

**Matematiikan ja tilastotieteen laitos**  
**Fourier analyysi**  
**I Kurssikoe 21.10. 2011**

1. Olkoon  $f \in L^1[-\pi, \pi]$  reaaliarvoinen parillinen funktio,

$$f(x) = f(-x) \in \mathbb{R}, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Osoita, että  $f$ :n Fourier kertoimet ovat reaalisia:  $\widehat{f}(n) \in \mathbb{R}$  kaikilla  $n \in \mathbb{Z}$ .

2. Tarkastellaan  $2\pi$ -periodista funktiota, jolle  $f(x) = \pi - |x|$ , kun  $x \in [-\pi, \pi]$ .  
Laske  $f$ :n Fourierin kertoimet  $\widehat{f}(n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Suppeneeko  $f$ :n Fourier sarja jokaisessa pisteessä  $x \in [-\pi, \pi]$ ? Perustele vastauksesi.

3. Olkoon  $f \in C^2(\mathbb{R})$  funktio, joka on  $2\pi$ -periodinen. Osoita, että

$$\|f'\|_{L^2[-\pi, \pi]}^2 \leq \|f\|_{L^2[-\pi, \pi]} \|f''\|_{L^2[-\pi, \pi]}.$$

4. Mikä seuraavista perheistä  $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$   $2\pi$ -periodisia funktioita on *hyvä perhe ytimiä*, luennoilla annetun määritelmän mielessä;

$$i) K_n(x) = \frac{\sin(nx)}{x^2}, \quad ii) K_n(x) = 2\pi n \max\{0, 1-n|x|\}, \quad iii) K_n(x) = \pi \frac{\cos(x/2n)}{2n \sin(\pi/2n)}.$$

Yllä kunkin perheen arvot on annettu välillä  $x \in [-\pi, \pi]$ .

Perustele vastauksesi.

**Matematiikan ja tilastotieteen laitos**

**Fourier analyysi**

**2. kurssikoe**

**16.12. 2011**

1. Olkoon  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ . Osoita, että sen Fourier muunnos  $\widehat{f}(\xi)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^d$ , on rajoitettu ja jatkuva funktio.

2. Näytä, että  $f(x) = \sin x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , ei ole minkään funktion  $g \in L^2(\mathbb{R})$  Fourier muunnos. Onko  $f$  jonkun distribuution  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  Fourier muunnos? Jos on, määrää  $T$ .

3. i) Jos  $a \in \mathbb{R}$ , osoita että kuvaus  $\delta_a : g \mapsto g(a)$ ,  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , määrää temperoidun distribuution.

ii) Osoita, että summa  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n \delta_n$  suppenee  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ :ssä.

4. i) Olkoon  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Jos  $|\xi| \widehat{f}(\xi) \in L^1(\mathbb{R})$ , osoita että

$$f \in C^1(\mathbb{R}).$$

ii) Jos  $f = \chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]} * \cdots * \chi_{[-1,1]}$ , missä  $f$  on  $(n+2)$ :n karakteristisen funktion konvoluutio,  $n \geq 1$ , näytä että

$$f \in C^{(n)}(\mathbb{R}).$$

**Matematiikan ja tilastotieteen laitos**  
**Fourier analyysi**  
**I Kurssikoe 19.10.2012**

1. Olkoon  $f \in L^1[-\pi, \pi]$  reaaliarvoinen funktio, jonka kaikki Fourier kertoimet ovat reaalisia, s.o.  $\widehat{f}(n) \in \mathbb{R}$  kaikilla  $n \in \mathbb{Z}$ .

Osoita, että silloin  $f$  on parillinen,

$$f(x) = f(-x) \in \mathbb{R}, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

2. Anna esimerkki funktiosta  $f \in L^1[-\pi, \pi]$ , jonka Fourier sarja suppenee jokaisessa pisteessä  $x \in [-\pi, \pi]$ , mutta jolle  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| = \infty$ .

Perustele vastauksesi laskematta  $f$ :n Fourier kertoimia, käyttäen vain funktion  $f$  ominaisuuksia ja luennoilla esitettyjä tuloksia.

3. Jos  $f, g \in L^2[-\pi, \pi]$ , olkoon  $h(x) = (f * g)(x)$  niiden konvoluutio. Osoita, että  $h$ :n Fourier kertoimille pätee

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{h}(n)| < \infty.$$

4. Mikä seuraavista perheistä  $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$   $2\pi$ -periodisia funktioita on *hyvä perheytimiä*, luennoilla annetun määritelmän mielessä;

$$i) K_n(x) = x \frac{n\pi}{4} \chi_{[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]}(x),$$

$$ii) K_n(x) = n\pi \chi_{[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]}(x),$$

$$iii) K_n(x) = (n+1) \left( \frac{|x|}{\pi} \right)^n.$$

Yllä kunkin perheen arvot on annettu välillä  $x \in [-\pi, \pi]$ ; merkintä  $\chi_{[a,b]}$  tarkoittaa välin  $[a, b]$  karakteristista funktiota.

Perustele vastauksesi.

**Matematiikan ja tilastotieteen laitos**  
**Fourier analyysi**  
**II Kurssikoe 17.12. 2012**

Laske 4 tehtävää seuraavista.

1. Määritellään  $f_n(x) = \sin(nx)$  ja  $h_n(x) = n\chi_{[-n,n]}(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .  
Suppeneeko jono  $(f_n)_{n=1}^\infty$  avaruudessa  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ? Entä suppeneeko jono  $(h_n)_{n=1}^\infty$ ?

Suppenevissa tapauksissa määrää k.o. jonon raja-arvo  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ :ssa.

2. Oletetaan, että  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ . Osoita, että konvoluutio  $f * g$  on jatkuva, ja että sen Fourier muunnos kuuluu avaruuteen  $L^{2012}(\mathbb{R}^d)$ .

[Vihje: Voit käyttää luennolla todistettuja tuloksia.]

3. Olkoon  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Osoita, että

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^2 \leq c_0 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

jollakin vakiolla  $0 < c_0 < \infty$ .

[Vihje: Kirjoita integraali  $\int_{-\infty}^{\infty} x \frac{d}{dx} |f(x)|^2 dx$  kahdella eri tavalla. Vakioksi voi valita  $c_0 = 2/\pi$ .

Todistamasi epäyhtälö on eräs versio Heisenbergin epätarkkuusperiaatteesta.]

4. Muotoile Poissonin summauskaava, ja osoita sen avulla että

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1 + 4\pi^2 n^2} = \frac{1}{2} \frac{e + 1}{e - 1}.$$

[Vihje: Laske funktion  $f(x) = e^{-|x|}$  Fourier muunnos.]

5. (i) Valitaan funktio  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , jolle  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 1$ .

Osoita, että silloin jokaisella  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  funktio

$$F(x) := \int_{-\infty}^x f(t) dt - \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \right) \int_{-\infty}^x \psi(t) dt$$

kuuluu Schwarzin luokkaan  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

(ii) Osoita kohdan (i) havainnon avulla, että jos  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  ja (distribuutio)derivaatta  $T' = 0$ , silloin  $T =$  vakiofunktio.

## FOURIER ANALYYSI. (syksy 2013)

### 1. KURSSIKOE (pe 18.10, 10-12 salissa D122)

1. Etsi  $2\pi$ -jaksoisen funktion  $f$  Fourier-kertoimet kun  $f(x) = 0$  arvoilla  $x \in [-\pi, 0]$  ja  $f(x) = x$  kun  $x \in (0, \pi)$ . Mitä osaat sanoa saadun Fourier-sarjan pisteittäisestä suppenemisestä?
2. Olkoon  $f \in C_{\#}(-\pi, \pi)$  jatkuva ja  $2\pi$ -periodinen funktio. Osoita, että  $f$ :llä on periodina myös luku  $\pi$  (eli identtisesti  $f(x + \pi) = f(x)$ ) jos ja vain jos sen Fourier-kertoimet toteuttavat ehdon

$$\widehat{f}(n) = 0 \quad \text{aina kun } n \text{ on pariton.}$$

3. Todista että jatkuvasti derivoituvan ja  $2\pi$ -periodisen funktion  $f \in C_{\#}^1(-\pi, \pi)$  Fourier-sarja suppenee itseisesti jokaisessa pisteessä.
4. Voidaanko valita vakiot  $c_n > 0$  siten, että jono  $(f_n)_n \geq 1$  on *hyvä perhe ytimiä* luentojen määritelmän mukaisesti, kun jokaisella kokonaisluvulla  $n \geq 1$  funktio  $f_n$  on  $2\pi$ -periodinen ja

$$f_n(x) = c_n \left(1 - \frac{|x|}{\pi}\right)^n \quad \text{kun } x \in [-\pi, \pi].$$

## FOURIER ANALYYSI. (syksy 2013)

### 2. KURSSIKOE (ti 10.10, 10-12 salissa C123)

Valitse 4 tehtävää seuraavista:

1. (i) Laske reaaliakselin välin  $[0, 1]$  karakteristisen funktion  $\chi_{[0,1]}$  Fourier-muunnos.  
(ii) Näytä että funktio  $x \mapsto x \sin(x)$  on jonkun distribuution  $\lambda \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$  Fourier-muunnos. Mikä kyseinen distribuutio on?
2. Mitkä seuraavista väitteistä ovat oikein, mitkä väärin? Anna vastauksellesi lyhyt perustelu (kaikkia yksityiskohtia ei tarvita ja voit käyttää kaikkia luentojen tuloksia hyväksi).
  - a) Distribuutio  $|a|\delta_a$  suppenee kohti nollaa avaruudessa  $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$  kun  $|a| \rightarrow \infty$ .
  - b) Jos  $f : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$  on rajoitettu ja kompaktikantajainen funktio, niin silloin  $\widehat{f} \in L^2(\mathbf{R})$ .
  - c) Jos  $f$  on avaruudessa  $L^1(\mathbf{R})$ , niin silloin  $\widehat{f}$  on funktio jolle  $(1 + \xi^2)^N \widehat{f}(\xi) \rightarrow 0$  jokaisella  $N \geq 1$  kun  $|\xi| \rightarrow \infty$ .
  - d) Jos distribuution  $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$  kantaja koostuu yhdestä ainoasta pisteestä  $a \in \mathbf{R}^d$ , niin silloin  $\widehat{T}$  on rajoitettu funktio.

3. Formuloi Poissonin summakaava. Laske sen avulla distribuution

$$\lambda := \sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta_n$$

(‘Diracin kampa’ reaaliakselilla) Fourier-muunnos.

4. Olkoon  $g \in L^2(\mathbf{R}^d)$ . Osoita, että osittaisdifferentiaaliyhtälöllä

$$\Delta f - f = g$$

on ratkaisu  $f \in L^2(\mathbf{R}^d)$ . Tässä  $\Delta f = \sum_{k=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} f$ , missä derivaatat tulkitaan distribuutiomielissä. Esitä kaava ratkaisufunktiolle  $f$  (se saa sisältää Fourier-muunnoksia tai Fourierin käänteismuunnoksia).

5. Olkoon  $g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ . Oletetaan, että  $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$  toteuttaa  $\phi(x) = 1$  kun  $|x| \leq 1$ , ja merkitään  $\phi_k(x) = \phi(x/k)$ . Osoita, että

$$\phi_k g \longrightarrow g \quad \text{avaruudessa } \mathcal{S}(\mathbf{R}^d).$$