen, onko opiskelija osallistunut aihetta käsittelevälle kurssille (ks. liite 1).

Teoriaa kootessani (ks. Pehkonen, 1998) havaitsin suurelta osin taipuvani affektiiviselle puolelle kiinnostavia matematiikkakuvan osa-alueita miettiessäni. Niinpä pyrin kriittisesti valitsemaan väitteitä kyselylomakkeeseen. Lopulta päädyin 14 väitteeseen, joista osa kuvastaa affektiivista puolta ja osa kognitiivista puolta. 14 väitteen lisäksi kussakin viidessä osiossa on avoin kysymys. Kyselylomakkeen väitteet perustuvat niihin seikkoihin, jotka teoriaosuudesta heräsivät mieleeni. Lisäksi tutkimustehtäviä tukemaan kysyttiin jokaiselta vastaajalta taustatietoja, mikäli näitä tultaisiin tarvitsemaan (ks. liite 1).

Kyselylomakkeen osa väitteistä kuuluu osaan ”kuva itsestä matematiikan oppijana ja käyttäjänä” (ks. Kaasila, Laine & Pehkonen, 2004), jotka ovat lähinnä affektiivisia eli tunne- ja kokemusperäisiä. Näitä ovat seuraavat väitteet (esimerkkinä aihealue geometria):

1. Geometria on vaikeaa.
3. Geometria on kiinnostavaa.
4. Tavoitteeni geometrian tehtävissä on korkealla.
5. Olen taitava geometriassa.
9. Pidän geometriasta.
10. Geometria on tärkeä osa matematiikkaa.

Muut väitteet kuuluvat ”kuvaan matematiikasta, matematiikan opettamisesta ja oppimisesta”. Nämä väitteet ovat pääosin kognitiivisia eli ne nojautuvat opiskelijan tietoon kyseisestä asiasta (ks. Kaasila, Laine & Pehkonen, 2004). Tosin opiskelijan tieto on myös kokemusperäistä (Malmivuori, 1993), ja siten voi sisältää joitain vaikutteita tunnepohjaisista uskomuksista. Toiseen osaan kuuluvia väitteitä ovat (esimerkiksi geometriasta):

2. Opettajan rooli on geometrian oppimisessa suuri.
6. Geometriassa keskeistä on laskutekniikka.
7. Geometriassa keskeistä on hahmottamiskyky.
8. Geometriassa keskeistä on looginen päättely.
11. Geometriaa kuuluu opettaa monipuolisesti.
12. Geometriaa voi oppia monella eri tavalla.
13. Voin käyttää geometriaa arkielämässä.
14. Voin käyttää geometriaa jatko-opinnoissani tai työssäni.

Mitä geometria on?

Näistä väitteistä väitteet 6, 7, 8, 13, 14 ja avoin kysymys liittyvät käsitykseen geometriasta. Väitteet 2 ja 11 liittyvät käsitykseen geometrian opettamisesta ja väite 12 käsitykseen geometrian oppimisesta. Toisaalta geometrian luonnetta kuvaavat väitteet liittyvät myös käsitykseen geometrian oppimisesta, joskaan eivät suoranaisesti.

Kuhunkin väitteeseen vastataan asteikolla 1 (täysin eri mieltä)… 5 (täysin samaa mieltä) tai en osaa sanoa (taulukoidussa datassa merkattu kirjaimella E). Lisäksi geometrian, todennäköisyyden, derivoinnin ja vektoreiden osiossa kysyttiin, onko opiskelija osallistunut kurssille, jolla käsitellään kyseessä olevaa aihetta (ks. liite 1).

4.2 Aineiston analysointi

Aineistonkeruun jälkeen sekoitin lomakkeet keskenään ja numeroin kunkin opiskelijan vastauslomakkeet yhdestä eteenpäin (yhteensä 31). Tutkimustuloksia esittäessäni käytän vastaajista muotoa ”opiskelija 1”, jos hän oli numeroinnin yhteydessä ensimmäisenä ja niin edelleen muidenkin opiskelijoiden kohdalla. Kunkin opiskelijan kyselyn ennakkotiedot ja vastaukset taulukoitiin taulukko-ohjelmalla, niin että yhden opiskelijan vastauksia eri osioihin oli selkeää verrata. Taulukoinnin yhteydessä käytettiin merkintöjä matematiikka = I, geometria = II, todennäköisyys = III, derivointi = IV ja vektorit = V. Lisäksi vastaukset asteikolla 1–5 kirjattiin numeroin ja vastaus ”en osaa sanoa” kirjaimella E.

Tutkimustuloksia analysoitaessa oli tarkoitus ennen kaikkea verrata yksittäisen opiskelijan uskomuksia eri matematiikan osa-alueisiin ja koko matematiikkaan. Analysoinnissa kiinnitettiin huomiota ensin niihin vastauksiin, joissa opiskelijalla oli mielipide huolimatta siitä, että hän ei ollut osallistunut kyseistä aihetta käsittelevälle lukiokurssille. Toisekseen havainnoitiin viiden eri aihealueen välillä olevia vastauksia, jos niissä oli yli yhden poikkeamia toisiinsa nähden.

Tutkimustuloksia esittäessäni en ota kantaa muihin osa-alueisiin kuin mitä olen tutkimuksessani käsitellyt. Jos puhun osa-aluista yleisesti, niin tarkoitan sillä vain geometriaa, todennäköisyyttä, derivointia ja vektoreita.

Opiskelijoiden ennakkoasenteita selvittääkseni kävin tutkimusaineistoni läpi järjestyksessä alkaen opiskelijasta, jonka olin merkinnyt numerolla 1, ja poimin tarkasteltavaksi ne opiskelijat, jotka eivät olleet käyneet jotain kurssia. Jaoin heidät tutkimustuloksia kirjatessani kahteen osaan heidän vastaustensa perusteella; opiskelijoihin, joilla on ennakkouskomuksia aiheista ja opiskelijoihin, joilla ei ole. Tulkitsin opiskelijalla olevan ennakkouskomuksia, mikäli hän on vastannut asteikolla 1–5 väitteeseen aiheesta, jonka lukiokurssille hän ei ole osallistunut. Jos hän on vastannut ”en osaa sanoa” aiheen jokaiseen väitteeseen, tulkitsin, että hänellä ei ole kyseisestä aiheesta ennakkouskomuksia. Niistä, joilla on ennakkouskomuksia, analysoin, onko heillä eri osa-alueiden kesken eroavaisuuksia vastauksissa. Puhun tutkimuksessani siis ennakkouskomuksista tarkoittaen uskomuksia, jotka vallitsevat aiheesta jo ennen aiheesta käytyä lukiokurssia.

Tarkastelin ensin niiden opiskelijoiden vastauksia, jotka ovat kertoneet mielipiteensä tietyn matematiikan osa-alueen väitteisiin, vaikka eivät ole käyneet sen osa-alueen lukiokurssilla. Tämän jälkeen analysoin opiskelijoiden vastauksia, jotka ovat kertoneet osallistuneensa tietyn aiheen lukiokurssille. Heidän kohdallaan puhun uskomuksista, koska lukiokurssilla oleminen on voinut muuttaa heidän uskomuksiaan aiheeseen liittyen. Tutkimustuloksia analysoitaessa oletetaan, että opiskelijat ovat antaneet ennakkotiedot totuudenmukaisesti.

Tutkimustuloksia kertoessani ja niitä analysoidessani kerron, että opiskelijalla on uskomus aiheesta, mikäli hän on vastannut asteikolla 1–5 kysymyksiin eikä vastausta ”en osaa sanoa”. Jos opiskelija on vastannut tietyn osa-alueen kohdalla jokaiseen väitteeseen ”en osaa sanoa”, tulkitsin, että hänellä ei ole uskomusta kyseisestä aiheesta.

Kun opiskelija oli vastannut tiettyyn väitteeseen eri osa-alueiden kohdalla samalla numerolla (esim. 4) tai yhden heikomman tai vahvemman numeron (esim. vastaavasti 3 tai 5), niin käytän ilmaisua, että hän on samaa tai lähes samaa mieltä väitteestä eri osa-alueiden kohdalla. Puolestaan, jos opiskelijan vastauksissa on eri osa-alueiden välillä samasta väitteestä yli yhden arvon poikkeama asteikolla 1–5, niin puhun erosta tai poikkeavuudesta osa-alueiden välillä. Tutkimustulosten esittämisessä jotkin tulokset esitetään lyhyiden taulukoiden avulla, jotta tulos ilmenisi lukijalla selkeästi. Näissä tapauksissa aihealueen kohdalle on merkitty kolme pistettä (ks. taulukko 2, s. 26).

Kirjoittaessani tulokset tekstimuotoon, merkitsin vastausten perään sulkuihin väitteeseen liittyvän vastauksen. Esimerkiksi sanoessani ”opiskelija pitää geometriasta (5), muttei vektoreista (2) niinkään” tarkoitan, että opiskelija on vastannut väitteeseen ”Pidän geometriasta” vastauksen 5 ja ”Pidän vektoreista” vastauksen 2.

Tutkimustulosten tulkitseminen oli toisinaan hankalaa siltä osin, kun vertasin väitteiden vastauksia matematiikan ja tietyn matematiikan aiheen välillä. Suoranaisestihan ei esimerkiksi voi verrata väitteitä ”Voin käyttää matematiikkaa arkielämässä” ja ”Voin käyttää geometriaa arkielämässä”. Jos opiskelija on uskonut, ettei voi käyttää matematiikkaa, mutta geometriaa voi, niin geometria kuitenkin on osa matematiikkaa. Väitteistä saa kuitenkin jonkinlaisen kuvan siitä, millaiset uskomukset opiskelijalla on matematiikan hyödyllisyydestä ja toisaalta eri matematiikan osa-alueiden hyödyllisyydestä.

5 Tutkimustulokset ja niiden tulkintaa

Osa opiskelijoista on osallistunut jokaisen neljän aiheen (geometria, todennäköisyys, derivointi, vektorit) lukiokurssille. Heitä on kymmenen koko vastaajajoukossa, kun vastaajia on kaikkiaan 31. Kyselyyn vastanneista opiskelijoista jokainen on osallistunut ainakin yhdelle kysytyistä neljästä kurssista joko pitkässä tai lyhyessä matematiikassa, koska kysely toteutettiin näiden neljän kurssin tunneilla olleilla opiskelijoilla. Joillain kursseilla saattoi olla keskenään samoja opiskelijoita, jolloin pyysin, etteivät he täyttäisi kyselyä uudestaan. Opiskelijoista kolme (opiskelijat 28, 29 ja 30) eivät vastanneet kaikkien kurssien kohdalla, ovatko osallistuneet kurssille vai eivät. Loput 17 vastaajaa ovat osallistuneet osalle kursseista ja osalle eivät. Opiskelijoiden vastaukset ovat koottuna taulukkoon (liite 2). Niistä väitteistä, joiden kohdalla eroavaisuuksia ei mainita, opiskelija on ollut samaa tai lähes samaa mieltä eri aihealueiden kesken.

5.1 Ennakkouskomuksia matematiikan osa-alueista

Kaksitoista (12) vastaajaa (opiskelijat 3, 4, 5, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 25 ja 27) ovat kertoneet mielipiteensä ainakin johonkin väitteeseen koskien matematiikan osa-aluetta, jonka lukiokurssille he eivät ole osallistuneet. Näillä opiskelijoilla voidaan sanoa olevan ennakkouskomuksia kyseisestä aihealueesta siitä näkökulmasta, että ennen lukiota syntyneet uskomukset ovat lukiokursseille mentäessä ennakkouskomuksia.

Joidenkin opiskelijoiden ennakkouskomukset muistuttavat paljon muita osa-alueita koskevia uskomuksia. Opiskelija 4 kertoo, ettei ole käynyt lukion todennäköisyyden kurssia. Hän vastaa kyseiseen aiheeseen liittyviin väitteisiin tästä huolimatta asteikon 1–5 mukaisesti (taulukko 1).

1. Todennäköisyys on vaikeaa.	4
2. Opettajan rooli on todennäköisyyden oppimisessa suuri.	3
3. Todennäköisyys on kiinnostavaa.	3
4. Tavoitteeni todennäköisyyden tehtävissä on korkealla.	3
5. Olen taitava todennäköisyydessä.	2
6. Todennäköisyydessä keskeistä on laskutekniikka.	
7. Todennäköisyydessä keskeistä on hahmottamiskyky.	2
8. Todennäköisyydessä keskeistä on looginen päättely.	2
9. Pidän todennäköisyydestä.	2
10. Todennäköisyys on tärkeä osa matematiikkaa.	2
11. Todennäköisyyttä kuuluu opettaa monipuolisesti.	2
12. Todennäköisyyttä voi oppia monella eri tavalla.	2
13. Voin käyttää todennäköisyyttä arkielämässä.	2
14. Voin käyttää todennäköisyyttä jatko-opinnoissani tai työssäni.	2

Taulukko 1. Opiskelijan (nro 4) vastaukset aiheesta todennäköisyys.

Nämä vastaukset ovat väitekohtaisesti korkeintaan yhden arvon (asteikolla 1–5) päässä sekä matematiikkaan yleisesti että geometriaan liittyvistä vastauksista. Siksi voidaan tulkita, että opiskelijan ennakkouskomuksensa todennäköisyydestä ovat samankaltaisia kuin uskomukset matematiikasta ja geometriasta.

Melko paljon toisistaan poikkeavia vastauksia on opiskelijan (numerolla 16) vastauksissa. Opiskelija kertoo osallistuneensa lukiossa geometriaa ja vektoreita käsitteleville kursseille. Hän on vastannut lukiosta tuttujen aiheiden lisäksi useaan todennäköisyyttä koskevaan väitteeseen asteikolla 1–5. Todennäköisyyttä koskevat vastaukset muistuttavat kuitenkin paljon yleisesti matematiikkaa koskevien väitteiden vastauksia. Suurimmat erot ovat sen sijaan matematiikan, geometrian ja vektoreiden välisissä vastauksissa. Aiheeseen todennäköisyys liittyviin väitteisiin vastannut opiskelija 18 ei ole käynyt hänkään kyseistä lukiokurssia. Hänen uskomuksensa todennäköisyydestä ovat samankaltaisia kuin matematiikasta yleensä. Eroja sen sijaan on joidenkin väitteiden kohdalla niistä aiheista, jotka ovat hänelle lukiosta tuttuja. Näiden opiskelijoiden muista poikkeavuuksista väitteissä kerrotaan lisää luvussa 5.2.1.

Osalla opiskelijoista ennakkouskomukset ovat muiden uskomusten kaltaisia pääpiirteissään, mutta poikkeavat kuitenkin joidenkin väitteiden kohdalla niistä.

Opiskelija 5 on eräs näistä vastaajista ja hänen ennakkouskomuksensa liittyvät aiheeseen todennäköisyys. Hänellä ainoastaan yhden todennäköisyyden väitteen vastaus poikkeaa yli yhden arvon muiden aiheiden vastaavasta väitteestä. Opiskelija ei usko voivansa käyttää geometriaa (1) jatko-opinnoissaan tai työssään, kun taas todennäköisyyttä (3) hän uskoo ehkä voivansa käyttää joissain tilanteissa.

Yksittäisiä ennakkouskomuksia on havaittavissa todennäköisyyden lisäksi geometrian ja vektoreiden kohdalla. Opiskelija 14 kertoo osallistuneensa vain vektoreita käsittelevälle lukiokurssille. Pääosin hän vastaakin ”en osaa sanoa” väitteisiin aiheista, joita ei ole lukiokursseilla käsitellyt. Hänellä on geometriasta todennäköisyyttä ja derivointia enemmän mielipiteitä. Poikkeavina vastauksina esiin nousevat seuraavat. Opiskelija pitää geometriaa melko helppona (2), mutta matematiikkaa yleisesti ottaen ja vektoreita melko vaikeana (vastaukset 4). Opiskelija uskoo voivansa käyttää matematiikkaa sekä geometriaa ja vektoreita sen osa-alueena jatko-opinnoissaan tai työssään (vastaukset 5). Kuitenkaan todennäköisyyttä (3) hän ei usko yhtä vahvasti voivansa käyttää jatko-opinnoissaan tai työssään.

Eräs opiskelija (numerolla 25) ei ole käynyt vektoreihin liittyvää kurssia, mutta vastaa useisiin siihen liittyviin väitteisiin asteikolla 1–5. Suurin osa vastauksista noudattaa matematiikkaa tai muita osa-alueita koskevien väitteiden vastauksia. Muutama eroavaisuuskin on vastausten välillä. Opiskelija ei pidä vektoreita yhtä lailla kiinnostavana (2) kuin matematiikkaa ja geometriaa (4). Lisäksi opiskelija uskoo, ettei vektoreissa (2) ole juuri keskeistä laskutekniikka kuten ei matematiikassakaan (2). Todennäköisyydessä hän pitää laskutekniikkaa jo jonkin verran edellisiä keskeisempänä (4). Hän ei pidä vektoreita (2) matematiikan yhtä tärkeänä osana kuin derivointia (4).

Joillain opiskelijoilla ilmenee ennakkouskomuksissa, että heidän uskomuksensa tietystä osa-alueesta ovat kokonaisuudessaan varsin muista poikkeavia. Opiskelijan voimakkaat ennakkouskomukset voivat hidastaa tai edistää oppimista ja toisaalta niiden ei voida olettaa muuttuvan nopeasti (Lindgren, 1997; Presmeg, 2002). Uskomuksia voi kuitenkin muuttaa harjoittelun kautta ja suotuisassa ympäristössä (Lindgren, 2004; Presmeg, 2002). Opiskelijoiden 12 ja 13 vastaukset kiinnostavat, koska heillä näyttää juuri olevan tietty osa-alue joka nousee esiin ennakkouskomuksissa. Molemmat heistä ovat osallistuneet lukiokursseille aiheista geometria ja vektorit, mutteivät aiheista todennäköisyys ja derivointi.

Opiskelijan (numerolla 12) vastaukset ovat pääpiirteissään yhdenmukaisia eri kurssien välillä eli vastausten ero on korkeintaan yksi (taulukko 2). Joissain väitteissä tätä suurempia eroja kuitenkin on havaittavissa.

	Matematiikka	Geometria	Todennäköisyys	Derivointi	Vektorit
1. … on vaikeaa.	3	4	E	E	2
2. Opettajan rooli on … oppimisessa suuri.	4	4	4	4	5
3. … on kiinnostavaa.	2	2	4	E	3
4. Tavoitteeni … tehtävissä on korkealla.	3	2	2	2	3
5. Olen taitava …	2	2	2	E	3
6. … keskeistä on laskutekniikka.	4	4	4	3	3
7. … keskeistä on hahmottamiskyky.	3	3	5	3	4
8. … keskeistä on looginen päättely.	3	3	5	3	4
9. Pidän...	2	2	2	E	3
10. … on tärkeää/ tärkeä osa matematiikkaa.	3	2	3	E	2
11. … kuuluu opettaa monipuolisesti.	3	3	E	4	3
12. ...voi oppia monella eri tavalla.	4	3	3	3	4
13. Voin käyttää … arkielämässä.	4	2	4	2	2
14. Voin käyttää … jatko-opinnoissani tai työssäni.	3	E	3	E	E

Taulukko 2. Opiskelijan (nro 12) vastaukset kaikista osa-alueista.

Todennäköisyys (4) on kiinnostavampaa opiskelijan mielestä kuin geometria ja matematiikka yleisesti ottaen (vastaukset 2). Samoin hän pitää todennäköisyydessä (5) hahmottamiskykyä ja loogista päättelyä keskeisenä, kun taas geometriassa, derivoinnissa ja matematiikassa sitä vähemmän keskeisenä (vastaukset 3). Todennäköisyyttä (4) on myös arkielämän yhteydessä mahdollista käyttää samoin kuin matematiikkaa yleisesti (4), kun taas geometriaa, derivointia ja vektoreita ei niinkään (vastaukset 2). Huomattavaa on, että todennäköisyys poikkeaa eniten osa-alueiden keskinäisessä vertailussa, kun taas derivointiin suhtautuminen on kutakuinkin samanlaisia kuin muihinkin osa-alueisiin. Kyseisen opiskelija ei siis ole osallistunut kyselyyn vastatessa todennäköisyyden eikä derivoinnin lukiokursseille.

Opiskelijan (numerolla 13) vastauksista vajaassa puolessa on huomattavia eroja eri aihealueiden välillä (taulukko 3). Vähän yli puolet vastauksista on keskenään yhdenmukaisia. Kyseinen opiskelija pitää derivointia (5) selvästi vaikeana, kun taas muita aiheita keskivaikeina tai helppoina (vastauksissa 2 tai 3). Matematiikkaa opiskelija pitää tärkeänä (5), vaikka todennäköisyyden ja derivoinnin tärkeys matematiikan osana on keskiluokkaa (vastaus 3).

	Matematiikka	Geometria	Todennäköisyys	Derivointi	Vektorit
1. … on vaikeaa.	2	2	2	5	3
2. Opettajan rooli on … oppimisessa suuri.	5	5	5	5	5
3. … on kiinnostavaa.	3	4	4	E	4
4. Tavoitteeni … tehtävissä on korkealla.	3	2	3	E	3
5. Olen taitava …	3	4	3	E	3
6. … keskeistä on laskutekniikka.	4	4	3	3	4
7. … keskeistä on hahmottamiskyky.	4	4	5	3	4
8. … keskeistä on looginen päättely.	4	4	5	3	4
9. Pidän...	3	4	4	E	4
10. … on tärkeää/ tärkeä osa matematiikkaa.	5	4	3	3	4
11. … kuuluu opettaa monipuolisesti.	3	4	3	5	4
12. ...voi oppia monella eri tavalla.	5	5	5	5	5
13. Voin käyttää … arkielämässä.	5	2	5	2	3
14. Voin käyttää … jatko-opinnoissani tai työssäni.	5	5	5	5	5

Taulukko 3. Opiskelijan (nro 13) vastaukset kaikista osa-alueista.

Derivoinnissa (3) hän ei pidä hahmottamiskykyä ja loogista päättelyä niin keskeisenä kuin todennäköisyydessä (5). Derivointia kuuluisi puolestaan hänen mukaansa opettaa monipuolisesti (5), mutta matematiikkaa ja todennäköisyyttä ei yhtä lailla monipuolisesti (3). Matematiikkaa ja todennäköisyyttä sen osa-alueena näyttää hänen mielestään olevan mahdollista käyttää arkielämässä (vastaukset 5), kun taas osa-alueista geometria, derivointi ja vektorit eivät ole niinkään käyttökelpoisia (vastaukset 2 tai 3).

Geometrian ja vektoreiden väitteiden vastaukset ovat samankaltaisia keskenään tällä opiskelijalla, eivätkä ne poikenneet yleisesti ottaen muidenkaan aihealueiden vastauksista merkittävästi. Sen sijaan huomattavaa on, että opiskelijalla nousi esiin derivointia ja todennäköisyyttä kohtaan useita niin affektiivisia kuin kognitiivisiakin uskomuksia, jotka poikkesivat muista aihealueista. Näyttäisi siis siltä, että opiskelijalla 13 on derivoinnista ja todennäköisyydestä melko voimakkaita ennakkouskomuksia.

Opiskelija 17 on osallistunut neljästä aihealueesta ainoastaan vektoreita käsittelevälle lukiokurssille. Hän on vastannut matematiikkaa ja vektoreita koskevien väitteiden lisäksi monipuolisesti geometrian ja todennäköisyyden väitteisiin. Derivointiin liittyviin opiskelija on vastannut ainoastaan ”en osaa sanoa”. Muutamat hänen vastauksistaan koskien lukiosta tuntemattomia osa-alueita sisältävät eroavaisuuksia aiheiden kesken. Affektiiviset tekijät näyttävät vaihtelevan opiskelijan uskomuksissa ja ennakkouskomuksissa. Opiskelija ei pidä geometriaa yhtä kiinnostavana (2) kuin vektoreita (4). Todennäköisyyttä (4) taas opiskelija pitää tärkeämpänä osana matematiikkaa kuin vektoreita (2). Matematiikan opettamiseen ja luonteeseen liittyvät kognitiivistaustaiset uskomukset puolestaan ovat melko yhdenmukaisia. Matematiikkaa ja geometriaa kuuluu opettaa opiskelijan mielestä ainakin jokseenkin monipuolisesti (vastaukset 4). Samoin niitä voi oppia ainakin jokseenkin monella eri tavalla (vastaukset 4). Toisin on vektoreiden laita, joissa molempiin edellisiin väitteisiin vastaus on 2. Todennäköisyyttä ja vektoreita opiskelija ei pidä yhtä käytettävinä arkielämässä, jatko-opinnoissaan tai työssään (vastaukset 2) kuin geometriaa (4). Myös matematiikkaa (5) voi hänen mielestään käyttää arkielämässä. Opiskelija siis pitää näiltä osin geometriaa yleisesti matematiikan kaltaisena, kun taas vektoreita ja todennäköisyyttä geometriasta ja yleisesti matematiikasta poikkeavana.

Opiskelija 27 ei ole osallistunut lukiokurssille aiheesta derivointi. Hän ei kerro, onko osallistunut vektorikurssille, mutta vastausten perusteella ei ole, koska suurin osa niistä on vaihtoehtoja ”en osaa sanoa”. Merkittävää on, että hän kuitenkin uskoo, ettei voi käyttää derivointia eikä vektoreita arkielämässä, jatko-opinnoissaan tai työssään (vastaukset 1). Sen sijaan todennäköisyyttä hän uskoo voivansa käyttää arkielämässä (5), muttei jatko-opinnoissaan tai työssään (1). Jatko-opinnoissaan tai työssään hän uskoo voivansa käyttää geometriaa ja matematiikkaa yleisesti (vastaukset 4).

Eräs opiskelija (numerolla 3) kertoo, ettei ole osallistunut mihinkään tutkitun neljän aiheen kurssille pitkässä tai lyhyessä matematiikassa. Tämä tosin ei ole mahdollista, koska kysely toteutettiin vain kursseilla, jotka käsittelevät jotain aiheista geometria, todennäköisyys, derivointi tai vektorit. Opiskelijalla 3 on matematiikkaan liittyen samanlaisia uskomuksia riippumatta aiheesta, koska hän oli vastauksissaan samaa tai lähes samaa mieltä eri osa-alueiden kesken. Kuitenkaan vastauksista ei voida päätellä, ovatko uskomukset ennakkouskomuksia vai uskomuksia, jotka ovat syntyneet lukiokursseilla.

Tarkasteltaessa kaikkia vastaajia, joilla voidaan tulkita olevan ennakkouskomuksia, nähdään, että kaksi aihealuetta nousee muita selkeämmin esiin. Usealla opiskelijalla on ennakkouskomuksia todennäköisyydestä ja geometriasta, vaikkeivät he olisi käyneet lukiossa näihin aiheisiin liittyviä kursseja. Vektoreista ja derivoinnista sen sijaan on huomattavasti vähemmän ennakkouskomuksia eli usea vastaaja valitsi näiden aiheiden kohdalla vaihtoehdon ”en osaa sanoa”, mikäli eivät olleet osallistuneet aiheiden lukiokursseille. Tämä tulos on merkittävä, muttei välttämättä yllättävä, koska jo yläkoulussa käsitellään aiheita geometria ja todennäköisyys, muttei vektoreita ja derivointia.

Vastaajista 14 henkilöä vastasi vähintään yhden osa-alueen kaikkiin väitteisiin ”en osaa sanoa” tai jätti kokonaan vastaamatta. Näistä opiskelijoista 11 ei ole osallistunut kyseistä osa-aluetta käsittelevälle lukiokurssille. Näillä opiskelijoilla, jotka ovat vastanneet ”en osaa sanoa” kaikkiin väitteisiin, voidaan katsoa, ettei heillä ole ennakkouskomuksia kyseisistä aiheista. Loput kolme opiskelijaa ei kertonut, ovatko osallistuneet kyseiselle lukiokurssille vai eivät.

5.2 Uskomukset osa-alueesta kuvastamassa yleistä matematiikkakuvaa?

Tiettyyn matematiikan osa-alueeseen kohdistuvia yksittäisen opiskelijan uskomuksia voidaan verrata muihin osa-alueisiin tai yleiseen matematiikkakuvaan. Näin saadaan käsitys siitä, onko osa-alueiden välillä eroavaisuuksia.

5.2.1 Muita aiheita positiivisempi kuva tietystä osa-alueesta

Tästä luvusta eteenpäin käsitellään opiskelijoiden uskomuksia eli keskitytään niihin aiheisiin, jotka ovat opiskelijalle jo lukiokursseilta tuttuja. Usealla opiskelijalla nousee esiin jokin tietty osa-alue geometria, todennäköisyys, derivointi tai vektorit, johon liittyvät affektiiviset uskomukset ovat muita positiivisempia.

Erään opiskelijan (numero 16) uskomukset geometriasta vaihtelevat melkoisesti verrattuna yleiseen näkemykseen matematiikkaa koskien (taulukko 4).

	Matematiikka	Geometria	Vektorit
1. … on vaikeaa.	3	1	3
2. Opettajan rooli on … oppimisessa suuri.	5	3	5
3. … on kiinnostavaa.	1	5	3
4. Tavoitteeni … tehtävissä on korkealla.	3	4	2
5. Olen taitava …	3	5	3
7. … keskeistä on hahmottamiskyky.	E	5	2
8. … keskeistä on looginen päättely.	3	5	4
9. Pidän...	3	5	2
13. Voin käyttää … arkielämässä.	5	5	2

Taulukko 4. Opiskelijan (nro 16) poikkeavat vastaukset aiheista matematiikka, geometria ja vektorit.

Geometria (1) on opiskelijan mielestä helppoa, kun taas vektorit ja matematiikka yleisesti ovat hieman vaikeampia (vastaukset 3). Geometria on myös kyseisen opiskelijan mielestä kiinnostavaa (5) toisin kuin matematiikka yleisesti ottaen

(1). Vektoreiden (3) kiinnostavuus on näiden kahden väliltä. Opiskelija pitää itseään taitavana geometriassa (5), mutta tätä vähemmän taitavana vektoreissa ja matematiikassa (vastaukset 3). Positiivista kuvaa geometriasta osoittaa myös se, että opiskelija kertoo pitävänsä geometriasta (5), mutta ei yhtä paljon vektoreista (2) ja matematiikasta yleisesti (3). Geometrian tehtävissä (4) opiskelijalla on lisäksi tavoitteet korkeammalla kuin vektoritehtävissä (2). Opiskelijan vastauksissa selvästi korreloi tietyt tekijät, joita ovat kiinnostavuus, itsensä taitavana pitäminen, aiheesta pitäminen sekä tavoitteet. Nämä tekijät ovat osa kuvaa itsestä matematiikan oppijana ja käyttäjänä (Kaasila, Laine & Pehkonen, 2004; Kuvio 1).

Muidenkin opiskelijoiden kohdalla on havaittavissa, että uskomukset, jotka kuuluvat kuvaan itsestä matematiikan oppijana ja käyttäjänä, vaikuttavat toisiinsa (vrt. Kaasila, Laine & Pehkonen, 2004; Pietilä, 2002). Vaikka useimmilla opiskelijoilla matematiikan luonteeseen liittyvät väitteet eivät näytä olevan yhteydessä affektiivisten väitteiden vastauksiin, joidenkin kohdalla matematiikan luonteeseen liittyvät tekijät näyttävät kuitenkin korreloivan keskenään. Opiskelija 16 pitää geometriassa (5) keskeisempänä hahmottamiskykyä verrattuna vektoreihin (2). Lisäksi looginen päättely on hänen mielestään geometriassa (5) keskeisempää kuin matematiikassa yleisesti ottaen (3). Opiskelija uskoo, että voi käyttää matematiikkaa (5) arkielämässä kuten myös geometriaa (5) sen osa-alueena. Vektoreita (2) puolestaan hän ei usko juurikaan voivansa käyttää arkielämässä. Tämä opiskelija on eräs harvoista, jolla voidaan päätellä olevan eroavaisuuksia opettajan roolissa aihealueiden kesken. Geometriassa (2) opettajalla ei ole kyseisen opiskelijan mukaan yhtä suuri merkitys oppimisessa kuin vektoreissa ja matematiikassa (vastaukset 5).

Edellisen lisäksi myös opiskelija 21 piti opettajan roolia eri lailla merkittävänä eri osa-alueissa. Tämä opiskelija pitää opettajan roolia geometrian (5) oppimisessa suurempana kuin matematiikan yleisesti (2), todennäköisyyden (3) ja derivoinnin (3) oppimisessa. Vektoreiden kohdalla hän ei osaa sanoa (ks. lisää luvusta 5.3.1.). Hän pitää geometriaa (5) kiinnostavampana kuin matematiikkaa yleisesti (2) ja muita osa-alueita (3). Tällä opiskelijalla on geometriasta positiivisempi kuva kuin muista osa-alueista, mutta todennäköisyyteen hän suhtautuu lähes yhtä positiivisesti useiden väitteiden vastausten perusteella. Geometrian tehtävissä opiskelijan tavoitteet ovat korkeammalla (5) kuin matematiikan, derivoinnin ja vektoreiden tehtävissä (vastaukset 3). Toisaalta todennäköisyyden tehtävissä (4) tavoitteet ovat myös melko korkealla. Opiskelija pitää itseään taitavampana geometriassa ja todennäköisyydessä (4) kuin matematiikassa yleisesti ottaen (2). Muutenkin opiskelija pitää geometriasta ja todennäköisyydestä (4) enemmän kuin matematiikasta yleensä (2). Positiivinen suhtautuminen näyttää tällä opiskelijalla heijastuvan hieman myös luonnetta koskeviin väitteisiin. Hän nimittäin uskoo, että looginen päättely on keskeisempää geometriassa (5) ja todennäköisyydessä (5) kuin derivoinnissa ja vektoreissa (vastaukset 3). Lisäksi opiskelija ajattelee melko varmasti voivansa käyttää geometriaa ja vektoreita jatko-opinnoissaan tai työssään (4), mutta matematiikkaa yleisesti ei (2).

Opiskelija 18, joka on osallistunut geometrian ja vektoreiden kursseille lukiossa, vastaa muutamiin väitteisiin toisistaan poikkeavasti (taulukko 5).

	Matematiikka	Geometria	Vektorit
3. … on kiinnostavaa.	4	4	2
7. … keskeistä on hahmottamiskyky.	3	4	5
9. Pidän…	3	3	1
10. … on tärkeää/ tärkeä osa matematiikkaa.	4	4	2
12. … voi oppia monella eri tavalla.	5	4	3
14. Voin käyttää … jatko-opinnoissani tai työssäni.	5	2	3

Taulukko 5. Opiskelijan (nro 18) poikkeavia vastauksia aiheista matematiikka, geometria ja vektorit.

Geometria (4) ja matematiikka kokonaisuudessaan (4) ovat kyseisen opiskelijan mielestä kiinnostavampia kuin vektorit (2). Opiskelija ei pidä vektoreista (1), kun taas geometriasta ja matematiikasta yleisesti jokseenkin vektoreita enemmän (vastaukset 3). Geometriaa (4) opiskelija pitää kohtalaisen tärkeänä matematiikan osa-alueena toisin kuin vektoreita (2) ei niinkään. Matematiikkaa yleisesti (4) hän pitää melko tärkeänä. Havaittavissa on, että tällä opiskelijalla on geometriasta ja matematiikasta yleisesti ottaen selvästi positiivisempi kuva kuin vektoreista.

Positiivinen kuva jostain aiheesta ei näytä kuitenkaan vaikuttavan siihen, millaisena henkilö näkee aihealueen luonteen. Tämän opiskelijan (numero 18) mielestään vektoreissa (5) keskeistä on hahmottamiskyky, mutta matematiikassa (3) ei yhtä lailla. Matematiikkaa (5) voi oppia monella eri tavalla, kun taas vektoreita vain jokseenkin (2). Opiskelija kokee voivansa käyttää matematiikkaa (5) jatko-opinnoissaan tai työssään, mutta geometriaa (2) ja vektoreita (3) ei juurikaan. Tämän edellisen väitteen vastausten nojalla näyttää siltä, että opiskelija ei miellä matematiikkaa kaikilla osa-alueilla geometriaa tai vektoreita vastaavaksi, vaikka affektiivisessa mielessä hänellä onkin melko selvät uskomukset niin geometriasta, vektoreista kuin matematiikasta.

Opiskelija 24 ei ole osallistunut vektoreita käsittelevälle kurssille ja ei osaa sanoa sen aiheen väitteisiin, mutta vastaa muita aiheita koskeviin väitteisiin monipuolisesti. Hän pitää matematiikkaa ja todennäköisyyttä vaikeana (5), mutta geometriaa (3) ja derivointia (2) vähemmän vaikeana. Hänen mielestään geometria ja derivointi (vastaukset 4) sekä matematiikka yleisesti (3) ovat kiinnostavampia kuin todennäköisyys (1). Opiskelija pitääkin geometriasta ja derivoinnista (4) enemmän kuin todennäköisyydestä (2). Derivoinnin tehtävissä (5) opiskelijan tavoitteet ovat korkeammalla kuin todennäköisyyden (3). Opiskelija pitää itseään ainakin melko taitavana derivoinnissa (4), keskitaitavana geometriassa (3) ja vähemmän taitavana matematiikassa (2) sekä todennäköisyydessä (1). Hahmottamiskyky on hänen uskomustensa mukaan keskeisempää geometriassa ja todennäköisyydessä (5) kuin derivoinnissa (3). Myös looginen päättely on keskeisempää geometriassa (5) kuin derivoinnissa (3). Sen sijaan opiskelija uskoo, että derivointia (3) ei voi oppia yhtä monella tavalla kuin geometriaa (5) tai todennäköisyyttä (5). Tällä opiskelijalla on vastauksista päätellen geometriasta ja derivoinnista positiivisempi kuva kuin todennäköisyydestä. Toisaalta useissa vastauksissa matematiikka jää keskivaiheille verrattaessa todennäköisyyttä ja geometriaa tai derivointia. Opiskelijan matematiikkakuva kokonaisuudessaan on siis keskimääräinen kuva tutkituista aihealueista.

Opiskelijat pitävät eri aiheita kiinnostavana ja suhtautuvat positiivisesti tiettyyn osa-alueeseen yksilöllisesti. Geometria on muutaman opiskelijan mielestä ylitse muiden tutkittujen osa-alueiden, mutta myös todennäköisyydestä pidetään. Opiskelija 27 pitää todennäköisyyttä (4) kiinnostavampana kuin matematiikkaa kokonaisuudessaan (1) ja geometriaa (2). Opiskelija asettaa todennäköisyyden tehtävissä tavoitteet jokseenkin korkeammalle (3) kuin matematiikan tehtävissä yleisesti (1). Laskutekniikan ja hahmottamiskyvyn keskeisyys matematiikassa, geometriassa ja todennäköisyydessä vaihtelevat opiskelijan vastauksissa.

Joillain opiskelijoista vastaukset vaihtelevat hyvinkin paljon eri aihealueiden kesken. Näistä osalla kuitenkin vastauksissa nousee selvästi esiin tietty osa-alue, josta opiskelija erityisesti on kiinnostunut ja johon hän suhtautuu muutenkin positiivisesti. Opiskelija 11 on eräs näistä vastaajista, ja hänen positiiviset uskomukset kohdistuvat todennäköisyyteen (taulukko 6).

	Matema-tiikka	Geomet-ria	Todennä-köisyys	Derivointi	Vektorit
1. … on vaikeaa.	5	5	1	3	5
2. Opettajan rooli on … oppimisessa suuri.	4	4	4	5	5
3. … on kiinnostavaa.	2	2	5	3	1
4. Tavoitteeni … tehtävissä on korkealla.	1	1	3	2	1
5. Olen taitava …	1	2	3	3	1
6. … keskeistä on laskutekniikka.	3	1	5	3	2
7. … keskeistä on hahmottamiskyky.	3	5	5	4	5
8. … keskeistä on looginen päättely.		5	5	4	5
9. Pidän...	2	2	4	3	3
10. … on tärkeää/ tärkeä osa matematiikkaa.	3	3	4	E	E
11. … kuuluu opettaa monipuolisesti.	4	5	4	1	E
12. ...voi oppia monella eri tavalla.	4	3	2	4	E
13. Voin käyttää … arkielämässä.	3	5	5	1	1
14. Voin käyttää … jatko-opinnoissani tai työssäni.	4	5	5	1	3

Taulukko 6. Opiskelijan (nro 11) vastaukset kaikkiin väitteisiin.

Vaikka matematiikka, geometria ja vektorit ovat tämän opiskelijan mielestä vaikeita (vastaukset 5), niin todennäköisyys (1) ei ole lainkaan. Opiskelija pitääkin todennäköisyyttä kiinnostavana (4), mutta matematiikkaa, geometriaa ja vektoreita ei lähes ollenkaan (vastaukset 1 tai 2). Todennäköisyyden tehtävissä (3) hänen tavoitteensakin ovat hieman korkeammalla kuin muissa osa-aluissa ja matematiikassa yleisesti ottaen (vastaukset 1 tai 2). Opiskelija pitää itseään keskitaitavana todennäköisyydessä (3) ja derivoinnissa (3), kun taas geometriassa (2), vektoreissa (1) ja matematiikassa yleisesti (1) tätä vähemmän taitavana. Opiskelija pitää todennäköisyydestä (4) hieman muita osa-alueita enemmän (vastaukset 2 tai 3).

Laskutekniikkaa tämä opiskelija (numero 11) pitää hyvinkin keskeisenä todennäköisyydessä (5), kun taas geometriassa (1) ja vektoreissa (2) ei lähes ollenkaan. Hahmottamiskyky on hänen mukaansa keskeistä geometriassa, todennäköisyydessä ja vektoreissa (vastaukset 5), mutta matematiikassa (3) vain keskitasoa. Derivointia (1) ei tule hänen uskomustensa mukaan opettaa monipuolisesti, mutta geometriaa (5), matematiikkaa yleisesti (4) sekä todennäköisyyttä (4) ainakin melko monipuolisesti. Todennäköisyyttä (2) ei voi tämän opiskelijan näkemyksen mukaan oppia hyvin monella eri tavalla, mutta matematiikkaa kokonaisuudessaan ja derivointia ainakin kohtalaisen monella eri tavalla (vastaukset 4). Opiskelija uskoo voivansa käyttää geometriaa ja todennäköisyyttä arkielämässä ja jatko-opinnoissaan tai työssään (vastaukset 5), mutta derivointia ja vektoreita ei juurikaan (vastaukset 1 tai 3). Näistä opettamiseen ja matematiikan luonteeseen liittyvistä väitteiden vastauksista voidaan jälleen päätellä, etteivät ne näytä liittyvän kyseisen opiskelijan affektiivisiin uskomuksiin eri aihealueista.

Positiivinen kuva tietystä osa-alueesta tulee monien opiskelijoiden kohdalla esille muun muassa siinä, että he pitävät tätä osa-aluetta muita helpompana. Jälleen eräällä opiskelijalla (numero 7) tällainen osa-alue on todennäköisyys. Hän pitää todennäköisyyttä (5) kiinnostavampana kuin geometriaa, derivointia ja vektoreita (vastaukset 3). Yleisesti matematiikkaa (5) kohtaan hänellä riittää myös kiinnostusta. Opiskelija pitää kohtalaisen korkealla tavoitteita kaikissa osa-alueissa (vastaukset 3 tai 4), mutta todennäköisyydessä (5) kuitenkin korkeimmalla. Todennäköisyys poikkeaa muista osa-alueista myös siinä, että opiskelija pitää siitä (5) enemmän kuin derivoinnista ja vektoreista (2). Matematiikasta yleisesti (4) hän pitää melko paljon.

Kognitiivistaustaisista matematiikan ja sen osa-alueisiin liittyvistä väitteistä ilmenee, että niiden vastaukset eivät pohjaudu tämän opiskelijan (numero 7) positiiviseen kuvaan todennäköisyydestä tai vastaavasti vähemmän positiiviseen kuvaan muista aiheista. Vastaaja pitää vektoreita (5) tärkeämpänä matematiikan osa-alueena kuin geometriaa (3). Opiskelija pitää laskutekniikkaa todennäköisyydessä (3) vähemmän keskeisenä kuin muissa osa-alueissa (5). Derivointia puolestaan ei voi hänen uskomustensa mukaan oppia monella eri tavalla (1), kun taas matematiikkaa (4), geometriaa (3) ja todennäköisyyttä (4) voi kohtalaisen monella tavalla. Opiskelija kokee voivansa käyttää matematiikkaa ja todennäköisyyttä jatko-opinnoissaan tai työssään (vastaukset 5), mutta geometriaa (2) ja derivointia (3) ei niinkään.

Erään opiskelijan (numero 6) uskomukset todennäköisyyttä ja derivointia kohtaan näyttävät olevan positiivisempia kuin uskomukset geometriaa kohtaan. Hän pitää vektoreita (5) ja geometriaa (4) ainakin jokseenkin vaikeana. Sen sijaan derivointi (2) ei ole hänen mukaansa kovinkaan vaikeaa. Opiskelija pitääkin derivointia (4) sekä todennäköisyyttä (4) kiinnostavampana kuin geometriaa (2) ja vektoreita (1). Samankaltaisuutta on havaittavissa tavoitteiden suhteen: derivoinnin ja todennäköisyyden (vastaukset 4) tehtävissä tavoitteet ovat korkeammalla kuin geometrian tehtävissä (2). Vektoritehtävissä (3) tavoitteet ovat keskiluokkaa ja matematiikan tehtävissä yleisesti (2) melko matalalla. Positiivinen kuva ilmenee derivointia ja todennäköisyyttä kohtaan myös siinä, että tämä opiskelija pitää itseään näistä osa-alueista taitavimpana derivoinnissa (4), sitten todennäköisyydessä (3), jonka jälkeen geometriassa (kuten myös matematiikassa vastauksella 2) ja vähiten taitavana vektoreissa (1). Opiskelija pitää vektoreista (1) selvästi muita vähemmän ja ajattelee vektoreiden (1) olevan vähemmän tärkeä matematiikan osa-alue kuin muut (vastaukset muissa osa-alueissa 3 tai 4). Tosin derivoinnin tärkeyteen hän ei ole ottanut kantaa.

Loogista päättelyä kyseinen opiskelija (numero 6) pitää melko keskeisenä matematiikassa, todennäköisyydessä ja derivoinnissa (vastaukset 4), mutta vektoreissa (1) ei ollenkaan keskeisenä. Geometriaa (2) kuuluu hänen mielestään opettaa vähemmän monipuolisesti kuin todennäköisyyttä ja matematiikkaa yleisesti ottaen (vastaukset 4). Opiskelija uskoo voivansa käyttää matematiikkaa (5) ja todennäköisyyttä (4) arkielämässä, geometriaakin ehkä jonkin verran (3), mutta vektoreita ei (1). Opiskelijan negatiiviset uskomukset vektoreista koskien opiskelijan kuvaa itsestä matematiikan oppijana ja käyttäjänä näyttävät näin ollen heijastuvan myös vektoreiden luonnetta koskeviin uskomuksiin.

Muutamalla opiskelijalla uskomuksista esille nousee erityisesti tietystä aiheesta pitäminen tai ei-pitäminen. Eräs opiskelija (numero 25) on täysin samaa mieltä väitteestä ”Pidän todennäköisyydestä”, mutta keskivaiheilla (3) vastatessaan väitteeseen ”Pidän derivoinnista”. Opiskelija 27 pitää ainakin melko paljon todennäköisyydestä (4), mutta geometriasta ei (1). Tosin hän ei juuri pidä yleisesti matematiikasta (2).

5.2.2 Luonne-eroja aihealueiden välisessä vertailussa

Aiempien tutkimusten (mm. Pehkonen, 1993 & 1998; Presmeg, 2002) tuloksena on saatu, että matematiikan luonnetta pidetään erilaisena riippuen vastaajasta. Merkittävää on, että uskomuksia matematiikan osa-alueiden luonteesta ei tähänastisissa tutkimuksissa näytä olevan tutkittu. Kiinnostavaa on, mitä opiskelijat ajattelevat tietystä osa-alueesta (ks. 5.3.2.) sekä liittyvätkö opiskelijoiden näkemykset jostain osa-alueesta yleiseen matematiikkakuvaan.

Useat opiskelijat ovat keskimäärin yhtä mieltä väitteistä eri aihealueiden kesken. Lähes jokaisen vastauksissa on kuitenkin jokin väite, jossa on havaittavissa eroavaisuuksia eri aihealueiden välillä. Joidenkin opiskelijoiden kohdalla juuri tällainen yksi väite tai useampi paljasti heidän uskomuksissaan eroja tietyn osa-alueen ja matematiikan välillä sekä aihealueen sisällä olevien uskomusten keskinäisen yhteyden. Kuten jo aiemmin tuloksissa todettiin, ainakin joillain opiskelijoilla aiheen luonteeseen liittyvät uskomukset näyttävät olevan keskenään yhteydessä (esimerkkinä opiskelija 16). Opiskelija 4 on vastaaja, jonka uskomuksista ilmenee selvästi luonne-erot matematiikan ja geometrian kesken (taulukko 7).

	Matematiikka	Geometria
8. … keskeistä on looginen päättely.	3	1
10. … on tärkeää/ tärkeä osa matematiikkaa.	4	2
12. … voi oppia monella eri tavalla.	3	1
13. Voin käyttää … arkielämässä.	3	1
14. Voin käyttää … jatko-opinnoissani tai työssäni.	3	1

Taulukko 7. Opiskelijan (nro 4) poikkeavat vastaukset aiheista matematiikka ja geometria.

Opiskelija pitää matematiikkaa (4) yleisesti tärkeänä, kun taas geometriaa sen osana ei niinkään (2). Hänen vastauksensa osoittavat myös, että hänen mielestään matematiikkaa (3) voi oppia yleisesti useammalla tavalla kuin geometriaa (1). Opiskelija uskoo voivansa käyttää matematiikkaa (3) toisinaan arkielämässä, jatko-opinnoissaan tai työssään, mutta geometriaa (1) ei lainkaan. Hän pitää lisäksi matematiikassa (3) loogista päättelyä hieman keskeisempänä kuin geometriassa (1).

Matematiikan ja geometrian väitteiden välillä on erään toisenkin opiskelijan (numero 5) uskomuksissa havaittavissa eroavaisuuksia. Hän ei pidä matematiikassa (2) laskutekniikkaa kovinkaan keskeisenä, kun taas geometriassa (4) se on hänen mielestään melko keskeistä. Yleisesti ottaen matematiikasta (3) kyseinen opiskelija pitää hieman vähemmän kuin geometriasta (5).

Uskomuseroja niin luonteen suhteen kuin affektiivisia tekijöitä ajatellen on geometrian lisäksi vektoreissa. Opiskelija 14 kertoo olevansa täysin samaa mieltä (5) väitteestä ”Pidän matematiikasta” ja ”Matematiikkaa kuuluu opettaa monipuolisesti”, kun taas vastaaviin väitteisiin vektoreiden kohdalla hän ei ole eri mieltä eikä samaa mieltä (3).

5.2.3 Ei merkittäviä huomioita eri osa-alueiden ja yleisen matematiikan välisissä uskomuksissa

Joidenkin opiskelijoiden vastauksissa on usean väitteen kohdalla poikkeama aihealueiden kesken. Kuitenkaan mikään aihealue ei nouse esiin positiivisena tai negatiivisena. Tämän tosin selittää se, että opiskelijan matematiikkakuvassa voi olla keskenään ristiriitaisia uskomuksia, eivätkä ne kumoa välttämättä toisiaan (Kupari, 1999).

Geometriaa ja todennäköisyyttä käsitteleville lukiokursseille osallistunut opiskelija 19 vastasi derivoinnin ja vektoreiden väitteisiin ”en osaa sanoa”. Lisäksi hän ei ole ottanut kantaa useisiin geometrian, todennäköisyyden ja matematiikan väitteisiinkään. Kuitenkin joistain väitteiden vastauksista on havaittavissa eroja osa-alueiden kesken. Opiskelija pitää geometriaa vaikeampana (4) kuin todennäköisyyttä (2). Hänen mukaansa geometriaa (2) ei voi oppia yhtä lailla monella eri tavalla kuin matematiikkaa yleisesti ottaen (4). Hän uskoo voivansa käyttää matematiikkaa arkielämässä (4) ja jatko-opinnoissaan tai työssään (5), muttei todennäköisyyttä niinkään (vastaukset 2). Lisäksi hän ei usko voivansa käyttää geometriaa jatko-opinnoissaan tai työssään (2). Tällä opiskelijalla oli vain pari affektiivisiin väitteisiin liittyvää eroa aihealueiden välillä ja muutama matematiikan luonnetta koskeva. Mikään osa-alue ei noussut näissäkään poikkeamissa selkeäsi esille, joten opiskelijan uskomuksista ei voida tehdä selkeitä päätelmiä.

Opiskelija 20 on osallistunut vain geometriaa ja todennäköisyyttä käsitteleville lukiokursseille tutkitusta neljästä kurssista. Hän on valinnut useata geometriaa, todennäköisyyttä tai matematiikkaa koskevaan väitteeseen kohdan ”en osaa sanoa”. Muutaman huomion vastauksista voi silti tehdä. Hän pitää matematiikkaa (4) kokonaisuudessaan kiinnostavampana kuin todennäköisyyttä sen osa-alueena (2). Hän pitää todennäköisyydestä (2) vähemmän kuin geometriasta (4), mutta matematiikasta (3) pitäminen jää näiden välille. Kyseinen opiskelija ei usko voivansa käyttää geometriaa (1) jatko-opinnoissaan tai työssään toisin kuin matematiikkaa jonkin verran (3). Vektoreita (2) hän uskoo voivansa käyttää geometriaa enemmän, mutta matematiikkaa vähemmän. Tälläkin opiskelijalla oli toisistaan eroavia vastauksissa aihealueiden välillä niin vähän, ettei varmoja päätelmiä uskomuksista voida tehdä.

Näyttää siltä, että tutkimusjoukossa on myös opiskelijoita, joiden uskomukset osa-alueiden välillä vaihtelevat hyvinkin merkittävästi, vaikka he olisivat osallistuneet kaikille neljälle kurssille ja olisivat vastanneet kaikkiin väitteisiin. Kuitenkin, jos poikkeamat osoittavat keskenään ristiriitaisia uskomuksia, heidän vastauksistaan on lähes mahdotonta tehdä selkeää analysointia. Esimerkiksi opiskelija 1 on tällainen vastaaja ja hänen vastauksissaan lähes jokaisen väitteen kohdalla on yli yhden arvon poikkeama eri osa-alueiden välillä (taulukko 8).

	Matematiikka	Geometria	Todennäköisyys	Derivointi	Vektorit
1. … on vaikeaa.	5	2	4	2	3
2. Opettajan rooli on … oppimisessa suuri.	5	4	5	4	5
3. … on kiinnostavaa.	3	3	2	1	1
4. Tavoitteeni … tehtävissä on korkealla.	2	3	2	2	3
5. Olen taitava …	1	3	1	3	2
6. … keskeistä on laskutekniikka.	4	2	3	5	4
7. … keskeistä on hahmottamiskyky.	5	5	3	1	5
8. … keskeistä on looginen päättely.	3	4	5	1	2
9. Pidän...	3	3	2	3	5
10. … on tärkeää/ tärkeä osa matematiikkaa.	5	5	5	5	5
11. … kuuluu opettaa monipuolisesti.	E	3	1	2	1
12. … voi oppia monella eri tavalla.	4	3	1	1	2
13. Voin käyttää … arkielämässä.	5	2	4	1	1
14. Voin käyttää … jatko-opinnoissani tai työssäni.	3	1	1	1	1

Taulukko 8. Opiskelijan (nro 1) vastaukset kaikkiin osa-alueisiin.

Opiskelija pitää matematiikkaa (5) vaikeana, mutta geometriaa ja derivointia melko helppona (vastaukset 2). Todennäköisyyttä (4) hän pitää ainakin jokseenkin vaikeana. Opiskelijan uskomukset vaihtelevat eri aihealueiden kiinnostavuudesta. Geometria (3) ja matematiikka yleisesti ottaen (3) ovat hieman kiinnostavampia kuin derivointi ja vektorit (vastaukset 1). Opiskelija ei pidä itseään taitavana matematiikassa (1) ja todennäköisyydessä (1), mutta geometriassa ja vektoreissa hän uskoo olevansa keskinkertaisen taitava (vastaukset 3). Hän pitää vektoreista (5), kun taas muista aiheista ja matematiikasta tätä vähemmän (2 tai 3). Matematiikkaa voi opiskelijan mielestä oppia ainakin melko monella eri tavalla (4), sen sijaan todennäköisyyttä ja derivointia ei (1). Geometria ja vektorit jäävät näiden väliin. Arkielämässä, jatko-opinnoissa tai työssä opiskelija ei näe käyttömahdollisuuksia geometrialla, derivoinnilla ja vektoreilla (vastaukset 1 tai 2). Sen sijaan todennäköisyyttä voi hänen mukaansa käyttää ainakin osittain arkielämässä (4) kuten myös matematiikkaa (5).

Tämä opiskelija (numerolla 1) pitää myös eri osa-alueita luonteeltaan hyvin erilaisina. Esimerkiksi derivoinnissa hänen mielestään laskutekniikka on hyvinkin keskeistä (5), mutta geometriassa ei niinkään (2). Puolestaan hahmottamiskyky ja looginen päättely ei ole hänen uskomustensa mukaan derivoinnissa lainkaan keskeistä (1), kun taas vaikkapa hahmottamiskyky on keskeistä geometriassa (5) ja todennäköisyydessä looginen päättely (5).

Opiskelija 10 on myös osallistunut kaikille neljälle kurssille, mutta selvää yhdenmukaisuutta hänen vastauksissaan ei ole. Hän ei pidä todennäköisyyttä vaikeana (1), mutta ajattelee matematiikan, derivoinnin ja vektoreiden olevan keskivaikeaa (3) sekä geometrian melko vaikeaa (4). Hän pitää todennäköisyyttä kiinnostavampana (4) kuin derivointia (2), muiden osa-alueiden yltäessä keskivaiheille näiden kiinnostavuudessa. Hän pitää geometriasta (4) ja vektoreista (4) lisäksi enemmän kuin derivoinnista (2). Opiskelija ei usko voivansa käyttää derivointia ja vektoreita arkielämässä (vastaukset 1), mutta muita osa-alueita sekä matematiikkaa ehkä joskus (vastaukset 3).

Jotkin opiskelijat vastasivat useisiin väitteisiin ”en osaa sanoa”, vaikka olivat osallistuneet kyseistä aihetta käsittelevälle lukiokurssille. Esimerkiksi opiskelija 23 on osallistunut kaikille tutkittuja aiheita käsitteleville kursseille, mutta 11 väitteen kohdalla hän vastasi ”en osaa sanoa” ainakin yhden osa-alueen kohdalla. Vaikka vastauksia asteikolla 1–5 oli verrattain vähän, joitain poikkeamia vastausten väliltä oli havaittavissa. Opiskelija pitää derivointia (1) helpompana kuin vektoreita (3). Matematiikkaa kuuluu hänen uskoakseen opettaa monipuolisesti, mutta todennäköisyyttä ei yhtä lailla (3). Samoin matematiikkaa voi oppia monella eri tavalla (5), kun taas geometriaa, todennäköisyyttä ja derivointia ei niinkään (3). Opiskelija uskoo voivansa käyttää matematiikkaa arkielämässä (5), mutta derivointia ja vektoreita ei yhtä paljon (3). Matematiikkaa hän voi mielestään käyttää myös jatko-opinnoissaan tai työssään (5), mutta vektoreita ei siinäkään yhteydessä samoin (3). Tämä opiskelija on myös eräs harvoista, jonka mielipide opettajan roolista vaihteli aihealueiden välillä. Tästä lisää luvussa 5.3.1.

Näillä opiskelijoilla, joilla uskomus matematiikasta vaihtelevasti muistuttaa eri osa-alueen vastausta riippuen väitteestä, voi olla jotain yhteistä. Voisiko olla mahdollista, että he mieltävät matematiikan tilanteeseen suotuisalla tavalla? Esimerkiksi jollain opiskelijalla voi olla vahva uskomus siitä, että geometriaa tulee opettaa monipuolisesti, mutta muiden osa-alueiden kohdalla vahvaa uskomusta tähän liittyen ei ole. Tällöin hän saattaa mieltää geometrian kuvastamaan matematiikkaa, ja näin ollen matematiikkaa tulee opettaa monipuolisesti.

5.2.4 Matematiikkakuvaa vastaavia uskomuksia matematiikan osa-alueista

Tähänastisissa tutkimuksissa on tutkittu matematiikkaa kokonaisuutena, josta voidaan päätellä, että tutkijat ovat saattaneet ajatella matematiikkakuvan olevan osa-alueiden kesken yhtäläinen. Tämän tutkimuksen perusteella näin ei kuitenkaan aina ole. Toisaalta vastaajajoukossa on myös opiskelijoita, joilla osa-alueeseen liittyvät uskomukset näyttävät noudattavan heidän yleistä matematiikkakuvaansa.

Eräällä opiskelijalla (numero 15) ei ole lähes ollenkaan sanottavaa todennäköisyydestä ja derivoinnista, joita käsitteleville lukiokursseille hän ei ole osallistunut. Muutama huomio hänen vastauksistaan lukiosta tuttujen aihealueiden kohdalla voidaan kuitenkin tehdä. Hän pitää geometriasta (4) enemmän kuin vektoreista (2), ja pitäminen matematiikasta (3) on neutraalia. Tämä opiskelija pitää myös matematiikkaa, kuten myös geometriaa sen osa-alueena tärkeänä (4), mutta vektoreita ei juurikaan (2). Hän pitää tavoitteitaan geometrian tehtävissä (4) jonkin verran korkeammalla kuin matematiikan tehtävissä yleensä (2). Vektoritehtävissä (3) tavoitteet ovat keskiluokkaa. Matematiikan luonteeseen liittyen hänen uskoakseen vektoreissa looginen päättely ei ole kovinkaan keskeistä (3), mutta matematiikassa yleisesti on (5). Näyttää siltä, että opiskelijalla on hieman positiivisempi kuva geometriasta kuin vektoreista. Toisaalta matematiikkakuva näyttää olevan jotain geometrian ja vektoreiden väliltä. Koska poikkeavia vastauksia aihealueiden välillä on melko vähän, voidaan päätellä, että opiskelijan uskomukset eri osa-alueista vastaavat kutakuinkin yleistä matematiikkakuvaa.

Kolme opiskelijaa vastasi vain matematiikkaa ja geometriaa koskeviin väitteisiin. Kahdella heistä (opiskelijat 28 ja 30) ei ollut huomioitavia eroja vastaustensa välillä. Kolmas näistä opiskelijoista (opiskelija 29) vastasi hieman poikkeuksellisesti muutamaan väitteeseen. Hänen mielestään matematiikka on vaikeaa (5), mutta geometria ei ole (1). Matematiikka on myös tärkeää (5), mutta geometria sen osa-alueena ei ole (2). Matematiikkaa kuuluu opettaa monipuolisesti ja sitä voi oppia monella eri tavalla (5), kun taas geometriaa ei voi yhtä lailla (vastaukset 3). Näillä kaikilla opiskelijoilla voidaan tulkita olevan yleistä matematiikkakuvaa vastaavat uskomukset matematiikan osa-alueista, joita käsittelevillä lukiokursseilla he ovat olleet. Tämä päätelmä voidaan tehdä, koska heillä on vain muutama tai ei yhtään poikkeavaa vastausta eri aihealueiden kesken.

Opiskelija 2 on osallistunut ainoastaan geometriaa käsittelevälle lukiokurssille ja vastasikin asteikolla 1–5 vain tätä sekä matematiikkaa yleisesti koskeviin väitteisiin. Väitteiden kesken ei kuitenkaan ole havaittavissa poikkeamia geometrian ja matematiikan välillä, joten opiskelijalla voidaan katsoa olevan yhtenäinen kuva yleisesti matematiikasta ja geometriasta sen osa-alueena.

Neljästä tutkitusta aihealueesta opiskelija 31 on osallistunut vain geometriaa käsittelevälle lukiokurssille. Hän vastasikin ”en osaa sanoa” kaikkiin väitteisiin, jotka koskivat todennäköisyyttä, derivointia ja vektoreita. Geometriaa (4) hän pitää kiinnostavampana kuin matematiikkaa yleisesti ottaen (2). Hän kuitenkin uskoo, että voi käyttää matematiikkaa (3) ennemmin arkielämässä kuin geometriaa (1) matematiikan osa-alueena. Opiskelijan muut vastaukset geometrian ja matematiikan välillä ovat samankaltaisia, joten hänellä myös voidaan katsoa olevan geometriasta yleisen matematiikkakuvan kaltaiset uskomukset.

Vastaajien joukossa on myös opiskelijoita, jotka ovat osallistuneet kaikille neljälle kurssille, mutta joiden vastauksissa ei ole havaittavissa merkittäviä poikkeamia. Tämä toisaalta tarkoittaa sitä, että näiden opiskelijoiden uskomukset matematiikan osa-alueista ovat vastaavanlaisia kuin heidän uskomukset yleisessä matematiikkakuvassa. Yksi vastaajista, opiskelija 8, vastasi kaikkiin väitteisiin joko 3 tai 4 eli hän suhtautuu matematiikkaan ja sen eri osa-alueisiin keskenään hyvin samankaltaisesti. Opiskelijan 9 vastauksissa oli vain pari huomioitavaa seikkaa. Nämä liittyvät matematiikan luonteeseen. Hän pitää geometriassa (5) hahmottamiskykyä keskeisempänä kuin todennäköisyydessä, derivoinnissa ja matematiikassa (3). Myös looginen päättely on hänen mielestään geometriassa keskeistä (5), kun taas todennäköisyydessä ja vektoreissa (3) ei niinkään.

Myös opiskelija 22 on osallistunut geometriaa, todennäköisyyttä, derivointia ja vektoreita käsitteleville lukiokursseille ja on lähes yksimielinen vastauksissaan eri osa-alueiden ja matematiikan kesken. Muutamassa väitteessä huomattava ero oli kuitenkin nähtävissä. Hän pitää matematiikkaa yleisesti ja vektoreita (vastaukset 4) vaikeampina kuin derivointia (2). Geometria ja todennäköisyys jäävät näiden välille. Derivointia (3) opiskelija pitää keskikiinnostavana, kun taas vektoreita (1) ei lainkaan. Arkielämässä kyseinen opiskelija uskoo voivansa käyttää todennäköisyyttä (5), muttei juurikaan muita osa-alueita tai matematiikkaa yleensä (vastaukset 2 tai 1). Myös opiskelijalla 26 on vain yhdessä väitteessä huomioitava ero aihealueiden välillä. Hänen mielestään vektorit (4) ovat melko vaikeita, kun taas geometria (2) on jokseenkin helppoa. Opiskelijan muut vastaukset ovat keskenään lähes samanlaisia osa-alueiden välillä, mutta toisaalta hän onkin vastannut useaan väitteeseen ”en osaa sanoa”. Yhteisesti opiskelijoista 22 ja 26 voidaan sanoa, että heidän uskomuksensa eri matematiikan neljästä osa-alueesta noudattavat pääpiirteissään heidän yleistä matematiikkakuvaansa.

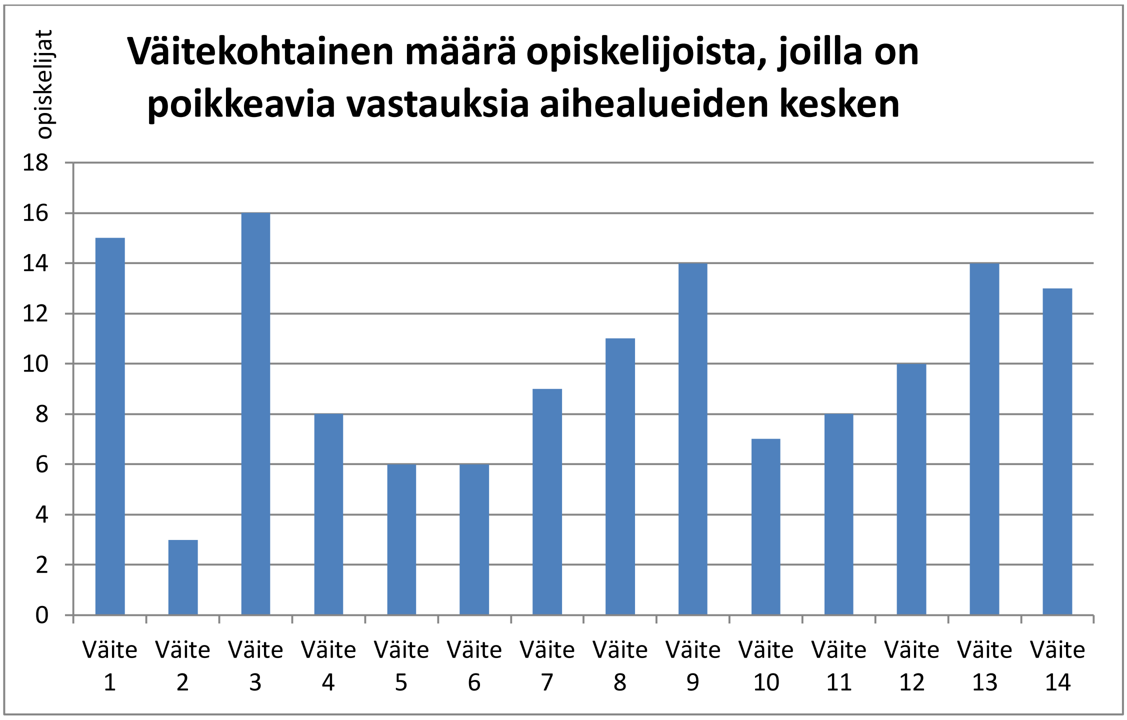
5.3 Havaintoja eri opiskelijoiden kesken

Ennakkouskomuksia yleisesti tarkasteltaessa voi huomata, että geometriasta ja todennäköisyydestä opiskelijoilla on melko selvät mielikuvat jo ennen niihin liittyviä lukiokursseja. On tietenkin mahdollista, että nämä uskomukset tulevat muuttumaan lukiokursseja käytäessä. Derivoinnin ja vektoreiden suhteen tilanne on erilainen. Lähes poikkeuksetta opiskelijat ovat vastanneet ”en osaa sanoa” tai jättäneet kokonaan vastaamatta näiden osa-alueiden väitteisiin, mikäli eivät olleet osallistuneet kyseisiä aiheita käsitteleville kursseille. Voidaan siis tulkita, että suurimmalla osalla vastaajajoukon opiskelijoista ei ole ennakkouskomuksia sellaisista aiheista, joista eivät ole siihen mennessä opiskelujen aikana kuulleet.

Mielestäni on erikoista, että kiinnostavuus ja itsensä taitavana pitäminen ei aina näytä kulkevan käsi kädessä opiskelijoiden uskomuksissa. Esimerkiksi opiskelija 7 piti kaikkia osa-alueita joko kiinnostavina (5) tai kiinnostavuuden suhteen neutraaleina (3), vaikka ei kokenut olevansa matematiikassa tai näissä neljässä osa-alueessa taitava (kaikki vastaukset 1 tai 2). Tämä toisaalta on vain yksittäinen opiskelija ja hänen matematiikkakuvassaan voi olla keskenään ristiriitaisia uskomuksia (ks. Kupari, 1999).

5.3.1 Merkittävimmät väitteet, joissa poikkeavuuksia tai stabiiliutta

Jokaisen väitteen kohdalla voidaan tarkastella opiskelijoiden vastauksia eri aihealueiden kesken. Jos poikkeama minkä tahansa viiden aihealueen välillä on jossain vastauksessa yli yhden, laskettiin tämä opiskelija opiskelijoiden määrään, joilla on poikkeava vastaus tietystä väitteestä. Näistä määristä on tehty kuvio 2, joka havainnollistaa tilannetta. Väitteiden välisiä eroja tarkasteltaessa tulee huomioida, että osa on jättänyt vastaamatta kokonaan tai vastannut ”en osaa sanoa” johonkin väitteeseen. Tällaiset vastaukset on jätetty huomioimatta poikkeuksia laskettaessa.



Kuvio 2. Opiskelijoiden määrä, joilla poikkeavia vastauksia tietyssä väitteessä.

Selvästi väitteen 2 (Opettajan rooli … oppimisessa on suuri.) kohdalla opiskelijamäärä on pienin. Vain kolme opiskelijaa on vastannut tähän väitteeseen aihealueiden välillä keskenään poikkeavasti. Erään opiskelijan (numero 16) mukaan geometriassa (2) opettajalla ei ole yhtä suuri rooli oppimisessa kuin vektoreissa ja matematiikassa (vastaukset 5). Opiskelija 23 puolestaan uskoo, että opettajan rooli matematiikassa yleisesti (5) on merkittävä, mutta derivoinnissa ja vektoreissa (vastaukset 3) ei kuitenkaan yhtä suuri. Kolmas opiskelija (numero 21) pitää opettajan roolia geometrian (5) oppimisessa suurempana kuin yleisesti matematiikan (2), todennäköisyyden (3) ja derivoinnin (3) oppimisessa. Vektoreiden kohdalla hän ei osaa sanoa. Opettaminen ja näin ollen opettajan uskomukset ovatkin yksi merkittävistä osa-tekijöistä, joita tutkijat (mm. Carrillo, 1998; Kupari, 1999; Wilson & Cooney, 2002) painottavat oppimiseen vaikuttajina.

Seuraavaksi vähiten toisistaan eroavia vastauksia on väitteissä 5 ja 6. Väite 5 on ”Olen taitava …” ja väite 6 ”… keskeistä on laskutekniikka” (taulukko 9). Siis suurin osa vastaajista (25/31) pitää itseään lähes yhtä taitavana jokaisella aihealueella: matematiikassa yleisesti ottaen, geometriassa, todennäköisyydessä, derivoinnissa ja vektoreissa. Toisekseen yhtä suuri joukko opiskelijoita (25/31) pitää laskutekniikkaa yhtä keskeisenä kussakin tutkitussa aihealueessa. Suurin osa opiskelijoista (24/31) pitää eri matematiikan osa-alueita ainakin lähes yhtä tärkeänä osana matematiikkaa sekä matematiikkaa verraten yhtä tärkeänä yleisesti ottaen.

Keskivaiheille poikkeusten määrässä jäävät väitteet, jotka koskevat tavoitteita, monipuolista opettamista, monella tavalla oppimista sekä hahmottamiskyvyn ja loogisen päättelyn keskeisyyttä. Näissä väitteissä kahdeksasta yhteentoista opiskelijaa (8/31–11/31) vastasi aihealueiden kesken poikkeavasti.

Väite	Opiskelijoita, joilla poikkeavia vastauksia aihealueiden kesken
2. Opettajan rooli on … oppimisessa suuri.	3
5. Olen taitava …	6
6. … keskeistä on laskutekniikka.	6
10. … on tärkeää/ tärkeä osa matematiikkaa.	7
4. Tavoitteeni … tehtävissä on korkealla.	8
11. … kuuluu opettaa monipuolisesti.	8
7. … keskeistä on hahmottamiskyky.	9
12. ...voi oppia monella eri tavalla.	10
8. … keskeistä on looginen päättely.	11
14. Voin käyttää … jatko-opinnoissani tai työssäni.	13
13. Voin käyttää … arkielämässä.	14
9. Pidän...	14
1. … on vaikeaa.	15
3. … on kiinnostavaa.	16

Taulukko 9. Väitteet järjestyksessä alkaen väitteestä, johon on vastannut poikkeavasti eri aihealueiden kesken vähiten opiskelijoita.

Kuusitoista (16) opiskelijaa on vastannut aihealueiden välillä poikkeavasti väitteeseen 3, mikä on suurin määrä kaikkien väitteiden keskinäisessä vertailussa. Tämä tarkoittaa, että noin puolet vastaajista ajattelee eri aihealueiden kiinnostavuuden välillä olevan eroa. Seuraavaksi eniten opiskelijoita poikkeavien vastausten kanssa vastasi väitteisiin 1 (15 opiskelijaa), 9 (14 opiskelijaa), 13 (14 opiskelijaa) ja 14 (13 opiskelijaa). Näistä väite 1 koskee aiheesta pitämistä, väite 9 aiheen vaikeutta ja ehkä hieman yllättäen väitteet 13 ja 14 aiheen käytettävyyttä arkielämässä, jatko-opinnoissa tai työssä.

Huomattavaa on, että jokaisen väitteen kohdalla on joka tapauksessa opiskelijoita, jotka vastaavat väitteeseen erilailla eri aihealueiden kohdalla. Toisaalta juuri mihinkään väitteeseen ei vastannut yli puolet vastaajista poikkeavasti, joten lähes kaikkien väitteiden kohdalla suurin osa vastaajakunnasta on kuitenkin ainakin lähes samaa mieltä väitteestä eri osa-alueiden kesken. Ehkä merkittävimmät havainnot tehdään kuitenkin juuri yksittäisen opiskelijan uskomuksia tarkasteltaessa.

5.3.2 Opiskelijoiden omia ajatuksia eri osa-alueiden luonteesta

Aiemmat tutkimukset (Pehkonen, 1998; Presmeg, 2002) näyttävät, että opiskelijoiden käsityksissä matematiikan luonteesta voi olla suuriakin eroja. Opiskelijoiden vastatessa avoimeen kysymykseen ”Mitä matematiikka on?” muistan joidenkin opiskelijoiden huokaisseen ääneen: ”Ihan mahdoton kysymys” tai ”Katopa tuota, ei tuohon voi vastata”. Suurin osa opiskelijoista ajattelee matematiikan olevan laskemista. Kahdeksan opiskelijaa kertoo matematiikan olevan pelkästään laskemista tai laskuja. Yhdeksän vastaajaa puolestaan uskoo matematiikan olevan esimerkiksi päättelyä, kaavoja tai loogista ajattelua. Muutamalta opiskelijalta saadaan lisäksi melko moniulotteinen selitys matematiikalle. Eräs opiskelija (numero 3) vastaa: ” Matematiikka on ainoa universaali kieli”. Toinen (opiskelija 5) puolestaan ”Numeroita ja lukuja maailmasta; apu hahmottaa ja ymmärtää asioita, kyky selvittää asioita ja mahdollisuus tarkastaa paikkaansa pitävyyksiä”. Ja eräs opiskelija (numero 30) ottaa tieteellisen näkökulman asiaan ja vastaa: ” Matematiikka on deduktiiviseen päättelyyn perustuva formaatti eli käsitteellinen tiede.”

Näinkin pienestä otoksesta on hyvin nähtävissä se, että opiskelijoiden uskomukset matematiikan luonteesta noudattavat Thompsonin mallia (ks. Pehkonen, 1998). Opiskelijat, jotka vastaavat matematiikan olevan laskemista, ovat Tasolla 0, päättelyn, kaavat ja loogisen päättelyn mainitsevat ovat Tasolla 1 ja muut kolme henkilöä Tasolla 2. Kysymykseen jätti vastaamatta 11 henkilöä.

Neljän eri matematiikan osa-alueen kohdalla usea opiskelija on jättänyt vastaamatta avoimeen kysymykseen. Geometrian kohdalla vastaukset ovat melko samankaltaisia opiskelijoiden kesken (taulukko 10). Vastaajista 27 on osallistunut lukiossa geometrian kurssille, joten heillä tulisi olla jo melko selkeä käsitys geometrian luonteesta.

opiskelija	vastaus
1	"kolmio", "ympyrä", "neliö", "kahdeksankulmio" (kuvina)
3	geometria on moniulotteisten kuvioitten juttujen laskemista
5	muotojen ymmärtämistä, avaruudellista hahmottamista ja "rakennus"tekniikkaa.
6	Piirretään palikoita ja muita kuvioita avaruuteen.
8	Geometristen kuvioiden ratkomista, pinta aloja ja tilavuuksia
16	kolmioita, suorakulmia, ympyröitä
18	Tilavuuslaskuja, kuvioita, koordinaatistoja & kaavoja
21	Kaiken näköistä
22	kuvioiden laskemista
24	Esim. pinta-alojen ja tilavuuksien laskemista
25	Pinta-alojen laskemista, tilavuuksien laskemista, kolmion kulmien määrittämistä
27	Kuvioita, kulmia, suoria
29	Esim. pinta-alojen laskemista. Kolmioita, ympyröitä yms.
31	en osaa selittää

Taulukko 10. Mitä geometria on?

Huomioitavaa vastauksissa on se, että osa (5 opiskelijaa) mainitsee vain kaksiulotteisia kuvioita ja osa (7) kolmiulotteisia kappaleita tai avaruudellisen hahmottamisen. Kaksi opiskelijaa antaa ympäripyöreän vastauksen.

Opiskelijat näyttävät ymmärtävän osa-alueen ainakin joltain osin, jos he vastaavat tietyllä esimerkillä kysymykseen. Todennäköisyyden kohdalla neljä opiskelijaa antaa esimerkin todennäköisyyden laskemisesta (taulukko 11). Viisi vastaajista on sitä mieltä, että todennäköisyys on tapahtumien tai vaihtoehtojen tapahtumisen tutkimista. Kaksi henkilöä vastaa todennäköisyyden olevan laskemista (”laskemista todennäköisyyksiä” sekä ”laskemista ja arvailua”). Näistä on havaittavissa Thompsonin malliin (ks. Pehkonen, 1998) viittaavia eritasoisia ajatusrakenteita. Korkeammalla tasolla voidaan ainakin ajatella olevan niiden opiskelijoiden, jotka käsittävät todennäköisyyden laajana kokonaisuutena tapahtumien toteutumisen laskemista verrattuna opiskelijoihin, jotka mieltävät todennäköisyyden tietynlaiseksi tapahtumaksi. Vastaajista 16 kertoo osallistuneensa lukiossa todennäköisyyttä käsittelevälle kurssille.

opiskelija	vastaus
1	lottovoitto
3	mikä on todennäköisyys, noppaa heittäessäsi luvuksi tulee 4
6	Sillä tutkitaan tiettyjen tapahtumien todennäköisyyttä tapahtua tai olla tapahtumatta.
8	todennäköisyyttä että jokin asia tapahtuu
11	Tietää kuinka suuri mahdollisuus on voittaa arpajaisissa
14	mahdollisuus johonkin asiaan
22	laskemista todennäköisyyksiä
23	laskemista ja arvailua
24	Sitä, että lasketaan esim. millä todennäköisyydellä saa vaikka lottovoiton.
25	Se on jollekin tapahtumalle laskettava todennäköisyys
27	Vaihtoehtojen laskemista.

Taulukko 11. Mitä todennäköisyys on?

Derivointiin liittyvään avoimeen kysymykseen vastanneita opiskelijoita on kaikista vähiten. Näistä muutamasta vastauksesta päätellen vastaajajoukolla ei ole kovinkaan laaja ymmärrys derivoinnista (taulukko 12). Tätä voidaan pitää melko erikoisena, koska 13 vastaajaa kuitenkin kertoo osallistuneensa lukiossa derivointia käsittelevälle kurssille. Lisäksi tutkimuskohteen tuntiessani tiedän opettaneeni lähes puolelle vastaajajoukon opiskelijoista derivointia erotusosamääräkäsitteen ja funktion tangentin avulla. Edes muutosnopeudesta ei kukaan opiskelijoista mainitse vastauksissaan.

opiskelija	vastaus
1	en tiedä
5	?
6	Muunnetaan lukuja ja kirjaimia helpommiksi.
11	siinä on ainakin se D aina edessä
22	derivoimista
25	Koordinaatiston nollakohtien laskemista.

Taulukko 12. Mitä derivointi on?

Neljännen osa-alueen, vektoreiden, avoimeen kysymykseen on vastannut useampi opiskelija kuin derivoinnin vastaavaan. Tutkimukseen osallistuneista opiskelijoista 18 on osallistunut vektoreita käsittelevälle lukiokurssille. Vektoreiden luonnetta kuvaavissa uskomuksissa on hahmotettavissa jokseenkin erilaisia tasoja (taulukko 13).

opiskelija	vastaus
1	"pisteet A ja B ja niitä yhdistävä jana sekä apukolmio"
5	?
6	Turhia nuolia, joissa ei ole mitään järkeä.
11	Ei aavistusta
15	Viivoja paikasta A paikkaan B
16	suoria, paikkoja A, B, C…, viivoja paikasta toiseen
17	Janoja
18	Samanpituisia ja samansuuntaisia suuntajanoja
22	vektoreita
24	En tiedä
25	Ne määrittävät suuntia

Taulukko 13. Mitä vektorit ovat?

Joidenkin opiskelijoiden vastauksista heijastuu heidän asenteensa vektoreita kohtaan. Muutama opiskelija on yhdistänyt oikein vektoreihin paikan käsitteen. Ehkä vielä korkeamman tason vastauksessa on kerrottu vektorin liittyvän suuntaan. Opiskelija 18 mainitsee suunnan, mutta sen sijaan mieltää vektorit samanpituisina ja samansuuntaisina. Tällaisia uskomukset voivat mahdollisesti olla opiskelijan miniteorioita (Huhtala & Laine, 2004). Niissä voi olla jotain oikeaa, mutta myös väärää.

5.4 Tärkeimmät tutkimustulokset

Kunkin opiskelijan uskomusten tutkiminen sinänsä on ollut jo merkittävää ja valaisevaa. Yhteisesti tutkimustuloksista voidaan nostaa muutama etenkin jatkon kannalta merkittävä tutkimustulos esiin. Ensiksikin näyttää siltä, että positiivinen kuva tietystä matematiikan osa-alueesta pitää sisällään samoja tekijöitä kuin aiemmat tutkimukset (mm. Kaasila, Laine & Pehkonen, 2004; Pietilä, 2002) matematiikasta. Affektiiviset tekijät (mm. motiivit, tavoitteita, suhtautuminen matematiikkaan eli asenteet, pitäminen, kiinnostus) on osoitettu tutkimuksissa korreloivan keskenään ja tässäkin tutkimuksessa ne näyttävät korreloivan yhden osa-alueen sisällä. Opiskelijan kuva itsestä matematiikan oppijana ja käyttäjänä ei ole yksiselitteinen, koska tämä kuva voi olla hyvinkin erilainen matematiikan eri osa-alueilla. Tätä affektiivisten tekijöiden voimakasta eroa eri aihealueiden kesken kuvaa myös se, että väitekohtaisesti opiskelijoiden määrää laskettaessa, missä on useimmalla opiskelijalla poikkeavuuksia vastauksissa aihealueiden kesken, kolmella kärkisijalla ovat affektiiviset väitteet 3, 1 ja 9 (Taulukko 9). Opiskelija karkeasti jaoteltuna joko pitää tai ei pidä tietystä osa-alueesta. Jos opiskelija pitää tiettyä osa-aluetta helppona, silloin hän myös pitää sitä kiinnostava sekä sanoo pitävänsä aiheesta. Lisäksi näillä henkilöillä on kyseisessä aiheessa tavoitteet melko korkealla ja he pitävät itseään siinä taitavana. Edelliset tekijät korreloivat ainakin jokseenkin keskenään myös negatiivisessa mielessä.

Toinen huomioitava tulos on, että opiskelijoiden uskomukset tietyn aiheen luonteesta eivät näytä olevan yhteydessä siihen, onko hänellä positiivinen, negatiivinen vai neutraali kuva kyseisestä aiheesta. Näitä osa-alueita tutkitaankin yleisesti erillään toisistaan omina uskomuskokonaisuuksina, kuten olen määritellyt tutkimuksen alussa. Aiheen luonne kuuluu osioon ”kuva matematiikasta, matematiikan opettamisesta ja oppimisesta”. Tätä uskomusten kokonaisuutta havainnollistaa paremmin opiskelijoiden välinen vertailu kuin yksittäisen opiskelijan uskomusten analysointi.

Kolmas merkittävä ja kiinnostava tutkimustulos kohdistuu uskomuksiin osa-alueiden luonteesta. Ensinnäkin on hienoa, että tutkimuksessa saatiin tuloksia siitä, mitä opiskelijat ajattelevat tietyn osa-alueen (geometria, todennäköisyys, derivointi ja vektorit) olevan. Toisekseen Thompsonin malli (Pehkonen, 1998) selittää matematiikan luonnetta koskevat uskomustasot opiskelijoilla, mutta mallin suuntaisia havaintoja saadaan myös tutkittujen osa-alueiden kohdalla. Yleisesti matematiikkaa koskevat tulokset noudattavat pienehkölläkin vastaajajoukolla Thompsonin mallia ja osa-alueista etenkin todennäköisyydessä on havaittavissa samansuuntaisia tasoja. Geometrian ja vektoreiden luonteesta opiskelijoilla vaikuttaa olevan ainakin kahden eri tason ymmärtämistä, mutta derivoinnissa ymmärryksen taso jää kaikilla kyseiseen kysymykseen vastanneista eittämättä Tasolle 0 (mikäli nollataso on matalin ymmärtämisen taso kolmen tason skaalassa).

Lisähuomiona tuloksista voidaan nostaa esille eräs väite, joka on saanut lähes pelkkiä puoltoääniä. Paria poikkeusta lukuunottamatta opiskelijat pitävät opettajan roolia yhtäläisenä kaikkien osa+-alueiden oppimisessa. Lisäksi useimmat heistä pitävät opettajan roolia joko neutraalina tai tärkeänä, mutteivät täysin hyödyttömänä. Useiden tutkimusten (Huhtala & Laine, 2004; Kupari, 1999) mukaan opettajan merkitys oppimiselle onkin erityinen. Näyttää siis siltä, että vaikka muissa uskomuksissa opiskelijoilla olisi eroja eri aihealueiden kesken, niin opettajan rooli on ja pysyy merkittävänä myös opiskelijan näkökulmasta.

6 Luotettavuus

Ennen tutkimusta minulla oli intuitiivinen käsitys, että opiskelijoilla on ennakkoasenteita eri matematiikan osa-alueita kohtaan. Pyrin kuitenkin jättämään tämän ajatuksen sivuun, joten se ei heikennä luotettavuutta.

Opiskelijoilla oli yhtäläiset mahdollisuudet vastata kyselyyn, eli kyselyn täyttämiseen ei asetettu aikarajaa. Lisäksi annoin jokaisessa vastaustilanteessa samanlaiset ohjeet opiskelijoille. Pyysin jokaista opiskelijaa vastaamaan kunkin neljän aihealueen väitteisiin kysymyksiin huolimatta siitä, olivatko he käyneet vielä kyseistä aihetta käsittelevää kurssia vai eivät. Tällöin voisin saada tietoa mahdollisista ennakkoasenteista. Ohjeistin, että väitteisiin voi vastata niin, miten ajattelisi asian olevan, mikäli ei ole vielä osallistunut kurssille. Vaihtoehtoisesti, jos asiasta ei ole käsitystä, niin voi vastata ”en osaa sanoa”. Pyrin kuitenkin siis jättämään vastaamistavan opiskelijan omaksi päätökseksi. Hieman harmillista on, että muutama opiskelija kuitenkin jätti useisiin kohtiin kokonaan vastaamatta. Koska näitä tyhjiä ei ole huomioitu tulosten vertailussa, näiden opiskelijoiden jotkin uskomukset saattoivat jäädä huomiotta.

Pyrin muotoilemaan kyselyn väitteet niin, että ne vastaavat täsmällisesti sitä, mitä haluan väitteellä saada selville. Osa väitteistä selvittää kognitiivista puolta uskomuksista ja osa affektiivista. Näin ollen kognitiivisissa väitteissä ei ole muotoilua ”minun mielestäni…” vaan väite on suoraan esimerkiksi ”Matematiikassa keskeistä on hahmottaminen.” Täten uskomuksista aiheen luonnetta, opettamista ja oppimista kohtaan on pyritty rajaamaan pois affektiiviset tekijät.

Neljän osa-alueen käsitteiden muotoilua mietin eri näkökannoilta kyselyä suunnitellessani. Muotoilussa olisi jälkeenpäin ajateltuna ollut kenties parempi käyttää vektoreiden kohdalla käsitettä ”vektorilaskenta” ja todennäköisyyden kohdalla ”todennäköisyyslaskenta”. Tämä siksi, että esimerkiksi väite ”Vektoreissa keskeistä on laskutekniikka” voi lukijan mielestä tarkoittaa joko koko kurssia tai pelkästään vektorin muodostamista. Itse väitehän ei ole matemaattisessa mielessä kovinkaan järkevä. Samoin on joidenkin todennäköisyyttä koskevien väitteiden kanssa. Esimerkiksi väite ”Todennäköisyydessä keskeistä on hahmottamiskyky.” ei matemaatikon korvissa kuulosta välttämättä relevantilta. Toisaalta halusin välttää liian pitkiä väitteitä, jottei ajatus huku lauseeseen. Lisäksi, nykyään lukiokursseissa puhutaan todennäköisyydestä eikä todennäköisyyslaskennasta ja samoin vektoreista eikä vektorilaskennasta (LOPS, 2003). Näihin syihin nojautuen valitsin käyttämäni käsitteet tutkimukseeni.

Tutkimustuloksia analysoidessani huomasin, että olin kirjoittanut kyselylomakkeeseen ”jokseenkin samaa mieltä” kohdan 3 yläpuolelle (ks. liite 1). Tässä on ollut mahdollisuus tulkita, että kohdista 1 ja 2 liittyvät kantaan eri mieltä ja kohdat 3-5 kantaan samaa mieltä, vaikka kohdan 3 on tarkoitus olla neutraali. Toisaalta kyselyn alussa olevassa tekstissä ohjeistetaan: Vastaa seuraaviin väitteisiin, asteikolla 1 (täysin eri mieltä)…5 (täysin samaa mieltä) tai en osaa sanoa, parhaiten mielipidettäsi kuvaava vastaus. Tässä tulee ilmi, että skaalaus on tasavälinen ja kohta 3 on ääripäiden 1 ja 5 puolivälissä. Tulkitsin tutkimustulokset siten oletuksen mukaan, että ”keskivaiheilla” oleva vastaus on ”täysin eri mieltä” ja ”täysin samaa mieltä” vastausten puolivälissä. Useimmat opiskelijat ovat luultavasti jossain vaiheessa joutuneet vastaamaan kyselyyn ja tällöin vaihtoehdot ovat voineet tulla tutuiksi. Lisäksi keräsin aineistoni ollessani itse niillä tunneilla läsnä, joten opiskelijoilla oli mahdollisuus kysyä tutkimuksen käytännön toteuttamisesta eikä kukaan kysynyt asiasta. Mainitsin vielä, että on mahdollisuus kysyä, jos jotain tulee mieleen.

Niiden opiskelijoiden kohdalla, jotka olivat vastanneet kaikkiin tai lähes kaikkiin väitteisiin tietyn osa-alueen kohdalla ”en osaa sanoa”, on mahdollista, että he eivät ole jaksaneet edes lukea jokaista väitettä erikseen. Jos aihe on ollut vastatessa vieras, hän on saattanut suoralta kädeltä vastata ”en osaa sanoa” sen tarkemmin miettimättä asiaa. Tämän välttääkseni kannustin kuitenkin opiskelijoita vastaamaan kaikkiin kysymyksiin asteikolla 1–5, mikäli heillä oli väitteestä mielipide. En puhunut opiskelijoille uskomuksista, etteivät he alkaisi vastatessa pohtia omia käsityksiään ja asenteitaan aiheita kohtaan ja siten muuttamaan intuitiivisia vastauksiaan.

Vastausjoukon voidaan katsoa edustavan kyseistä aikuislukiota hyvin, koska vastaajissa on sekä pelkkiä lukio-opiskelijoita että kaksoistutkinto-opiskelijoita (ks. liite 2, kohta ”muussa oppilaitoksessa”). Lisäksi vastaajissa on nuoriso- että aikuisikäisiä opiskelijoita ja pitkän ja lyhyen matematiikan lukijoita.

7 Matematiikan osa-alueita koskevien uskomusten vaikutus yleisen matematiikkakuvan muotoutumiseen

Tutkimustehtävänä oli erityisesti selvittää matematiikan osa-alueisiin kohdistuvia uskomuksia. Tämän voidaan sanoa toteutuneen, koska matematiikan osa-alueisiin selvästi kohdistuu uskomuksia ja näistä on havaittavissa niin yhtäläisyyksiä kuin erojakin eri osa-alueiden välillä. Yksittäisiä opiskelijoita tarkasteltaessa esiin nousi joitain voimakkaita uskomuksia sekä ennakkouskomuksiakin. Useat opiskelijat suhtautuivat johonkin matematiikan osa-alueeseen ja pitivät sitä muita alueita positiivisempana. Pohdinkin, voisiko tulevaisuudessa tutkia erikseen esimerkiksi opiskelijan ”geometriakuvaa” sen sijasta, että tutkittaisiin yhtenäisesti opiskelijan matematiikkakuvaa. Tämä tutkimus ei vielä ottanut kantaa siihen, kuinka opiskelijoiden ”geometriakuvat” korreloivat keskenään. Suuremmassa otoksessa näin ollen olisi mielekästä tutkia jonkin yhden osa-alueen kokonaiskuvien yhtäläisyyksiä ja eroja eri opiskelijoiden kesken.

Tuloksia ei voi yleistää koko Suomen lukio-opiskelijat kattaviksi, mutta ne antavat kuitenkin viitteitä siitä, millaisia uskomuksia heidän keskellään voi olla. Pidän tutkimusjoukkoa melko heterogeenisenä, koska joukosta osa on aikuisikäisiä (19–27 v.), mutta suurin osa kuitenkin nuorisoasteen ikäisiä (16–18 v.). Lisäksi joukossa on pitkän ja lyhyen matematiikan lukijoita sekä kaksoistutkinto-opiskelijoita ja pelkkiä lukio-opiskelijoita.

7.1 Matematiikan opetuksen kannalta kiinnostavaa

Selvästi tutkimustuloksista nähdään, että opiskelijoilla on erittäin laaja-alaiset uskomukset matematiikasta sekä sen tietyistä osa-alueista. Kysyttäessä esimerkiksi ”Mitä vektorit ovat?” monelle opiskelijalle näytti olevan haastavaa vastata kysymykseen. Usea vektoreita käsittelevälle kurssillekin osallistunut jätti kokonaan vastaamatta. Vastauksista, joita opiskelijat antoivat, voidaan päätellä, ettei heillä näytä olevan selkeää kokonaiskuvaa kyseisestä aihealueesta.

Hyvän matematiikan opetuksen edistämisen kannalta olisi hyvä painottaa kurssitasolla uskomusten huomioimista opetuksessa. Kurssin alussa on toki tähänkin saakka tehty ennakkotestejä opiskelijan taidoista, mutta näiden lisäksi uskomusten kartoittaminen aiheen luonteesta ja affektiivisista tekijöistä voisi olla hyödyllistä. Eräs tapa huomioida erilaiset oppijat ovat tasoryhmät (vrt. Linnanmäki, 2004). Lähivuosien aikana ollessani töissä tai harjoittelussa jossain lukiossa tai yläkoulussa olen huomannut, että tasoryhmiä käytetään toisinaan. Toisaalta tällä on kääntöpuolensa: on mahdollista, että ”oppilaat liittoutuva keskenään, että me ei opiskella”, kuten eräs kollegani asian ilmaisi.

Jos mahdollista, opetusmetodeja kehitettäessä voitaisiin keskittyä realisoimaan opiskelijoiden kuvaa tietyistä osa-alueista ja vähentämään negatiivia affektiivisia uskomuksia matematiikan osa-alueita kohtaan. Toisekseen, koska usealla opiskelijalla tuntui olevan hieman hukassa etenkin derivoinnin luonne, olisi hyvinkin suositeltavaa panostaa lukiokursseilla aiheen ymmärtämiseen käsitteenä ja kokonaisuutena.

7.2 Matematiikan luonteen kannalta kiinnostavaa

Kaiken kaikkiaan matematiikan osa-alueisiin kohdistuvat uskomukset voidaan tutkimustulosten perusteella katsoa toisilla opiskelijoilla noudattavan heidän yleistä matematiikkakuvaansa. Kuitenkin vastaajajoukossa oli useita opiskelijoita, joilla ainakin yhden osa-alueen uskomukset poikkesivat hänen yleisestä matematiikkakuvastaan tai jonkin toisen osa-alueen uskomusten kokonaisuudesta.

Vastaajista oli osa niitä, jotka suhtautuivat matematiikkaan huomattavasti positiivisemmin kuin tutkittuihin osa-alueisiin. Toiset taas saattoivat pitää joitakin osa-alueita hyvin kiinnostavina ja kokea olevansa niissä hyvä, mutta kokonaiskuva matematiikasta oli tästä huolimatta melko negatiivinen. Näitä voisi verrata teoriaosuudessa puhuttuun matematiikkakuvaan ja sen osa-alueeseen ”käsitys itsestä oppijana”. Käsitys itsestä matematiikan oppijana voi siis olla negatiivinen, vaikka tietyn osa-alueen minäkäsitys olisikin kunnossa. Sama pätee vastakkaiseenkin suuntaan. Vaikka jonkun opiskelijan matematiikkakuva yleisesti oli hyvä, silti hän saattoi kokea olevansa heikko oppija ja kokea negatiivisia tuntemuksia jotain matematiikan osa-aluetta kohtaan. Tämä päätelmä ehkä hieman horjuttaa olemassa olevia tutkimustuloksia siitä, kuinka positiivinen matematiikkakuva vaikuttaa positiivisesti oppimiseen. Voidaanko siis lainkaan tutkia jonkin opiskelijan matematiikkakuvaa, jos hänen käsityksensä itsestä oppijana ja suhtautumisensa matematiikan eri osa-alueisiin vaihtelee toisinaan suurestikin? Nykyisissä matematiikkauskomuksia koskevissa tutkimuksissa ei tiedetä, mitä matematiikan osa-aluetta vastaaja on ajatellut puhuttaessa matematiikkakuvasta. Tämä johtaa mielestäni mittavan aihealueen pariin, jota olisi aihetta tutkia tätä tutkimusta laajemmin.

On mahdollista, että opiskelijoille ei toisen asteen koulutuksessa vielä selviä se, mikä matematiikan perusluonne on. Se, että on tietyt määritelmät, johon nojautuen pienillä askelilla päästään lopputulokseen. Esimerkiksi derivoinnissa määritelmänä on erotusosamäärän raja-arvo. Kaikki lukio-opiskelijoiden käyttämät derivointikaavat ja -säännöt perustuvat tähän määritelmään. Ne ovat ikään kuin lauseita ja apulauseita, joihin nojautuen saadaan yksinkertaistettua päätelmäketjua ja ratkaisu saadaan helpommin kuin pelkkää määritelmää käyttäen. Kuitenkin omasta kokemuksesta opettajana voin sanoa, että opiskelijoita ei tunnu juurikaan kiinnostavan, mistä kaavat ja säännöt ovat peräisin, enemmänkin he haluavat oppia käyttämään niitä. Tämä varmaankin johtuu pitkälti siitä, että opiskelijoita testataan koko lukion ajan vain ”laskurutiinista”, muttei niinkään ymmärtämisestä.

Jos palataan matematiikan historiassa taaksepäin, niin huomataan, että kouluissa on 1900-luvun alkupuolella opetettu lähinnä geometriaa ja todistuskäytäntöä. Tämä poikkeaa paljon nykyisestä. Ehkä nykyisessä opetusmallissa noudatetaan pitkälle nykyajalle tyypillistä tehokkuusajattelua. Opiskelijoiden tulisi oppia matematiikan hyvin monta osa-aluetta täysin uutena kolmen vuoden aikana. Olisikohan aika jälleen alkaa panostaa opiskelijan oman matemaattisen ymmärtämisen kehittämiseen, kuten todistamisajatteluun. Täytyy myöntää, että omina lukioaikoinani en juuri pitänyt matemaattisista todistustehtävistä. Ne olivat mielestäni selvästi vaikeampia kuin muut tehtävät. Tultuani opiskelemaan yliopistolle ymmärsin kuitenkin, että olin käsittänyt matematiikan luonteen hieman väärin siihen saakka ja nyt opintojeni loppupuolella uskon jo ymmärtäväni matematiikan perusluonteen. Jos tutkimuksen opiskelijoilla matematiikan ja sen osa-alueiden luonteen ymmärtäminen näyttää olevan haasteellista, niin melko kauan siihen on näyttänyt kuluvan aikaa myös minulta.

7.3 Haasteita korkeakoulutason opiskelijoille ja opettajille

Edellisessä luvussa pohdin sitä, että matematiikan luonne ei näytä tulevan esille lukiotasolla. En ole täysin vakuuttunut siitäkään, että se selviäisi matematiikan yliopisto-opiskelijoille vielä ensimmäisen vuoden aikana. Opiskelijan on ikään kuin rivien välistä pystyttävä lukemaan, millaista matematiikka on ja miten siihen tulee suhtautua. Itselläni ja opiskelutovereillani oli yliopiston alkuvaiheessa ainakin varsin selvää, että matematiikan opiskelu siellä tuli poikkeamaan suuresti siihenastisesta matematiikasta tai millaisena sen oli käsittänyt.

Koska opettajan omilla uskomuksilla on vaikutus opettajan tapaan opettaa (Kupari, 1999), niin ehkä olisi aihetta yliopisto-opetukseenkin miettiä opetusmetodeja, joissa huomioitaisiin opiskelijoiden uskomukset sekä yliopiston opetukseen osallistuvien henkilöiden omat uskomukset matematiikasta ja sen opettamisesta.

Opetusmetodit ovat olleet julkisessa keskustelussa jo useamman vuoden ainakin kasvatustieteiden saralla. Jokin aika sitten *Helsingin Sanomien* pääkirjoituksessa (21.1.2013) pohdittiin lukiokirjojen maksullisuutta ja vaihtoehtoisia oppimateriaaleja. Kirjoittajan mielestä kumpikaan ei ollut yksiselitteisesti oikea vaihtoehto, vaan ainoastaan yksi asia oli varmaa: kannustavan opettajan merkitys oppimisessa on suuri. Näihin mietteisiin voin yhtyä kaiken tämän pohdinnan jälkeen siitä, millaisia uskomuksia opiskelijoilla on matematiikasta ja sen osa-alueista. Vaikka uskomukset näyttävän vaihtelevan melkoisesti opiskelijoiden kesken, ehkä tärkeintä on pyrkiä suotuisaan opetusympäristöön ja minimoimaan opettajan mahdolliset negatiiviset vaikutukset opiskelijoiden matematiikan oppimiseen.

Lähteet

Carrillo, J. (1998). Exploring relationships between teachers' conceptions and problem solving modes in mathematics. Teoksessa E. Pehkonen & G. Törner (toim.), *The State-of-Art in Mathematics-Related Belief Research. Results of the MAVI activities* (s. 127–166). Department of Teacher Education. University of Helsinki.

Green, T. F. (1971). *The Activities of Teaching: International Student Edition.* Tokyo: Tosho Printing co.

Joutsenlahti, J. (2004). Matemaattinen ajattelu lukiossa. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.), *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja* oppimiseen (s. 363–380). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

Hart, K. M. (1981). *Children's Understanding of Mathematics: 11–16.* London: John Murray.

Heath, T. L. (1956). *The Thirteen Books of Euclid's Elements, vol. 1.* New York: Dover Publications, Inc.

Huhtala, S. & Laine, A. (2004). ”Matikka ei ole mun juttu” – Matematiikkavaikeuksien syntyminen ja niihin vaikuttaminen. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.), *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (s. 320–346). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

Kaasila, R., Laine, A. & Pehkonen, E. (2004). Luokanopettajiksi opiskelevien matematiikkakuva ja sen muuttuminen. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.), *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen.* (s. 397–413) Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

Kupari, P. (1999). *Laskutaitoharjoittelusta ongelmanratkaisuun. Matematiikan opettajien matematiikkauskomukset opetuksen muovaajina.* Jyväskylän yliopisto. Koulutuksen tutkimuslaitos. Tutkimuksia 7. Väitöskirja.

Lindgren, S. (1997*).* Voidaanko matematiikan opiskeluasenteita muuttaa? Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen, & P. Malinen (toim.), *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja* oppimiseen (s. 301–315). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti & Koulutuksen tutkimuslaitos.

Lindgren, S. (2004). Voidaanko matematiikka-asenteita muuttaa? Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.), *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (s. 381–396). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

Linnanmäki, K. (2004). Minäkäsitys ja matematiikan oppiminen. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.), *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (s. 241–254). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

LOPS (2003). *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003.* Helsinki: Opetushallitus. Luettu 19.7.2012. http://www.oph.fi/download/47345_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2003.pdf

Malinen, P. (1991). Opiskelijoiden kokemat vaikeudet kemian ja matematiikan opinnoissa lukiossa sekä Jyväskylän yliopistossa. Teoksessa T. Keranto, M. Huhanantti, O. Karjalainen & V. Komulainen (toim.), *Matemaattisten aineiden opetuksen ja oppimisen tutkiminen ja kehittämistyö. Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuksen päivillä Oulussa 28. – 29.9.1990 pidetyt esitelmät ja alustukset* (s. 19–22). Oulun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan opetusmonisteita ja selosteita. Oulun yliopisto: Monistus- ja Kuvakeskus.

Malmivuori, M-L. (1993). Oppilaiden matemaattisista uskomuksista. Teoksessa S. Tella (toim.), *Mikä ihmeen humaani ihminen? Ainedidaktiikan symposiumi Helsingissä 5.2.1993* (s. 160–169). Helsingin opettajakoulutuslaitos. Tutkimuksia 117. Helsinki: Yliopistopaino.

Pietilä, A. (2002). *Luokanopettajaopiskelijoiden matematiikkakuva: matematiikkakokemukset matematiikkakuvan muodostajina.* Helsingin opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 238. Helsinki: Yliopistopaino.

Pehkonen, E. (1993). Oppilaiden matematiikkakäsitysten eroista neljässä Euroopan maassa. Teoksessa S. Tella (toim.), *Mikä ihmeen humaani ihminen? Ainedidaktiikan symposiumi Helsingissä 5.2.1993* (s. 150–159). Helsingin opettajakoulutuslaitos. Tutkimuksia 117. Helsinki: Yliopistopaino.

Pehkonen, E. (1998). On the Concept ”Mathematical Belief”. Teoksessa E. Pehkonen & G. Törner (toim.), *The State-of-Art in Mathematics-Related Belief Research. Results of the MAVI activities* (s. 37–72). Department of Teacher Education. University of Helsinki.

Pehkonen, E. & Törner, G. (1995). Mathematical Beliefs System and Their Meaning for the Teaching and Learning of Mathematics. Teoksessa G. Törner (toim.), *Current State of Research on Mathematical Beliefs. Proceedings of the MAVI Workshop. October 4–5, 1995* (s. 1–14) University of Duisburg.

Presmeg, N. (2002). Beliefs about the Nature of Mathematics in the Bridging of Everyday and School Mathematical Practices. Teoksessa G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (toim.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (s. 293–312). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Schlöglmann, W. & Kepler, J. (2007). Beliefs Concerning Mathematical Held by Students and their Teachers. Teoksessa K. Hoskonen & M. S. Hannula (toim.), *Current State of Research on Mathematical Beliefs XII. Proceedings of the MAVI-7 Workshop. May 25–28, 2006* (s. 97–109). University of Helsinki. Research Report 288. Yliopistopaino.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* Orlando (FL): Academic Press.

Sovchik, R. J. (1996). *Teaching mathematics to children.* New York: Harper Collins.

Tarvainen, K. (2004). Opettaja, vaadi perusalgebran osaaminen! *Solmu, 2004, 3*, 14–18. Luettu 14.2.2013. http://solmu.math.helsinki.fi/2004/3/solmu28.pdf

Törner, G. (1998). Mathematical Beliefs and Their Impact on Teaching and Learning of Mathematics. Teoksessa E. Pehkonen & G. Törner (toim.), *The State-of-Art in Mathematics-Related Belief Research. Results of the MAVI activities* (s. 73–94). Department of Teacher Education. University of Helsinki.

Wilson, M. & Cooney, T. (2002). Mathematics Teacher Change and Development. The Role of Beliefs. Teoksessa G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (toim.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (s. 127–147) Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Yrjönsuuri, R. (1990). *Lukiolaisten matemaattisen ajattelun oppiminen.* Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 88. Helsinki: Yliopistopaino.

Liitteet

Liitteenä opiskelijoille teetetty kysely sekä tutkimusaineisto (data sisältäen taustatiedot ja vastaukset avoimiin kysymyksiin.

Liite 1. Kyselylomake lukiolaisille

Taustatiedot: (ympyröi vaihtoehto)

sukupuoli: nainen/ mies

matematiikan laajuus: pitkä/ lyhyt

syntymävuosi________

lukio-opintojen aloittamisvuosi_______

opiskelen lukion lisäksi muussa oppilaitoksessa: kyllä/ ei

vastatessasi kyllä edelliseen: opintolinjani muussa oppilaitoksessa on ________________

____

Vastaa seuraaviin väitteisiin, asteikolla 1 (täysin eri mieltä)…5 (täysin samaa mieltä) tai en osaa sanoa, parhaiten mielipidettäsi kuvaava vastaus. Rastita vastaus.

täysin eri mieltä … jokseenkin samaa mieltä ... täysin samaa mieltä

VÄITTEET aiheesta Matematiikka	1	2	3	4	5	en osaa sanoa
1. Matematiikka on vaikeaa.						
2. Opettajan rooli on matematiikan oppimisessa suuri.						
3. Matematiikka on kiinnostavaa.						
4. Tavoitteeni matematiikan tehtävissä on korkealla.						
5. Olen taitava matematiikassa.						
6. Matematiikassa keskeistä on laskutekniikka.						
7. Matematiikassa keskeistä on hahmottamiskyky.						
8. Matematiikassa keskeistä on looginen päättely.						
9. Pidän matematiikasta.						
10. Matematiikka on tärkeää.						
11. Matematiikkaa kuuluu opettaa monipuolisesti.						
12. Matematiikkaa voi oppia monella eri tavalla.						
13. Voin käyttää matematiikkaa arkielämässä.						
14. Voin käyttää matematiikkaa jatko-opinnoissani tai työssäni.						

Mitä matematiikka on?

____

____

____

	täysin eri mieltä …		jokseenkin samaa mieltä ...		täysin samaa mieltä	
VÄITTEET aiheesta Geometria	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**en osaa sanoa**
1. Geometria on vaikeaa.	◯	◯	◯	◯	◯	◯
2. Opettajan rooli on geometrian oppimisessa suuri.	◯	◯	◯	◯	◯	◯
3. Geometria on kiinnostavaa.	◯	◯	◯	◯	◯	◯
4. Tavoitteeni geometrian tehtävissä on korkealla.	◯	◯	◯	◯	◯	◯
5. Olen taitava geometriassa.	◯	◯	◯	◯	◯	◯
6. Geometriassa keskeistä on laskutekniikka.	◯	◯	◯	◯	◯	◯
7. Geometriassa keskeistä on hahmottamiskyky.	◯	◯	◯	◯	◯	◯
8. Geometriassa keskeistä on looginen päättely.						
9. Pidän geometriasta.	◯	◯	◯	◯	◯	◯
10. Geometria on tärkeä osa matematiikkaa.	◯	◯	◯	◯	◯	◯
11. Geometriaa kuuluu opettaa monipuolisesti.	◯	◯	◯	◯	◯	◯
12. Geometriaa voi oppia monella eri tavalla.	◯	◯	◯	◯	◯	◯
13. Voin käyttää geometriaa arkielämässä.	◯	◯	◯	◯	◯	◯
14. Voin käyttää geometriaa jatko-opinnoissani tai työssäni.	◯	◯	◯	◯	◯	◯
15. Olen osallistunut MAA3- tai MAB2-kurssille	Kyllä ◯	En ◯				

Mitä geometria on?

____

____

____

	täysin eri mieltä …	jokseenkin samaa mieltä ...			täysin samaa mieltä	
VÄITTEET aiheesta Todennäköisyys	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**en osaa sanoa**
1. Todennäköisyys on vaikeaa.	○	○	○	○	○	○
2. Opettajan rooli on todennäköisyyden oppimisessa suuri.	○	○	○	○	○	○
3. Todennäköisyys on kiinnostavaa.	○	○	○	○	○	○
4. Tavoitteeni todennäköisyystehtävissä on korkealla.	○	○	○	○	○	○
5. Olen taitava todennäköisyydessä.	○	○	○	○	○	○
6. Todennäköisyydessä keskeistä on laskutekniikka.	○	○	○	○	○	○
7. Todennäköisyydessä keskeistä on hahmottamisky-ky.	○	○	○	○	○	○
8. Todennäköisyydessä keskeistä on looginen päätte-ly.	○	○	○	○	○	○
9. Pidän todennäköisyydestä.	○	○	○	○	○	○
10. Todennäköisyys on tärkeä osa matematiikkaa.	○	○	○	○	○	○
11. Todennäköisyyttä kuuluu opettaa monipuolisesti.	○	○	○	○	○	○
12. Todennäköisyyttä voi oppia monella eri tavalla.	○	○	○	○	○	○
13. Voin käyttää todennäköisyyttä arkielämässä.	○	○	○	○	○	○
14. Voin käyttää todennäköisyyttä jatko-opinnoissani tai työssäni.	○	○	○	○	○	○
Olen osallistunut MAA6 tai MAB5-kurssille	Kyllä ○	En ○				

Mitä todennäköisyys on?

____

____

____

täysin jokseenkin täysin
eri mieltä … samaa mieltä ... samaa mieltä

VÄITTEET aiheesta Derivointi	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**en osaa sanoa**
1. Derivointi on vaikeaa.						
2. Opettajan rooli on derivoinnin oppimisessa suuri.						
3. Derivointi on kiinnostavaa.						
4. Tavoitteeni derivointitehtävissä on korkealla.						
5. Olen taitava derivoinnissa.						
6. Derivoinnissa keskeistä on laskutekniikka.						
7. Derivoinnissa keskeistä on hahmottamiskyky.						
8. Derivoinnissa keskeistä on looginen päättely.						
9. Pidän derivoinnista.						
10. Derivointi on tärkeä osa matematiikkaa.						
11. Derivointia kuuluu opettaa monipuolisesti.						
12. Derivointia voi oppia monella eri tavalla.						
13. Voin käyttää derivointia arkielämässä.						
14. Voin käyttää derivointia jatko-opinnoissani tai työssäni.						
Olen osallistunut MAA7/MAA8- tai MAB4- kurssille	Kyllä	En				

Mitä derivointi on?

____

____

____

VÄITTEET aiheesta Vektorit	täysin eri mieltä … 1	2	jokseenkin samaa mieltä ... 3	4	täysin samaa mieltä 5	en osaa sanoa
1. Vektorit ovat vaikeita.	◯	◯	◯	◯	◯	◯
2. Opettajan rooli on vektoreiden oppimisessa suuri.	◯	◯	◯	◯	◯	◯
3. Vektorit ovat kiinnostavia.	◯	◯	◯	◯	◯	◯
4. Tavoitteeni vektoritehtävissä on korkealla.	◯	◯	◯	◯	◯	◯
5. Olen taitava vektoreissa.	◯	◯	◯	◯	◯	◯
6. Vektoreissa keskeistä on laskutekniikka.	◯	◯	◯	◯	◯	◯
7. Vektoreissa keskeistä on hahmottamiskyky.	◯	◯	◯	◯	◯	◯
8. Vektoreissa keskeistä on looginen päättely.	◯	◯	◯	◯	◯	◯
9. Pidän vektoreista.	◯	◯	◯	◯	◯	◯
10. Vektorit ovat tärkeä osa matematiikkaa.	◯	◯	◯	◯	◯	◯
11. Vektoreita kuuluu opettaa monipuolisesti.	◯	◯	◯	◯	◯	◯
12. Vektoreita voi oppia monella eri tavalla.	◯	◯	◯	◯	◯	◯
13. Voin käyttää vektoreita arkielämässä.	◯	◯	◯	◯	◯	◯
14. Voin käyttää vektoreita jatko-opinnoissani tai työssäni.	◯	◯	◯	◯	◯	◯
15. Olen osallistunut MAA5- tai MAB8-kurssille	Kyllä ◯	En ◯				

Mitä vektorit ovat?

____

____

____

- Mille alalle aiot suuntautua lukion jälkeen?

____

KIITOS VASTAUKSISTA!

Liite 2. Tutkimuksen data.

opiskelija	1					2					3					4				
sukupuoli nainen1/mies2	2					1					2					2				
laajuus pitkä1/lyhyt2	1					2					2									
syntymävuosi	-94					-85					-89					-94				
lukion aloittamisvuosi	-10					-12					-12					-12				
muussa oppilaitoksessa kyllä1/ei2	1					2					2					2				
opintolinja (vastaukset piilotettu henkilösuojan säilymiseksi)																				
	I	II	III	IV	V	I	II	III	IV	V	I	II	III	IV	V	I	II	III	IV	V
1. … on vaikeaa.	5	2	4	2	3	1	1	E	E	E	1	1	E	E	E	3	4	4	E	E
2. Opettajan rooli on … oppimisessa suuri.	5	4	5	4	5	5	5	E	E	E	4	4	4	E	E	3	4	3	E	E
3. … on kiinnostavaa.	3	3	2	1	1	5	5	E	E	E	5	5	5	E	E	3	4	3	E	E
4. Tavoitteeni … tehtävissä on korkealla.	2	3	2	2	3	4	5	E	E	E	5	5	E	E	E	2	2	3	E	E
5. Olen taitava …	1	3	1	3	2	4	4	E	E	E	4	4	E	E	E	2	1	2	E	E
6. … keskeistä on laskutekniikka.	4	2	3	5	4	4	4	E	E	E	5	4	E	E	E	3	2		E	E
7. … keskeistä on hahmottamiskyky.	5	5	3	1	5	4	4	E	E	E	5	5	E	E	E	3	2	2	E	E
8. … keskeistä on looginen päättely.	3	4	5	1	2	4	4	E	E	E	5	5	E	E	E	3	1	2	E	E
9. Pidän...	3	3	2	3	5	5	5	E	E	E	5	5	E	E	E	3	3	2	E	E
10. … on tärkeää/ tärkeä osa matematiikkaa.	5	5	5	5	5	E	4	E	E	E	5	5	5	E	E	4	2	2	E	E
11. … kuuluu opettaa monipuolisesti.	E	3	1	2	1	5	4	E	E	E	5	5	E	E	E	3	2	2	E	E
12. ...voi oppia monella eri tavalla.	4	3	1	1	2	5	4	E	E	E	5	5	E	E	E	3	1	2	E	E
13. Voin käyttää … arkielämässä.	5	2	4	1	1	3	3	E	E	E	5	5	E	E	E	3	1	2	E	E
14. Voin käyttää … jatko-opinnoissani tai työssäni.	3	1	1	1	1	3	3	E	E	E	5	5	5	E	E	3	1	2	E	E
15. (olen osallistunut kyseiselle kurssille)		1	1	1	1		1	2	2	2		2*	2	2	2		1	2	2	2

I Matematiikka, II Geometria, III, Todennäköisyys, IV Derivointi, V Vektorit

5					6					7					8					9					10				
2					2															2									
2					1					1										1									
-85					-94					-93					-94					-94					-94				
-12					-10					-9					-10					-10					-10				
2					1					1										1					1				
I	II	III	IV	V	I	II	III	IV	V	I	II	III	IV	V	I	II	III	IV	V	I	II	III	IV	V	I	II	III	IV	V
3	3	E			3	4	3	2	5	5	5	3	5	5	3	3	3	3	3	4	4	3	4	4	3	4	1	3	3
4	4	E			5	4	4	4	4	5	5	5	5	5	4	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	3	3	3
4	5	4			3	2	4	4	1	5	3	5	3	3	3	4	3	3	3	3	4	4	3	3	3	3	4	2	3
4	4	4			2	2	4	4	3	4	4	5	4	3	4	4	3	3	3	3	3	3	3	2	4	4	4	4	3
2	2	E			2	2	3	4	1	1	2	2	2	1	3	3	3	3	3	2	3	2	3	2	4	4	4	4	3
2	4	E			3	3	4	3	3	4	5	3	5	5	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	3	3	4	3	3
4	4	E			4	4	4	4	4	4	5	4	5	5	4	3	3	3	4	3	5	3	3	4	4	4	3	3	4
4	4	E			4		4	4	1	5	5	4	5	5	3	3	3	3	4	4	5	3	3	4	4	4	4	3	4
3	5	E			3	3	4	4	1	4		5	2	2	3	4	3	3	3	3	3	3	3	2	3	4	4	2	3
4	5	5			4	3	4	E	1	4	3	4	E	5	3	4	4	4	3	3	4	4	4		3	3	4	3	3
4	5	4			4	2	4	E	E	5	5	5	5	E	4	4	4	4	4	4	4	4	4	3	4	3	3	3	3
5	5	E			3	3	3	E	E	4	3	4	1	E	3	4	4	4	4	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3
5	5	4			5	3	4	E	1	5	4	5	E	E	4	4	3	3	3	4	3	4	3	3	3	3	3	1	1
2	1	3			4	3	4	3	E	5	2	5	3	E	4	4	3	3	3	4	3	4	4	3	4	4	4	E	E
	1	2	2	2		1	1	1	1		1	1	1	1		1	1	1	1		1	1	1	1		1	1	1	1

11				
2				
1				
- 94				
- 10				
1				
I	II	III	IV	V
5	5	1	3	5
4	4	4	5	5
2	2	5	3	1
1	1	3	2	1
1	2	3	3	1
3	1	5	3	2
3	5	5	4	5
	5	5	4	5
2	2	4	3	3
3	3	4	E	E
4	5	4	1	E
4	3	2	4	E
3	5	5	1	1
4	5	5	1	3
	1	1	1	1

12				
2				
1				
- 89				
- 11				
1				
I	II	III	IV	V
3	4	E	E	2
4	4	4	4	5
2	2	4	E	3
3	2	2	2	3
2	2	2	E	3
4	4	4	3	3
3	3	5	3	4
3	3	5	3	4
2	2	2	E	3
3	2	3	E	2
3	3	E	4	3
4	3	3	3	4
4	2	4	2	2
3	E	3	E	E
	1	2	2	1

13				
1				
- 96				
- 12				
1				
I	II	III	IV	V
2	2	2	5	3
5	5	5	5	5
3	4	4	E	4
3	2	3	E	3
3	4	3	E	3
4	4	3	3	4
4	4	5	3	4
4	4	5	3	4
3	4	4	E	4
5	4	3	3	4
3	4	3	5	4
5	5	5	5	5
5	2	5	2	3
5	5	5	5	5
	1*	2	2	1

14				
2				
1				
- 96				
- 12				
1				
I	II	III	IV	V
4	2	E	E	4
5	4	E	E	5
4	5	E	E	5
4	E	E	E	4
3	E	E	E	3
E	E	E	E	5
4	E	E	E	5
4	E	E	E	4
5	4	E	E	3
5	E	E	E	4
5	E	E	E	3
5	4	E	E	4
5	4	E	E	4
5	5	3	E	5
	2	2	2	1

15				
2				
1				
- 95				
- 11				
1				
I	II	III	IV	V
2	2	3	E	3
3	3	E	E	4
3	3	E	E	3
2	4	E	E	3
4	4	E	E	3
5	4	E	E	5
3	4	E	E	4
5	4	E	E	3
3	4	E	E	2
4	4	E	E	2
2	3	E	E	3
4	3	E	E	E
3	4	E	E	4
4	3	E	E	4
	1	2	2	1

16				
2				
1				
- 95				
- 11				
1				
I	II	III	IV	V
3	1	3	E	3
5	3	E	E	5
1	5	E	E	3
3	4	E	E	2
3	5	3	E	3
E	2	3	E	3
E	5	3	E	2
3	5	3	E	4
3	5	E	E	2
5	4	E	E	5
4	E	E	E	4
3	3	3	E	3
5	5	5	4	2
5	5	5	4	4
	1	2	2	1

17					18					19					20					21					22				
										1					1					2					2				
										2															1				
- 96					- 95					- 95					- 95					- 94					- 94				
- 12					- 11					- 11					- 11					- 10					- 10				
1										1					1					1					1				
I	II	III	IV	V	I	II	III	IV	V	I	II	III	IV	V	I	II	III	IV	V	I	II	III	IV	V	I	II	III	IV	V
4	3	4	E	3	3	3	E		2	3	4	2	E	E	3	3	3	E	E	4	3	3	3	E	4	3	3	2	4
5	5	5	E	5	4	4	4		5	4	4	4	E	E	5	5	5	E	E	2	5	3	3	E	5	4	4	4	4
3	2	3	E	4	4	4	3		2	2	2	3	E	E	4	3	2	E	E	2	5	3	3	3	2	2	2	3	1
3	2	3	E	3	2	2	2		2	3	3	3	E	E		4	3	E	E	3	5	4	3	3	2	2	2	2	1
3	2	2	E	2	2	3	3		2		2	3	E	E	3	3	3	E	E	2	4	4	3	3	2	2	2	3	2
E	E	2	E	E	E	3	E		4	E	E	E	E	E	4	E	E	E	E	4	4	4	3	3	3	3	3	3	3
E	E	E	E	E	3	4	E		5	E	E	E	E	E	4	E	E	E	E	4	4	4	3	3	3	3	3	3	3
		E	E	E			4		4		E	E	E	E	4	E	E	E	E	4	5	5	3	3	3	3	3	3	3
2	2	2	E	3	3	3	3		1	E	2	3	E	E	3	4	2	E	E	2	4	4	3	3	2	2	2	2	2
3	3	4	E	2	4	4	4		2	3	3	3	E	E	3	3	3	E	E	4	4	4	3	3	2	2	3	3	3
4	4	3	E	2	5	5	5		4	4	4	4	E	E	3	3	3	E	E	E	4	4	3	3	3	3	3	3	3
4	4	3	E	2	5	4	4		3	4	2	3	E	E	3	3	3	E	E	E	4	4	3	3	3	3	3	2	3
5	4	2	E	2	4	3	4		2	4	3	2	E	E	3	3	2	E	E	E	4	3	3	3	2	2	5	1	2
3	4	2	E	2	5	2	4		3	5	2	2	E	E	3	1	2	E	E	2	4	3	3	4	2	2	2	2	2
	2	2	2	1		1	2	2	1		1	1	2	2		1	1	2	2		1	1	1	1		1	1	1	1

23				
2				
1				
- 93				
- 10				
1				
I	II	III	IV	V
E	E	2	1	3
5	E	E	3	3
3	4	4	4	3
3	2	3	2	2
3	2	3	3	3
3	E	E	3	3
3	E	E	3	3
E	E	E	3	3
E	3	4	E	E
E	4	E	E	E
5	E	3	E	E
5	3	3	3	E
5	E	E	3	3
5	E	E	E	3
	1	1	1	1

24				
1				
2				
- 89				
-5				
2				
I	II	III	IV	V
5	3	5	2	E
5	4	5	4	E
3	4	1	4	E
4	4	3	5	E
2	3	1	4	E
3	3	4	4	E
4	5	5	3	E
4	5	4	3	E
3	4	2	4	E
3	4	3	4	E
4	4	4	3	E
4	5	5	3	E
3	3	3	2	E
3	2	3	2	E
	1	1	1	2

25				
1				
2				
- 90				
-6				
2				
I	II	III	IV	V
2	2	3	3	2
3	3	3	4	3
4	4	3	3	2
3	3	3	3	2
3	4	3	4	3
2	3	4	3	2
4	4	3	3	3
		4	3	2
4	4	5	3	E
4	3	3	4	2
3	4	3	3	E
4	3	3	3	E
3	4	4	4	3
4	4	3	4	E
	1	1	1	2

26				
2				
- 91				
- 12				
2				
I	II	III	IV	V
3	2	3	3	4
5	4	4	4	4
2	3	2	2	2
2	3	2	2	2
2	3	2	2	2
E	3	3	3	3
3	3	3	3	3
3	3	3	3	3
2	3	2	2	2
3	3	E	E	E
3	3	3	E	E
E	3	E	E	E
E	E	E	E	E
4	3	E	E	E
	1	1	1	1

27				
2				
2				
- 95				
- 11				
1				
I	II	III	IV	V
5	5	5	E	E
5	4	4	E	E
1	2	4	E	E
1	2	3	E	E
1	1	2	E	E
2	E	4	E	E
2	5	3	E	E
3	4	4	E	E
2	1	4	E	E
4	3	3	E	E
4	4	3	E	E
4	4	4	E	E
2	2	5	1	1
4	4	1	1	1
	1	1	2	

28				
1				
- 95				
- 12				
2				
I	II	III	IV	V
4	3			
3	3			
2				
2	2			
1	2			
3	3			
4	4			
4	3			
1	2			
3	3			
4	3			
4	3			
3	2			
3	2			
	1			

29					30					31				
1					1					1				
										2				
- 95					- 95					- 95				
- 12					- 12					- 12				
2					2					2				
I	II	III	IV	V	I	II	III	IV	V	I	II	III	IV	V
5	1				5	4				4	3	E	E	E
4	4				5	4				3	3	E	E	E
2	2				1	1				2	4	E	E	E
2	1				1	1				3	2	E	E	E
1	1				1	1				2	1	E	E	E
E	E				3	3				3	E	E	E	E
E	E				E					E	E	E	E	E
E	E				3					E	E	E	E	E
3	2				1					3	3	E	E	E
5	2				3					3	2	E	E	E
5	3				E					3	2	E	E	E
5	3				3					3	E	E	E	E
5	5				2					3	1	E	E	E
E	E				2					E	E	E	E	E
	1										1	2	2	2

opiskelija	Mitä matematiikka on?
1	laskemista
2	
3	Matematiikka on ainoa universaali kieli
4	
5	Numeroita ja lukuja maailmasta; apu hahmottaa ja ymmärtää asioita, kyky selvittää asioita ja mahdollisuus tarkastaa paikkaansa pitävyyksiä.
6	Matematiikassa lasketaan lukujen ja kirjainten avulla kaikkea tärkeää.
7	
8	laskemista ja päättelyä, kaavojen ratkomista
9	laskemista
10	laskemista
11	laskemista
12	
13	
14	laskemista ja päättelyä
15	
16	numeroita, yhtälöitä, kaavoja, laskutoimituksia
17	laskemista
18	Laskuja, kaavoja & vastauksia
19	
20	
21	
22	kaavoilla ihmettelemistä
23	laskemista ja hahmottamista
24	Laskemista
25	Matematiikka on loogista päättelyä ja arkielämän päätösten tukija ja joskus määräävä tekijä
26	
27	Laskutoimituksia, päättelyä, loogista ajattelua
28	
29	Laskuja
30	Matematiikka on deduktiiviseen päättelyyn perustuva formaatti eli käsitteellinen tiede.
31	Laskuja

opiskelija	Mitä geometria on?	Mitä todennäköisyys on?
1	"kolmio", "ympyrä", "neliö", "kahdeksankulmio"	lottovoitto
2		
3	geometria on moniulotteisten kuvioitten juttujen laskemista	mikä on todennäköisyys, noppaa heittäessäsi luvuksi tulee 4
4		
5	muotojen ymmärtämistä, avaruudellista hahmottamista ja "rakennus"tekniikkaa.	
6	Piirretään palikoita ja muita kuvioita avaruuteen.	Sillä tutkitaan tiettyjen tapahtumien todennäköisyyttä tapahtua tai olla tapahtumatta.
7		
8	Geometristen kuvioiden ratkomista, pinta aloja ja tilavuuksia	todennäköisyyttä että jokin asia tapahtuu
9		
10		
11		Tietää kuinka suuri mahdollisuus on voittaa arpajaisissa
12		
13		
14		mahdollisuus johonkin asiaan
15		
16	kolmioita, suorakulmia, ympyröitä	
17		
18	Tilavuuslaskuja, kuvioita, koordinaatistoja & kaavoja	
19		
20		
21	Kaiken näköistä	
22	kuvioiden laskemista	laskemista todennäköisyyksiä
23		laskemista ja arvailua
24	Esim. pinta-alojen ja tilavuuksien laskemista	Sitä, että lasketaan esim. millä todennäköisyydellä saa vaikka lottovoiton.
25	Pinta-alojen laskemista, tilavuuksien laskemista, kolmion kulmien määrittämistä	Se on jollekin tapahtumalle laskettava todennäköisyys
26		
27	Kuvioita, kulmia, suoria	Vaihtoehtojen laskemista.
28		
29	Esim. pinta-alojen laskemista. Kolmioita, ympyröitä yms.	
30		
31	en osaa selittää	

opiskelija	Mitä derivointi on?	Mitä vektorit ovat?
1	en tiedä	"pisteet A ja B ja niitä yhdistävä jana sekä apukolmio"
2		
3		
4		
5	?	?
6	Muunnetaan lukuja ja kirjaimia helpommiksi.	Turhia nuolia, joissa ei ole mitään järkeä.
7		
8		
9		
10		
11	siinä on ainakin se D aina edessä	Ei aavistusta
12		
13		
14		
15		Viivoja paikasta A paikkaan B
16		suoria, paikkoja A, B, C…, viivoja paikasta toiseen
17		Janoja
18		Samanpituisia ja samansuuntaisia suuntajanoja
19		
20		
21		
22	derivoimista	vektoreita
23		
24		En tiedä
25	Koordinaatiston nollakohtien laskemista.	Ne määrittävät suuntia
26		
27		
28		
29		
30		
31		