Fourier analyysi

Helsingin Yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2015
Luennoitsija: Kari Astala[1]

Fourier analyysi on keskeinen työkalu monella eri matematiikan alalla, differentiaaliyhtälöissä, harmonisessa analyysissä, lukuteoriassa, stokastiikassa, jne.

Kurssi pyrkii antamaan hyvät perustiedot Fourier sarjojen ja Fourier muunnoksen perusteista. Kurssin loppuosassa Fourier muunnosten ymmärtäminen vie meidät luonnollisella tavalla (temperoituihin) distribuutioihin eli yleistettyihin funktioihin.

Kurssin lähtökohtana on Lebesguen integraalin perusteiden tunteminen, lähinnä kurssi "Mitta ja Integraali". Myös kurssin "Reaalianalyysi I" perustiedot ovat hyödyllisiä; ne on esitetty Ilkka Holopaisen luentomonisteessa "Reaalianalyysi I", johon viitataan lyhenteellä [H]; siis esim. [H, Lause 2.29]. Lisäksi, muistiinpanojen loppuun, osaan "Appendix", on koottu lyhyitä yhteenvetoja tarvittavista taustatiedoista; tätä osaa voidaan tarvittaessa myös laajentaa.

Lisätietoja kurssin aihepiiristä saa esim. kirjoista

- E.M. Stein & R. Shakarchi: *Fourier Analysis, An Introduction*, Princeton university press, 2003
- L. Grafakos: *Classical Fourier Analysis*, Springer, 2008.
- Rudin, W.: *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, Third ed. 1987;
  Rudin, W.: *Functional analysis*, McGraw-Hill, Second ed. 1990.

[1]Luentomoniste perustuu olennaisesti, pieniä muutoksia ja lisäyksiä lukuunottamatta, K.A.:n luentoihin syksyllä 2012 ja Eero Saksmanin luentoihin syksyllä 2013.

Stein-Shakarchi on mukavasti kirjoitettu johdatus aiheeseen; pulmana on että kirja perustuu Riemannin integraaliin, mikä ennen pitkää tuottaa ikäviä vaikeuksia. Grafakos on laaja yleisteos, jossa on paljon tietoa, huomattavasti enemmän kuin tällä kurssilla voidaan käsitellä. Rudinin kirjat taas luovat persoonallisen yleiskuvan matemaattiseen analyysiin.

Sisältö

I. Johdantoa

Fourier analyysin lähtökohtana ja perusideana on esittää annettu funktio $f(x)$ Fourier- eli trigonometrisena sarjana

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{1.1}$$

missä

$$e^{it} = \cos(t) + i\sin(t). \tag{1.2}$$

Huomautus 1.1. *Koska sarjan* (1.1) *termit ovat* 2π*-periodisia, yleensä ajatellaan* f *kuvaukseksi* $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$*; vaihtoehtoisesti voimme olettaa, että* f *on* 2π*-periodinen.*

Trigonometrisia funktioita ja polynomeja oli käytetty jo ammoisina aikoina, mutta ajatus esittää *mielivaltainen* funktio $f(x)$ sarjana (1.1) juontaa juurensa 1700-luvulta, pyrkimyksestä ymmärtää värähtelevän kielen liikettä. Tarkastellaan (idealisoitua) kieltä välillä $(0, \pi)$, kysymyksessä voisi olla vaikkapa viulun kieli joka on pingoitettu reaaliakselin pisteiden 0 ja π välille. Toki voisimme tarkastella mielivaltaisen mittaista kieltä välillä (0,L), mutta valinta $L = \pi$ yksinnkertaistaa merkintöjä. Jo Pythagoraan ajoista oli enemmän tai vähemmän tunnettua kuinka värähtelevän kielen tuottamassa äänessä on perustaajuus ja sen monikerrat, eli ns. yläsävelsarja. 1700-luvun alussa oli kertynyt kokeellista tietoa siitä että kieli voi fyysisesti värähdellä yläsävelsarjaa vastaavissa moodeissa. Brook Taylor esitti 1713 ensimmäisenä tarkemman mallin värähtelevän kielen liikkeelle ja antoi perustaajuiselle värähtelylle kaavan

$$u(x,t) = \cos(ct)\sin(x),$$

missä $u(x,t)$ on kielen poikkeama tasapainosta pisteessä $x \in [0, \pi]$ hetkellä $t \geq 0$ ja missä $c > 0$ on vakio. Näin värähtelyliike tuli kytketyksi trigonometrisiin funktioihin. Jacob Bernoulli puolestaan tutki perusteellisemmin kielen liikettä approksimoimalla sitä n:n toisiinsa kiinnitetyn massapisteen muodostamalla systeemillä ja johti v. 1727 Taylorin tuloksen raja-arvona, kun massapisteiden lukumäärä kasvaa äärettömiin. 1730-luvulla Daniel Bernoulli esitti, että korkeampien (puhtaiden) värähtelymooden liikettä voidaan kuvata kaavalla

$$u(x,t) = \cos(nct)\sin(nx), \quad n = 1, 2, \ldots$$

ja totesi että myös tälläisten ratkaisujen lineaarikombinaatiot kuvaavat värähtelyä.

Varsinainen läpimurto tuli v.1747 kun D'Alembert osoitti, että värähtelevä kieli toteuttaa *aaltoyhtälön*

$$\frac{du^2}{dx^2} = c^2 \frac{du^2}{dt^2} \tag{1.3}$$

Tämä yhtälö ja sen usempiulotteiset vastineet ovat eräs kaikkein tärkeimmistä osittaisdifferentiaaliyhtälöistä matematiikassa ja fysiikassa. Värähtelevän kielen liike voidaan periaatteessa määrittää ratkaisemalla (1.3) ottaen huomioon alku-ja reunaehdot

$$u(x,0) = f(x), \quad \frac{du}{dt}(x,0) = 0, \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0. \tag{1.4}$$

Tässä ensimmäiset ehtdot kertovat, että kielen alkuasema on $f(x)$ ja sen alkunopeus on 0 (toisin sanoen kieli päästetään värähtelemään pingottamalla se ensin alkutilaan jota kuvaa funktio f) ja viimeinen ehto toteaa että kielen päätepisteet pysyvät paikoillaan. Lisäksi D'Alembert johti aaltoyhtälölle yleisen ratkaisun

$$u(x,t) = a_1(x - ct) + a_2(x + ct). \tag{1.5}$$

missä ensimmäinen termi kuvaa oikealle (ja toinen vasemmalle) liikkuvaa aaltoa. Funktiot a_1, a_2 voidaan ratkaista alkuehdoista (1.4).

Euler kiinnostui välittömästi D'Alembertin aaltoyhtälöstä ja sen ratkaisukaavasta (1.5), ja totesi että sen avullahan voidaan hyvin kuvata myös realistisia alkuarvoja, kuten sitä tapausta missä kieli aluksi venytetään koholle vain yhdestä pisteestä, vaikkapa pisteestä $\pi/2$, ja sitten päästetään värähtelemään. Tällöin siis

$$f(x) = \pi/2 - |x - \pi/2|. \tag{1.6}$$

Tämä alkuarvo ei ole derivoituva kohdassa $\pi/2$. Kuitenkin Eulerin mielestä tässäkin tapauksessa D'Alembertin yleinen ratkaisukaava tuottaa mielekkään tuloksen. D'Alembert puolestaan vastusti kiivaasti tällaisten ratkaisujen käyttöä, ja vaati että aaltoyhtälössä esiintyvien toisten derivaattojen tulee olla määriteltyjä, vaikkei derivaatan käsite ollutkaan tuohon aikaan kovin selkeä. Tästä syntyi ankara kiista kuuluisten tiedemiesten välille.

Muutamaa vuotta myöhemmin v. 1753 Daniel Bernoulli toi kiistaan uuden juonteen väittämällä että jokainen tarkastelemamme värähtelytehtävän (1.3)-(1.4) ratkaisu voidaan esittää perusvärähtelyjen äärettömänä superpositiona, eli yleinen ratkaisu on muotoa

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(nct)\sin(nx).$$

Kertoimet c_n määräytyvät alkuehdosta, joka saa muodon

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx), \quad x \in (0,\pi). \tag{1.7}$$

Erityisesti Bernoulli totesi, että myös epäsileät alkuehdot kuten (1.6) sisältyvät hänen ratkaisuunsa. Tätä ei tietysti D'Alembert hyväksynyt. Bernoullin ratkaisua kritisoi myös Euler, mm. todeten, ettei ollut selvää että jokainen funktio f voidaan esittää sinisarjana (1.7), ja totesi ettei ollut olemassa menetelmää kertoimien c_n määräämiseksi annetulle funktiolle f.

Siispä jo Fourier-sarjojen alkuhistoria ja ensimmäinen sovellus(-yritys) nosti esiin monia kysymyksiä jotka askarruttivat (aiheellisesti !) tuon ajan matemaatikkoja. Varsin pian tosin Clairaut keksi miten kertoimet voidaan ratkaista ja antoi kaavan

$$c_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \tag{1.8}$$

(myös Euler ratkaisi ongelman, tosin hänen ratkaisunsa löytyi vasta kuoleman jälkeen löydetyistä muistiinpanoista). Silti seuraavassa luetellut luonnolliset kysymykset jäivät vaille vastausta useiksi vuosikymmeniksi, ja Fourier-sarjat olivat vähäisessä roolissa ennen 1810-lukua.

Kysymys 1.2.

- *Määräävätkö Fourier kertoimet* (1.8) *funktion f yksikäsitteisesti ?*
- *Suppeneeko sarja* (1.7), *tai milloin se suppenee ?*
- *Missä mielessä sarja suppenee ? (Esimerkiksi: kun f on epäjatkuva, suppeneeko sarja kaikkialla, melkein kaikkialla vai ..... ??)*
- *Jos sarja suppenee pisteessä x, onko sen summa $f(x)$?*
- *Miten kertoimet c_n kuvaavat funktion $f(x)$ ominaisuuksia ?*
- *jne...*

Fourier-sarjojen uusi tuleminen on Joseph Fourierin ansiota, 1800-luvun alkuvuosikymmeniltä. Fourier oli monipuolinen lahjakkuus, hän toimi mm. matemaatikkona ja fyysikkona École Normale Supérieure'ssa ja insinöörinä Napoleonin armeijassa - hän oli mukana esim. egyptin sotaretkellä. Esityksen (1.1), tai paremminkin sini-sarjan (1.7), Fourier löysi lämpöyhtälöä tutkiessaan. Tarinan mukaan Fourier halusi selvittää kuinka syvä viinikellari hänen oli rakennettava - mutta toki lämmön johtumisen ymmärtämistä tarvitaan monessa muussakin yhteydessä.

V. 1807 Fourier johti kaavan annetun funktion Fourier-kertoimille (Clairautin ja Eulerin ratkaisut olivat käytännöllisesti katsoen unohtuneet). Kuuluisassa teoksessaan *Théorie analytique de la chaleur* (lämmön analyyttinen teoria) Fourier väitti että kaikki funktiot, jopa epäjatkuvatkin, voidaan kehittää suppenevaksi sinisarjaksi (1.7) (yhtäpitävästi funktiot välillä $[0, 2\pi]$ voidaan kehittää sarjaksi (1.1)). Lisäksi hän sovelsi Fourier-sarjoja taitavasti moniin analyysin ongelmiin, erityisesti osittaidifferentiaaliyhtälöiden alkuarvotehtäviin. Edelleen hän kehitti koko reaaliakselilla määritellyille funktioille toimivan ns. Fourier-muunnoksen, josta myöhemmin lisää tällä kurssilla.

Fourierin työn jälkeen Fourier-sarjojen käyttö vakiintui. Nimittäin esityksellä (1.1) on monia etuja verrattuna vaikkapa peruskursseilta tuttuihin Taylorin sarjoihin. Esimerkiksi:

- Yleispätevyys: esitys (1.1) toimii myös epäjatkuville funktioille (oikein tulkittuna).
- Fysikaaliset mallit ja tulkinnat: eksponenttifunktiot e^{inx} kuvaavat luonnollisella tavalla jaksollista t. aaltoliikettä, värähtelyjä yms.
- Differentiaalioperaattoreiden toiminta eksponenttikannassa:

$$\frac{d}{dx}e^{inx} = ine^{inx}, \quad \text{so. } e^{inx} \text{ on derivaattaoperaattorin } \textbf{ominaisfunktio}.$$

- Yhteensopivuus ryhmätoimintojen kanssa:

$$e^{in(x+y)} = e^{inx}e^{inx};$$

  tämän yhteensopivuuden vuoksi kaikki translaatioinvariantit operaattorit toimivat luonnollisella tavalla Fourier kannassa.

Näistä ja monista muista vastaavista syistä Fourier-sarjat ja -integraalit ovat edelleen keskeinen työkalu modernissa matematiikassa.

Palataan sitten keskeiseen kysymykseemme funktioiden esittämisestä sarjojen (1.1) avulla. Jotta voisimme määritellä mielivaltaisen (integroituvan) funktion Fourier-sarjan, selvitämme ensiksi mistä saadaan esityksen (1.1) kertoimet c_n.

Tätä varten, olkoon f astetta N oleva trigonometrinen polynomi,

$$f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} = \sum_{n=-N}^{N} c_n\big(\cos(nx) + i\sin(nx)\big).$$

Silloin f:n k's **Fourier kerroin** on

$$\widehat{f}(k) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N} c_n \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)x}\,dx = c_k, \tag{1.9}$$

sillä $\int_0^{2\pi} e^{i(n-k)x}\, dx = 2\pi\, \delta_{n,k}$. Eli

$$\boxed{c_k = \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx.}$$

Tämän äärellisille summille todistamamme kaavan innoittamana määrittelemme yleiselle integroituvalle funktiolle $f(x)$ sitä vastaavan (toistaiseksi formaalin) Fourier-sarjan

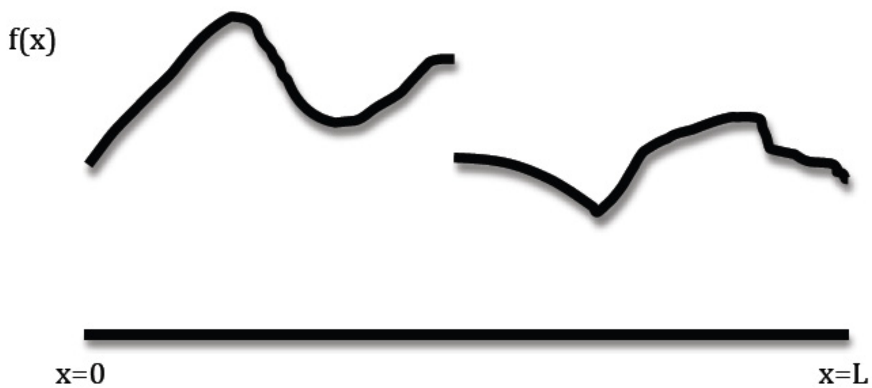
$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\, e^{inx}, \tag{1.10}$$

missä Fourier kertoimet $\widehat{f}(k)$ on annettu kaavalla

$$\widehat{f}(k) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{1.11}$$

Erityisesti Fourierin töiden jälkeen jo edellä mainitsemamme perustavaa laatua olevat Kysymykset 1.2 nousivat polttaviksi! Vasta vuonna 1829 Dirichlet kykeni osoittamaan tarkasti, että sarjat suppenevat aivan kuten Fourier (tai D. Bernoulli) väittikin, ainakin jos funktio f on hieman säännöllisempi kuin yleinen jatkuva funktio. Kaiken kaikkiaan pyrkimys Fourier-sarjojen parempaan ymmärtämiseen oli keskeisenä punaisena lankana analyysin tarkentumisessa 1800-luvulla ja motivaationa mm. Riemannin ja Lebesguen integraalikäsitteiden, Hilbert-avaruuksien teorian ja ja peräti Cantorin joukko-opin synnyssä!

Esimerkki 1.2. Fourier sovelsi sarjojaan erityisesti lämpöyhtälön teoriaan. Tarkastellaan tästä esimerkkinä lämmön johtumista tangossa, jonka pituus on L. Oletamme, että tangon päätepisteissä $x = 0$ ja $x = L$ lämpötila on koko ajan 0^o, tämän saamme aikaan jonkin jäähdytysprosessin avulla, ja että hetkellä $t = 0$ tangon lämpöjakauma on $f(x)$, missä $0 \le x \le L$.



Fysiikan periaatteiden avulla tiedetään, että lämpöjakaumaa $u(x,t)$ hetkellä $t>0$ kuvaavat yhtälöt

$$\begin{aligned}(1.12) \qquad \partial_t u(x,t) &= c\,\partial_x^2 u(x,t), \quad x\in[0,L],\ t>0,\\ (1.13) \qquad u(x,0) &= f(x), \quad x\in[0,L], \qquad \text{(annettu alkuarvo)}\\ (1.14) \qquad u(0,t) &= u(L,t) \equiv 0, \quad t>0. \qquad \text{(annettu reunaehto)}\end{aligned}$$

missä kerroin c riippuu tangon lämmönjohtavuusominaisuuksista.

Tehtävä: Määrää tangon lämpöjakauma $u(x,t)$ hetkellä t pisteessä $x\in[0,L]$!
Aluksi, derivoimalla havaitaan, että funktiot

$$(1.15) \qquad u_n(x,t) = A_n e^{-c(\pi n/L)^2 t}\sin(\frac{\pi n}{L}x), \qquad n\in\mathbb{N},$$

toteuttavat yhtälön (1.12) sekä reunaehdon (1.14). Etsitään nyt ratkaisua $u(x,t)$ funktioiden u_n summana, $u=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u_n$. Miten silloin valita (tuntemattomat) kertoimet A_n ?
Alkuhetkellä $t=0$ on $u_n(x,0)=A_n\sin(\frac{\pi n}{L}x)$, mistä saadaan formaalisti

$$(1.16) \qquad f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin(\frac{\pi n}{L}x)$$

ja tästä yhtä formaalisti

$$\int_0^L f(x)\,\sin(\frac{\pi k}{L}x)\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \int_0^L \sin(\frac{\pi n}{L}x)\ \sin(\frac{\pi k}{L}x)\,dx = \frac{L}{2}\,A_k,$$

sillä $\int_0^L \sin(\frac{\pi n}{L}x)\ \sin(\frac{\pi k}{L}x)\,dx = \frac{L}{2}\,\delta_{n,k}$ (HT).

Valitaan siis

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\sin(\frac{\pi n}{L}x)\,dx, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.17}$$

Meillä on näin idea yhtälön (1.12)-(1.14) ratkaisuksi: Kun alkulämpötila $f(x)$ on annettu, lasketaan kertoimet A_n kuten kaavassa (1.17), ja otetaan summa

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-c\,(\pi\,n/L)^2 t}\,\sin(\frac{\pi n}{L}x) \tag{1.18}$$

Kysymys 1.3. *Antaako yo. proseduuri todellakin etsityn ratkaisun kullakin alkulämpötilalla f? Tai tarkemmin:*

- *Millaisella funktioilla $f(x)$ kertoimet A_n ovat olemassa ?*
- *Mistä tiedämme, että jokainen ratkaisu $u(x,t)$ tai jokainen alkua-arvo $f(x)$ voidaan esittää summina* (1.16) *ja* (1.18) *?*
- *Mistä tiedämme, että sarjat* (1.16) *ja* (1.18) *suppenevat ? Tämä riippuu funktiosta $f(x)$, mutta miten ?*
- *Jos esimerkiksi sarja* (1.16) *ei suppene jokaisessa pisteessä x, missä mielessä sarja* (1.16) *esittää alkuarvofunktiota $f(x)$ ja missä mielessä alkuehto* (1.13) *toteutuu ?*
- *Ja vaikka yo. sarjat olisivat hyvin määriteltyjä ja niiden summat antaisivat oikeat funktiot, voimmeko derivoida (ja koska) sarjaa $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ kahdesti ? Huomaa, että termeittäin derivointi kasvattaa sarjan kertoimia, joten suppenemisominaisuudet heikkenevät derivoinnin myötä !*

Osa yo. kysymyksistä on helppoja, osa syvällisempiä, aihepiirin peruskysymyksiä. Kurssin aikana tulemme saamaan vastauksen kaikkiin näihin kysymyksiin, ja monen muunkin sovelluksen kera, myös esittämään yhtälöille (1.12)-(1.14) ratkaisut perusteluineen, varsin yleisillä alkuehdoilla $f(x)$ - esimerkiksi f:n jatkuvuutta ei ole tarpeen olettaa.

II. Fourier sarjojen perusominaisuuksia

II.1. Perusmääritelmät. Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ (Lebesgue) integroituva funktio, eli $f \in L^1(a,b)$. Olkoon $L = b - a$ ko. välin pituus, $0 < L < \infty$. Silloin funktion $f(x)$ n:s *Fourier kerroin* on

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{L}\int_a^b f(x)\, e^{-i\frac{2\pi n}{L}x} dx, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{2.1}$$

Huomautus 2.1. *Koska $f \in L^1(a,b)$, saamme $|\widehat{f}(n)| \le \frac{1}{L}\int_a^b |f(x)|\, dx = vakio < \infty$ jokaisella $n \in \mathbb{Z}$ (ja lisäksi, integroituvuuden nojalla kaikki Fourier-kertoimet ovat hyvin määriteltyjä).*

Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ Fourier-sarja on (toistaiseksi formaali) summa

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\, e^{i\frac{2\pi n}{L}x}.$$

Toisinaan merkitsemme

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, e^{i\frac{2\pi n}{L}x}$$

kun $a_n = \widehat{f}(n), n \in \mathbb{Z}$. Tässä merkintä $\sim$ on vain symbolinen (joskin hyvin intuitiivinen), ja se tarkoittaa vain (!), että luvut a_n ovat f:n Fourier-kertoimet.

Vaikka jotkut esimerkit tai sovellukset tarvitsevat funktioita, jotka on määritelty yleisellä välillä $[a,b]$, yleensä tarkastelemme tapausta $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ tai $f : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$;

kuten kaavasta (2.1) huomataan, tällä valinnalla merkinnät yksinkertaistuvat. Valinta ei rajoita tarkastelujen yleisyyttä:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, e^{inx} \quad \underset{\text{(HT)}}{\Leftrightarrow} \quad f\left(\frac{2\pi}{L}(x-x_0)\right) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, e^{-i\frac{2\pi n}{L}x_0}\, e^{i\frac{2\pi n}{L}x}$$

Usein on hyödyllistä laajentaa $f \in L^1(a,b)$ koko reaaliakselin $L-$periodiseksi funktioksi, $L = b - a > 0$. Tarkasti ottaen periodisointi onnistuu kun alunperin f on määritelty *puoliavoimella välillä* $[a,b)$ ja määritellään

$$f(x) = f(x-kL) \quad \text{kun } \ x \in (a+kL, b+kL), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

L^1-funktioille ei sinänsä ole merkitystä onko alkuperäinen määrittelyväli puoliavoin vai ei, sillä ne on määritelty vain melkein kaikkialla.

Jos kuitenkin f on jatkuva (tarkkaan ottaen, f:n L^1-luokalla on jatkuva edustaja), haluamme, että periodisointi säilyttää jatkuvuuden - ja tämä onnistuu vain mikäli $f(a) = f(b)$! Tämän vuoksi otamme käyttöön seuraavan määritelmän.

MÄÄRITELMÄ 2.2. *Asetamme* $C_\#(a,b) := \{f : [a,b] \to \mathbb{C}$ *jatkuva,* $f(a) = f(b)\}$.

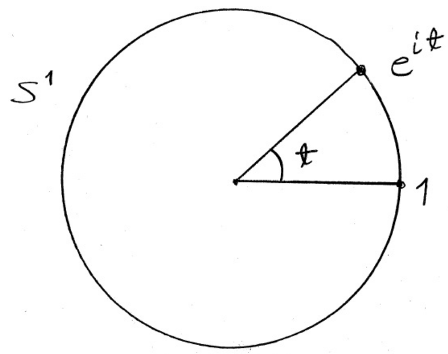
Eli kun $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ on jatkuva, f:n (L-)periodinen laajennus on jatkuva $\Leftrightarrow$ $f \in C_\#(a,b)$.

Kääntäen, reaaliakselin periodisille funktioille (periodina L) Fourier kertoimet määritellään samalla kaavalla (2.1); selvästikään välin $[a,b]$ valinta ei vaikuta kertoimien arvoon, kunhan vain $L = b - a$ (HT).

HUOMAUTUS 2.3. *Yleensä siis tarkastelemme* 2π*-periodisia funktioita. Niitä voi helposti käsitellä myös yksikköympyrän avulla. Koska Eulerin kaavan* (1.2) *nojalla yksikköympyrä*

$$\mathbb{S}^1 = \{e^{it} : 0 \le t \le 2\pi\},$$

voimme samaistaa $C_\#(0,2\pi) \simeq C(\mathbb{S}^1)$*; eli samaistetaan* $f(x) = F(e^{ix})$ *missä* $f \in C_\#(0,2\pi)$ *ja* $F \in C(\mathbb{S}^1)$*. Ja edelleen, molemmat funktioavaruudet on mukava samaistaa* $\mathbb{R}$*:n jatkuvien* 2π*-periodisten funktioiden kanssa.*



Tietysti, yllä voi edelleen samaistaa $C_\#(-\pi,\pi) \simeq C_\#(0,2\pi)$ jne., kunhan vain merkinnät valitaan systemaattisesti.

Huomautus 2.4. *Vastaavasti*

$$C^k_\#(a,b) := \{f : [a,b] \to \mathbb{C} \text{ on } k \text{ kertaa jatkuvasti derivoituva}, f^{(j)}(a) = f^{(j)}(b) \ \ \forall \ \ 0 \le j \le k\}$$

on periodinen vastine C^k*-funktioille.*

Kuten edellä, samaistamme $C^k_\#(0,2\pi) \simeq C^k_\#(\mathbb{S}^1)$

Esimerkki 2.5. *Olkoon* $f(x) = x, \ \ -\pi \le x \le \pi.$ *Määrää* f*:n Fourier kertoimet:*

Kun $n \neq 0$, saadaan

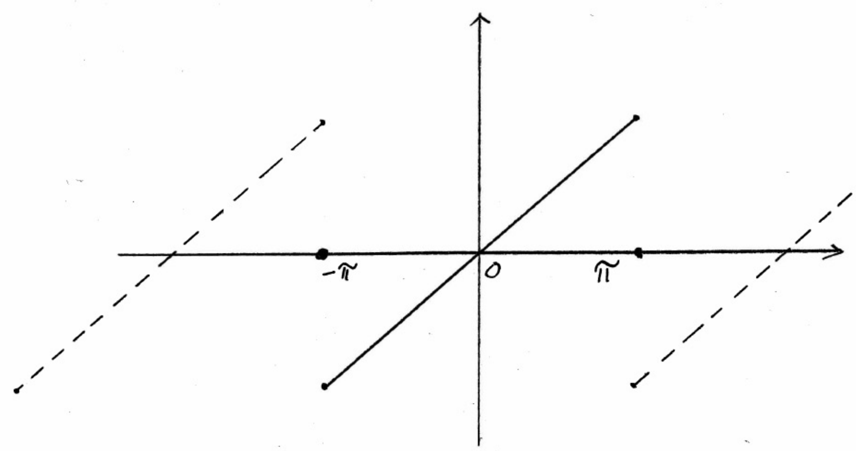
$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\Big|_{-\pi}^{\pi} \frac{xe^{-inx}}{-in} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-inx}}{in}dx =$$

$$= \frac{\pi\cos(-n\pi)}{-in2\pi} + \frac{\pi\cos(n\pi)}{-in2\pi} + 0 = \frac{i(-1)^n}{n},$$

kun taas $\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xdx = 0$. Siis

$$f(x) \sim \sum_{n\neq 0} i(-1)^n \frac{e^{inx}}{n}; \quad \text{eli } \ f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin(nx).$$

Hieman myöhemmin näemme, että k kertaa jatkuvasti derivoituvan funktion Fourier-kertoimille $|\widehat{f}(n)| \le C(1+|n|)^{-k}$. Miksi näin ei käy yo. esimerkissä? Syy käy ilmi tarkasteltaessa f:n kuvaajaa:



Siis f:llä on hyppy välin $[-\pi,\pi]$ päätepisteissä, eli f:n periodinen jatko ei ole jatkuva ! Erityisesti, tämä esimerkki valottaa hyvin seuraavaa periaatetta:

Funktion f Fourier kertoimet $\equiv$ *f:n periodisoinnin Fourier kertoimet.*

Eli periodisoinnin tuomat ominaisuudet heijastuvat aina funktion f Fourier kertoimiin.

II.2. Fourier-sarjan Yksikäsitteisyys. Jos $f, g : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ integroituvia funktioita, ja $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$, emme yleensä voi päätellä, että pisteittäin $f(x) = g(x)$ (koska L^1-funktio määritelty vain melkein kaikkialla). Mutta sopivien esim. jatkuvuusoletusten kanssa päästään pisteittäisiin tuloksiin. Tästä ensimmäinen esimerkki:

LAUSE 2.6. *Olkoot f, g mitallisia ja integroituvia funktioita välillä $[-\pi,\pi]$, joille $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$ jokaisella $n \in \mathbb{Z}$. Silloin $f(x) = g(x)$ jokaisessa pisteessä $x \in (-\pi,\pi)$, jossa $f - g$ on jatkuva.*

Todistus. Lineaarisuuden nojalla riittää todistaa seuraava:

VÄITE: Olkoon f mitallinen, integroituva ja 2π-periodinen funktio, jolle $\widehat{f}(n) = 0$ jokaisella $n \in \mathbb{Z}$. Silloin $f(x) = 0$ jokaisessa pisteessä x, jossa f on jatkuva.

Väitteen todistamiseksi oletetaan ensin, että f on jatkuva pisteessä $x_0 = 0$ ja että f on reaaliarvoinen. Teemme silloin vastaoletuksen: $f(0) \neq 0$. Korvaamalla f:n tarvittaessa $-f$:llä, voimme olettaa:

$$f(0) > 0 \tag{2.2}$$

ja näytämme, että (2.2) johtaa ristiriitaan. Tätä varten huomataan ensin, että oletuksen nojalla jokaisella trigonometrisella polynomilla $P(x) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx}$ pätee

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, P(x)\, dx = \sum_{n=-N}^{N} a_n \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{inx}\, dx = \sum_{n=-N}^{N} a_n 2\pi \widehat{f}(-n) = 0. \tag{2.3}$$

Hyödynnetään tätä valitsemalla sopivia polynomeja $P(x)$. Koska f on jatkuva origossa,

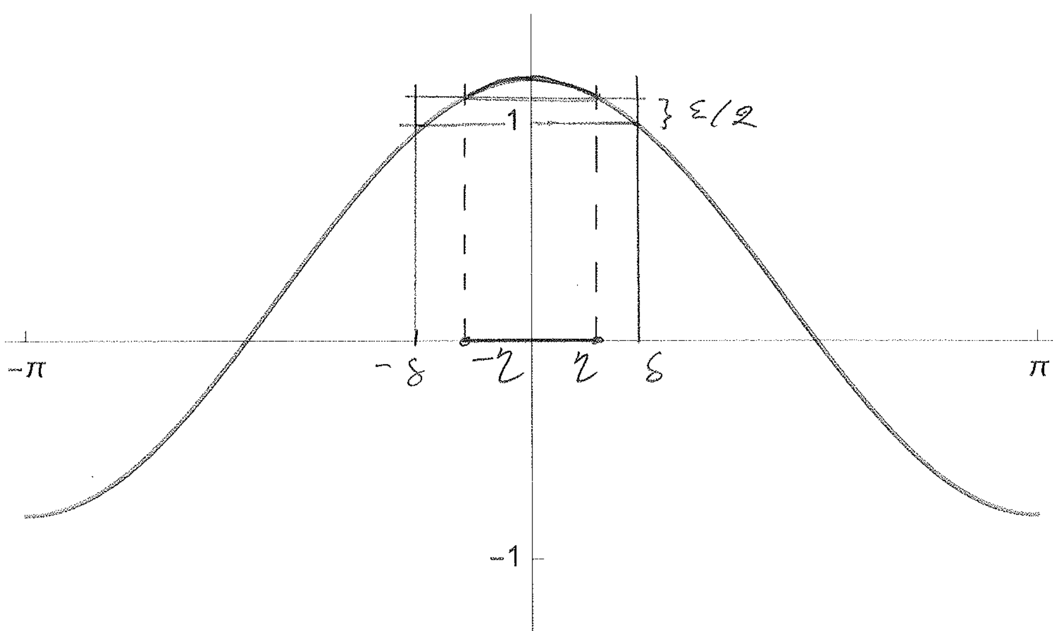
$$f(x) > \frac{1}{2} f(0) > 0, \qquad -\delta < x < \delta, \tag{2.4}$$

kun $\delta > 0$ riittävän pieni. Sen jälkeen valitsemme

$$P(x) = \varepsilon + \cos(x)$$

missä $\varepsilon > 0$ on niin pieni, että

$$|P(x)| \leq 1 \qquad \text{kun } \delta \leq |x| \leq \pi. \tag{2.5}$$



Valitaan vielä lisäparametri $0 < \eta < \delta$ niin että

$$P(x) > 1 + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{kun } |x| < \eta, \quad \text{vrt. kuva ed. sivulla.} \tag{2.6}$$

Näillä valinnoilla asetetaan

$$P_k(x) = \big(P(x)\big)^k, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Silloin $P_k(x)$ on trigonometrinen polynomi (HT), jolle pätee arvio

$$\left|\int_{\delta \le |x| \le \pi} f(x)\, P_k(x)\, dx\right| \le \int_{-\pi}^{\pi} |f| dx \max_{\delta \le |x| \le \pi} |P(x)^k| \le \|f\|_{L^1}$$

Toisaalta, ehdon (2.4) mukaan $f(x), P_k(x) > 0$ kun $|x| < \delta$ [voi valita $\delta < \pi/2$], ja siksi

$$\int_{|x|<\delta} f(x)\, P_k(x)\, dx \ge \int_{|x|<\eta} f(x)\, P_k(x)\, dx > \frac{f(0)}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^k 2\eta \qquad (\to +\infty \text{ kun } k \to \infty).$$

Yhdistämällä arviot ehtoon (2.3) saadaan lopulta

$$0 = \int_{|x|<\delta} f(x)\, P_k(x) + \int_{\delta \le |x| \le \pi} f(x)\, P_k(x) \ge \ \eta\, f(0)\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^k - \|f\|_{L^1},$$

missä oikeanpuoleinen termi $\to \infty$ kun k kasvaa - ristiriita !

Tämä osoittaa, että $f(0) = 0$ kun jatkuvuuspiste $x_0 = 0$ ja f reaaliarvoinen. Yleisellä jatkuvuuspisteellä x_0 tarkastellaan polynomeja $P_k(x) = \big(\varepsilon + \cos(x - x_0)\big)^k$, ja toimitaan aivan kuten yllä. Kompleksiarvoiselle funktion tapauksessa hajotetaan $f = u + iv$ reaali-ja imaginääriosiin. Koska kompleksikonjugaatille

$$\widehat{\overline{f}}\,(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(x)} e^{-inx} dx = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) e^{inx} dx} = \overline{\widehat{f}(-n)} = 0 \tag{2.7}$$

ja $u = (f + \overline{f})/2$, $v = (f - \overline{f})/2i$, saamme $\widehat{u}(n) = 0 = \widehat{v}(n)$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$. Ja reaaliarvoiset funktiot u ja v ovat oletuksen mukaan jatkuvia origossa, joten yo. antaa $f(0) = u(0) + iv(0) = 0$. Näin väite, ja sen mukana koko lause, on todistettu. $\square$

Lauseella 2.6 on monia seurauksia, niistä ensimmäinen:

SEURAUS 2.7. *Jos $f, g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ ovat jatkuvia, ja $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$ jokaisella $n \in \mathbb{Z}$, niin silloin $f(x) = g(x)$ jokaisessa pisteessä $x \in [-\pi, \pi]$.*

Siis ainakin jatkuville funktioille Fourier-kertoimet määräävät funktion !

II.3. Ensimmäisiä tuloksia Fourier-sarjan suppenemisesta. Fourier-sarjojen suppeneminen riippuu tietysti *Fourier-osasummien*

$$S_N f(x) := \sum_{-N}^{N} \widehat{f}(n) e^{inx} \tag{2.8}$$

käytöksestä; määritelmän mukaan Fourier sarja suppenee pisteessä x mikäli raja-arvo $\lim_{N\to\infty} S_N f(x)$ on olemassa. Erityisesti sarja suppenee kohti funktion arvoa $f(x)$ mikäli

$$S_N f(x) \to f(x), \qquad \text{kun } N \to \infty.$$

Keskeiset Fourier sarjojen menetelmät pyrkivätkin ymmärtämään operaattorin $f \mapsto S_N f$ ominaisuuksia. Tästä tulemme jatkossa näkemään monia eri esimerkkejä, mutta lähdetään nyt liikkeelle ensimmäisestä tapauksesta, joka takaa osasummien suppenemisen, nimittäin itseisesti suppenevista sarjoista.

LAUSE 2.8. *Olkoon $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ jatkuva. Oletamme, että*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| < \infty, \tag{2.9}$$

eli, että Fourier sarja suppenee itseisesti. Silloin Fourier sarja suppenee ja

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\, e^{inx} \qquad \textit{jokaisessa pisteessä } x \in [-\pi, \pi]. \tag{2.10}$$

Lisäksi, suppeneminen on tasaista välillä $[-\pi, \pi]$.

Huomaa, että emme olettaneet että f saa samat arvot välin päätepisteissä $\pm\pi$. Tämä kuitenkin seuraa ehdosta (2.9), sillä jokainen $S_N f \in C_\#(-\pi, \pi)$ ja suppeneminen (2.10):ssa on tasaista. Tai kääntäen, mikäli f on jatkuva välillä $[-\pi, \pi]$, mutta $f(-\pi) \neq f(\pi)$, silloin f:n Fourier sarja ei voi supeta itseisesti; vrt. Esimerkki 2.5.

Lauseen 2.8 todistus. Koska sarja $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\, e^{inx}$ suppenee itseisesti ja tasaisesti $[-\pi, \pi]$:llä (muista Weierstrassin kriteerio!), analyysin peruskurssit näyttävät, että sarjan summa

$$g(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\, e^{inx} = \lim_{N\to\infty} S_N f(x)$$

on tuolla välillä jatkuva funktio. Lisäksi jokaisella $k \in \mathbb{Z}$

$$\widehat{g}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-ikx}dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-ikx}dx = \widehat{f}(k);$$

tässä integroinnin ja summauksen järjestyksen saattoi vaihtaa tasaisen suppenemisen vuoksi (peruskurssit).

Siispä f ja $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ jatkuvia funktioita, joilla samat Fourier kertoimet. Seurauksen 2.7 mukaan silloin $f(x) = g(x)$ jokaisella $x \in [-\pi, \pi]$. Koska Fourier sarja suppeni tasaisesti kohti funktiota $g(x)$, lauseen viimeinenkin väite on silloin tullut todistetuksi. $\square$

Koska itseisesti suppenevat Fourier sarjat automaattisesti suppenevat kohti funktion arvoa $f(x)$, on luonnollista hakea kriteerejä jotka takaisivat ehdon (2.9). Tässä havaitaan:

Koska ehtoa (2.9) varten tarvitsemme selvästikin arvioita Fourier kertoimien suuruudesta, lähdetään liikkeelle perusarviosta

$$|\widehat{f}(n)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.11}$$

eli

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{f}(n)\right| \le \|f\|_{L^1(-\pi,\pi)}, \qquad \text{kun merkitään} \quad \|f\|_{L^1(-\pi,\pi)} := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx \tag{2.12}$$

Tätä yleistä ylärajaa voi hieman vielä parantaa nk. Riemann-Lebesguen lemman avulla, johon palataan myöhemmin.

Ehto (2.9) vaatii kuitenkin kertoimien $\widehat{f}(n)$ vahvempaa kontrollia, sopivilla f. Tällaisen löytämiseksi muistellaan Esimerkin 2.5 päättelyä. Erityisesti, siellä nähtiin että osittaisintegroinnilla voi Fourier kertoimia "pienentää". Oletetaan siksi, että $f \in C^1_{\#}(-\pi, \pi)$, ja lasketaan

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\Big|_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{-in}\, f(x) + \frac{1}{2\pi in}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\, f'(x)\, dx. \tag{2.13}$$

Sijoitustermi häviää periodisuuden nojalla, joten

$$\widehat{f'}(n) = in\,\widehat{f}(n), \qquad n \in \mathbb{Z}, \quad f \in C^1_{\#}(-\pi, \pi). \tag{2.14}$$

Identiteetti pätee myös kun $n = 0$, sillä $\widehat{(f')}\,(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}(f(\pi) - f(-\pi)) = 0$.

Huomautus reaalianalyysiä tunteville: Yhtälö (2.14) toimii hieman yleisemminkin , se pätee aina kun f on absoluuttisesti jatkuva (silloin $f' \in L^1$ ja osittaisintegrointi kaava on voimassa, vrt. Holopaisen muistiinpanot [H, Lause 3.78], tai Appendix A.1.3).

Yhdistämällä (2.11) ja (2.14) nähdään, että $|\widehat{f}(n)| \leq \frac{C}{1+|n|}$ kun $f \in C^1_\#(-\pi,\pi)$. Tai vielä paremmin, jos $f \in C^k_\#(-\pi,\pi)$ voimme käyttää yhtälöä (2.14) induktiivisesti k kertaa; siispä $\widehat{f}(n) = (in)^{-j}\,\widehat{f^{(j)}}\,(n)$ jokaisella $0 \leq j \leq k$ ja $n \neq 0$. Yhteenvetona saamme:

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{C}{(1+|n|)^k}, \qquad \text{kun } f \in C^k_\#(-\pi,\pi). \tag{2.15}$$

Palataan sitten takaisin itseisesti suppeneviin Fourier sarjoihin. Ylläoleva päättely antaa välittömästi seuraavan tuloksen

LAUSE 2.9. *Olkoon $f \in C^2_\#(-\pi,\pi)$. Silloin f:n Fourier sarja suppenee tasaisesti ja itseisesti kohti $f(x)$:ää;*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\,e^{inx} \qquad \textit{jokaisella } x \in [-\pi,\pi].$$

ESIMERKKI 2.10. *Harjoitustehtävissä 1 lasketaan, että funktion $f(x) = \pi - |x|$ Fourier-sarjan kertoimet ovat*

$$\widehat{f}(n) = \begin{cases} \pi/2 & \text{jos } n = 0 \\ \dfrac{2}{\pi n^2} & \text{jos } n \text{ on pariton,} \\ 0 & \text{jos } n \text{ on parillinen, } n \neq 0 \end{cases}$$

ja johdetaan tämän avulla kaava $1 + 3^{-2} + 5^{-2} + \ldots \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \;=\; \frac{\pi^2}{8}$. *Tästä päätellään helposti Eulerin kuuluisa kaava*

$$1^{-2} + 2^{-2} + 3^{-2} + \ldots \;=\; \frac{\pi^2}{6}.$$

ESIMERKKI 2.11. *Jos* $f(x) = x(\pi - x)$, *kun* $x \in [0, \pi]$, *laajennetaan* f *parittomaksi* 2π-*periodiseksi funktioksi. Silloin harjoitustehtävissä osoitetaan, että*

$$f(x) \sim \frac{8}{\pi} \sum_{k \geq 1,\, k \,\text{pariton}} \frac{\sin(kx)}{k^3}.$$

Erityisesti f*:n Fourier-sarja suppenee itseisesti ja, Lauseen 2.8 mukaan, sarjan arvo on* $f(x)$ *jokaisella* $x \in [-\pi, \pi]$.

Valitsemalla nyt esimerkiksi $x = \pi/2$ *saadaan*

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{8}{\pi} \sum_{\substack{k \geq 1, \\ k \,\text{pariton}}} \frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k^3} = \frac{8}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)^3}$$

Toisin sanoen, olemme (taaskin Fourier-analyysin avulla) osoittaneet, että

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}\ .$$

III. KONVOLUUTIOT JA DIRICHLET YTIMET

Fourier osasummien systemaattisempi tarkastelu vaatii hieman uudenlaista näkökulmaa. Voimme kirjoittaa

$$\begin{aligned} S_N f(x) \;&=\; \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n)\, e^{inx} \;=\; \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-iny} dy \right) e^{inx} \\ &=\; \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-y)} \right) dy. \end{aligned}$$

Siis

$$S_N f(x) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, D_N(x-y)\, dy, \tag{3.1}$$

missä

$$D_N(t) := \sum_{n=-N}^{N} e^{int} \qquad \text{on } (N\text{:s}) \textbf{ Dirichlet ydin}. \tag{3.2}$$

Fourier osasummien tutkiminen johtaa siten konvoluutio-operaattoreihin !!

MÄÄRITELMÄ 3.1. *Olkoot $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ lokaalisti integroituvia 2π-periodisia funktioita (tai jos $f, g \in L^1(-\pi, \pi)$, tarkastellaan niiden 2π-periodisia jatkoja). Funktioiden f ja g* **konvoluutio**, *$f * g$, määritellään kaavalla*

$$(f * g)(x) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, g(x-y)\, dy \tag{3.3}$$

HUOMAUTUS 3.2. *I. Holopaisen luentomonisteessa Reaalianalyysi I* [H, Lause 2.17] *osoitetaan, että yo. oletuksin $(f*g)(x)$ on hyvin määritelty melkein kaikilla $x \in [-\pi, \pi]$. Lisäksi $f * g \in L^1(-\pi, \pi)$ ja $\|f * g\|_{L^1} \le \|f\|_{L^1}\, \|g\|_{L^1}$.*

Muutamia konvoluution perusominaisuuksia tarvitsemme nyt ja jatkossa. Esimerkiksi jokaiselle 2π-periodiselle funktiolle on $\int_{-\pi+a}^{\pi+a} F(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} F(t)dt$ (MIKSI ?), ja siten

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(y)\, g(x-y)\, dy = -\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{-\pi} g(y)\, f(x-y)\, dy = (g * f)(x)$$

(missä keskimmäinen yhtäsuuruus tulee muuttujan vaihdosta $y' = x - y$).

Listataan konvoluution perusominaisuudet seuraavaan Lauseeseen (väitteiden todistukset: HT).

LAUSE 3.3. *Jos $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ lokaalisti integroituvia 2π-periodisia funktioita, silloin*

(i) $f * (g + h) = f * g + f * h$

(ii) $(\alpha f) * g = \alpha(f * g)$ *kaikilla* $\alpha \in \mathbb{C}$.

(iii) $f * g = g * f$

(iv) *$f * g$ on jatkuva, mikäli f* **tai** *g on jatkuva.*

III.1. Hyvät Ytimet. Lauseen 2.6 todistuksessa hyödynnettiin trigonometrisia polynomeja $P_k(x)$, ja erityisesti niiden ominaisuuksia:

(i) $P_k(0) \to \infty$, kun $k \to \infty$, sekä

(ii) $|P_k(x)| \to 0$, kun $\delta < |x| \le \pi$ ja $k \to \infty$.

Tarkastellaan seuraavaksi yleisiä integraaliytimiä, joilla vastaavanlaisia piirteitä. Voimme kuitenkin lieventää yo. ehdon (ii) sup-vaatimuksen integraaliehdoksi.

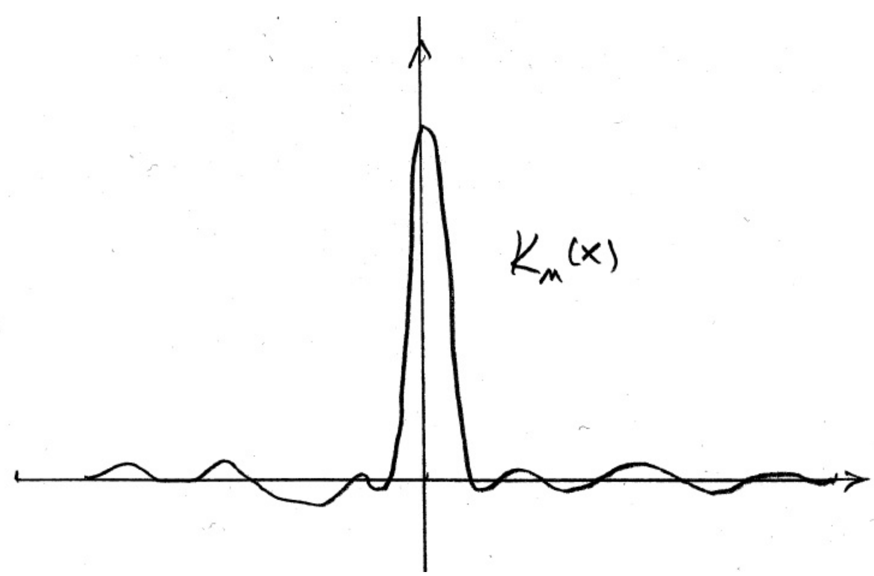
MÄÄRITELMÄ 3.4. *Perhe* $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ *2π-periodisia funktioita on* **hyvä perhe ytimiä**, *jos*

$$\forall\, n, \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\,dx \;=\; 1 \qquad \textit{(keskiarvo} \equiv 1\textit{)}, \tag{3.4}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(x)|\,dx \;\le C_0, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \textit{(Perhe tas. rajoitettu } L^1\textit{:ssä)} \quad \textit{ja} \tag{3.5}$$

(3.6) *kaikilla* $\delta > 0$,

$$\int_{\delta \le |x| \le \pi} |K_n(x)|\,dx \to 0, \qquad \textit{kun } n \to \infty.$$



(Käsitteen idea: K_n:ien "massa" keskittyy origoon, kun $n \to \infty$.)

Kurssi toisessa osassa syksymmällä, jatkuvan Fourier-muunnoksen yhteydessä, tullaan tarvitsemaan vastaavaa käsitettä $\mathbb{R}^d$:n funktioille. Otetaan tämä vastine kuitenkin jo nyt esille - jatkuvan tapauksen todistukset ovat hyvin samanlaisia kuin periodisen; niiden todistukset tullaan jättämään kotitehtäviksi. Jatkuvassa tapauksessa prototyyppi on perhe $K_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} K(\frac{x}{\varepsilon})$ missä $K \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\int K = 1$ ja $\varepsilon > 0$. Tämä mielessä asetetaan

MÄÄRITELMÄ 3.5. *Jos $K_\varepsilon : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ integroituvia funktioita, $\varepsilon > 0$, sanomme että $\{K_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ on* **hyvä perhe ytimiä**, *jos*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \qquad \int_{\mathbb{R}^d} K_\varepsilon(x)\, dx \;=\; 1 \qquad \textit{(keskiarvo} \equiv 1\textit{)}, \tag{3.7}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |K_\varepsilon(x)|\, dx \;\le C < \infty \qquad \forall\, \varepsilon > 0, \qquad \textit{(Perhe tas. rajoitettu } L^1\textit{:ssä)} \quad \textit{ja} \tag{3.8}$$

(3.9) *kaikilla $\delta > 0$,*

$$\int_{\delta \le |x|} |K_\varepsilon(x)|\, dx \to 0, \qquad \textit{kun } \varepsilon \to 0.$$

Palataan sitten periodiseen tapaukseen ja sen perusominaisuuksien selvittämiseen.

LAUSE 3.6. *Olkoon $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ hyvä perhe (2π-periodisia) ytimiä ja $1 \le p \le \infty$. Silloin*

$$\|K_n * g\|_{L^p(-\pi,\pi)} \;\le\; C_0\, \|g\|_{L^p(-\pi,\pi)}, \qquad g \in L^p(-\pi,\pi),$$

missä C_0 ehdon (3.5) *vakio ja* $\|g\|_{L^p(-\pi,\pi)} := \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^p dx\right)^{1/p}$.

Todistus. Olkoon ensin $p = \infty$. Silloin melkein kaikilla $x \in [-\pi,\pi]$,

$$|K_n * g(x)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(y)|\, |g(x-y)|\, dy \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(y)|\, \|g\|_{L^\infty}\, dy \le C_0\, \|g\|_{L^\infty}, \tag{3.10}$$

ja ottamalla tästä oleellinen supremum saamme

$$\|K_n * g\|_{L^\infty} := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in[-\pi,\pi]} |K_n * g(x)| \le C_0\, \|g\|_{L^\infty}\,.$$

Tarkastellaan sitten tapauksia $1 < p < \infty$. Olkoon $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Silloin melkein kaikilla $x \in [-\pi, \pi]$ on

$$|K_n * g(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(x-y)||K_n(y)|\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(x-y)||K_n(y)|^{1/p} |K_n(y)|^{1/q}\, dy$$

ja Hölderin epäyhtälöä , vrt. Appendix (A.1.2), käyttäen saadaan

$$|K_n * g(x)| \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(x-y)|^p |K_n(y)|\, dy \right)^{1/p} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_n(y)|\, dy \right)^{1/q} \tag{3.11}$$

Ottamalla tästä p's potenssi, integroimalla x:n suhteen ja käyttämällä ehtoa (3.5) sekä vaihtamalla integroinnin järjestys Fubinin lauseen nojalla, päädytään arvioon

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_n * g(x)|^p\, dx \leq C_0^{p/q} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(x-y)|^p\, dx \right) |K_n(y)|\, dy \tag{3.12}$$

ja missä epäyhtälön oikea puoli

$$= \; C_0^{p/q} \, \|g\|^p_{L^p(-\pi,\pi)} \, \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_n(y)|\, dy \; \leq \; C_0^{p/q} C_0 \|g\|^p_{L^p(-\pi,\pi)} = C_0^p \, \|g\|^p_{L^p(-\pi,\pi)}$$

Tämä todistaa väitteen kun $1 < p < \infty$. Jäljelle jäävä tapaus $p = 1$ seuraa kuten yllä arviossa (3.12) Fubinin lauseen avulla - Hölderiä ei nyt tarvita. Lauseen kaikki tapaukset on siis käyty läpi. $\square$

Tärkeää hyville $\{K_n\}$-perheille on että $K_n * f \to f$, useammassakin eri mielessä - juuri tätä ominaisuutta varten hyvät ytimet on rakennettu.

Tarkastellaan ensin pisteittäistä konvergenssia

Lause 3.7. *Jos $\{K_n\}$ hyvä perhe 2π-periodisia ytimiä ja jos $f \in L^\infty(-\pi, \pi)$, silloin*

$$\lim_{n \to \infty} (K_n * f)(x) = f(x)$$

jokaisessa pisteessä $x \in [-\pi, \pi]$ jossa f jatkuva [päätepisteissä $x = \pm\pi$: f:n periodisen laajennuksen tulee olla jatkuva].

Todistus. Jos $\varepsilon > 0$ ja 2π-periodinen f jatkuva pisteessä $x \in [-\pi, \pi]$, haetaan ensin $\delta > 0$ jolle

$$|f(x) - f(x-y)| < \varepsilon \qquad \text{kun } |y| < \delta. \tag{3.13}$$

Silloin

$$|(K_n * f)(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) K_n(y)\, dy - f(x) \right| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x-y) - f(x)] K_n(y)\, dy \right|$$

ehdon (3.4) perusteella. Viedään itseisarvot integraalin sisään, jolloin voidaan edelleen arvioida

$$|(K_n * f)(x) - f(x)| \le$$
$$\frac{1}{2\pi} \int_{|y|<\delta} |f(x-y) - f(x)|\, |K_n(y)|\, dy + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \le |y| \le \pi} |f(x-y) - f(x)|\, |K_n(y)|\, dy$$

Integraaleista ensimmäisessä $|f(x) - f(x-y)| < \varepsilon$, joten se $\le \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_n(y)|\, dy \le \varepsilon C_0$. Toisessa integraalissa $|f(x) - f(x-y)| \le 2\|f\|_{L^\infty}$, joten tämä tekijä

$$\le 2\|f\|_{L^\infty} \int_{\delta \le |y| \le \pi} |K_n(y)|\, dy \le \varepsilon C_0$$

kunhan indeksi n on riittävän suuri [ehto (3.6)]; silloin $|(K_n * f)(x) - f(x)| \le 2\varepsilon C_0$. Lause on näin todistettu. $\square$

Yo. todistuksesta huomataan, että $(K_n * f)(x) \to f(x)$ kaikilla $x \in [-\pi, \pi]$, mikäli (3.13) on voimassa tasaisesti välillä $[-\pi, \pi]$. Tästä saadaan

Seuraus 3.8. *Jokaiselle $f \in C_\#(-\pi, \pi)$ pätee:*

$$\sup_{x \in [-\pi, \pi]} |(K_n * f)(x) - f(x)| \to 0, \qquad \textit{kun } n \to \infty.$$

Entä konvergenssi funktioille $f \in L^p$? ! Tämän analysoimiseksi tarvitaan hieman reaalianalyysiä; erityisesti tarvitsemme seuraavan tuloksen kurssilta "Reaalianalyysi I", kts. [H, Lause 2.29] tai Appendix, Lause A.1.1.

Jokaisella $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p < \infty$, on

$$\lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x+h) - f(x)|^p dx = 0. \tag{3.14}$$

Toisin sanoen, lauseen mukaan L^p-funktiot ovat jatkuvia L^p*-normin mielessä*, kun $p < \infty$.

Sovellamme yo. tulosta kun $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ on 2π-periodinen ja $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p dx < \infty$. Periodisen tapaukseen palauttamista varten käytetään yo. lausetta funktioon $F = \chi_{[-2\pi,2\pi]} f$. Jos $|h|$ on riittävän pieni, niin

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x)|^p dx = \int_{-\pi}^{\pi} |F(x+h) - F(x)|^p dx \le \int_{-\infty}^{\infty} |F(x+h) - F(x)|^p dx \to 0$$

kun $|h| \to 0^+$. Yhteenvetona saamme

Lause 3.9. *Jos $f \in L^p(-\pi,\pi)$, silloin* $\quad \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x)|^p dx \to 0 \quad$ *kun* $\quad h \to 0$ *(ja f laajennettu 2π-periodiseksi).*

Näillä avuin pääsemme käsiksi L^p-konvergenssiin.

Lause 3.10. *Jos $f \in L^p(-\pi,\pi)$ ja $1 \le p < \infty$, sekä $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ hyvä perhe 2π-periodisia ytimiä, niin silloin*

$$\|K_n * f - f\|_{L^p(-\pi,\pi)} \;\to\; 0, \qquad \text{kun } n \to \infty.$$

Todistus. Oletetaan, että $1 < p < \infty$ ja $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Silloin melkein kaikilla $x \in [-\pi,\pi]$,

$$|(K_n * f)(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x-y) - f(x)] K_n(y)\, dy \right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y) - f(x)| |K_n(y)|^{1/p} |K_n(y)|^{1/q}\, dy$$

mistä päästään kuten (3.11):ssä Hölderin epäyhtälön kautta arvioon

$$|(K_n * f)(x) - f(x)|^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y) - f(x)|^p |K_n(y)|\, dy \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_n(y)|\, dy \right)^{p/q}$$

Integroimalla tämä ja käyttämällä Fubinin lausetta sekä ehtoa (3.5) saadaan

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |(K_n * f)(x) - f(x)|^p\, dx$$
$$\leq C_0^{p/q} [\frac{1}{2\pi} \int_{|y|<\delta} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y) - f(x)|^p\, dx\, |K_n(y)|\, dy +$$
$$\frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y) - f(x)|^p\, dx\, |K_n(y)|\, dy]$$

Lauseen 3.9 avulla integraali yli välin $|y| < \delta$ saadaan pienemmäksi kuin annettu ε, ja jälkimmäinen integraali yli välin $\delta \leq |y| \leq \pi$ on pienempi kuin

$$2^p \|f\|_{L^p} \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} |K_n(y)|\, dy \to 0$$

kun $n \to \infty$. Tapaus $p = 1$ on taas vastaava mutta helpompi, eikä vaadi Hölderöintiä (HT).
□

Lauseet 3.7 - 3.10 ovat erittäin hyödyllisiä monissa erilaisissa konvergenssitarkasteluissa - hyvän perheen ominaisuuksissa on abstrahoitu ne yleiset piirteet, jotka tekevät konvergenssin osoittamisesta helppoa !

Entä Dirichlet ytimet (3.2), toteuttavatko ne hyvien ytimien ehdot ? ! Lähdetään liikkeelle vaatimuksista ensimmäisestä, joka on helppo,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\, dt = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\, dt = 1, \qquad \forall\, N \in \mathbb{N}.$$

Sen sijaan Dirichlet ytimien L^1-normeja on hankalampi arvioida. Muokataan siksi ytimiä helpommin käsiteltävään muotoon:

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = e^{-iNx}(1 + e^{ix} + \cdots e^{i2Nx}) = e^{-iNx} \cdot \frac{1 - e^{i(2N+1)x}}{1 - e^{ix}}$$

geometrisen sarjan osasummana. Siispä

$$D_N(x) = \frac{e^{i(N+1)x} - e^{-iNx}}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{i(N+1/2)x} - e^{-i(N+1/2)x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}}$$

Manipulaatiomme osoittaa, että

$$D_N(x) = \frac{\sin\big((N + \frac{1}{2})x\big)}{\sin\big(\frac{x}{2}\big)}, \qquad N \in \mathbb{N}. \tag{3.15}$$

Tästä esityksestä integraaliarvioita on huomattavasti helpompi tehdä. Nimittäin, $|\sin\big(\frac{x}{2}\big)| \leq |\frac{x}{2}|$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, ja siten

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)|\, dx \geq 2\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin\big((N + \frac{1}{2})x\big)|}{|x|}\, dx = 4\int_{0}^{\pi} \frac{|\sin\big((N + \frac{1}{2})x\big)|}{x}\, dx$$

Muuttujan vaihdolla $t = (N + \frac{1}{2})x$ nähdään siis että

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)|\, dx > 4\int_{0}^{(N+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}\, dt \geq \sum_{k=1}^{N} \frac{4}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(t)|\, dt = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$$

sillä $\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(t)|\, dt = 2$ jokaisella $k \in \mathbb{N}$ (MIKSI ?).

Toisaalta, $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \geq \log N$. Olemme siis todistaneet seuraavan tuloksen

Lause 3.11. *Dirichlet ytimille pätee L^1-arvio*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)|\, dx \ > \ \frac{4}{\pi^2} \log N \ \to \infty, \qquad \textit{kun } N \to \infty.$$

Siis Dirichlet ytimet $\{D_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ *eivät* muodosta hyvää perhettä ytimiä ! Tämän seurauksena Fourier sarjojen täydellinen ymmärtäminen on vaikeaa. Itse asiassa, näytämme myöhemmin että on olemassa *jatkuvia* funktioita, joiden Fourier sarja hajaantuu joissakin pisteissä x. Toisaalta Carleson todisti v. 1966, että jatkuvan funktion Fourier sarja suppenee melkein kaikkialla (Lebesguen mitan mielessä).

Ylläolevasta huolimatta hyviä perheitä ytimiä voidaan hyödyntää Fourier sarjojen teoriassa, kuten seuraavassa osaluvussa näemme.

III.2. Fejerin ydin. Parannetaan Dirichlet ytimiä seuraavalla konstilla. Muunnetaan identiteetti (3.15) ensin seuraavaan muotoon

$$(e^{ix/2} - e^{-ix/2})D_k(x) = e^{ix/2}e^{ikx} - e^{-ix/2}e^{-ikx}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Summaamalla tämä identiteetti yli indeksien $k = 0, 1, \ldots, N-1$, pienellä manipulaatiolla saadaan

$$\sum_{k=0}^{N-1} D_k(x) = \left(\frac{\sin\left(\frac{N}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right)^2 \qquad \text{vrt. (HT 2)} \tag{3.16}$$

Merkittävää tässä on, että saatu uusi konvoluutioydin on ≥ 0 kaikkialla. Niinpä saammekin rakennettua niistä perheen hyviä ytimiä [huomaa, että jos ytimet m.k. positiivisia, niin (3.4) implikoi (3.5):n]

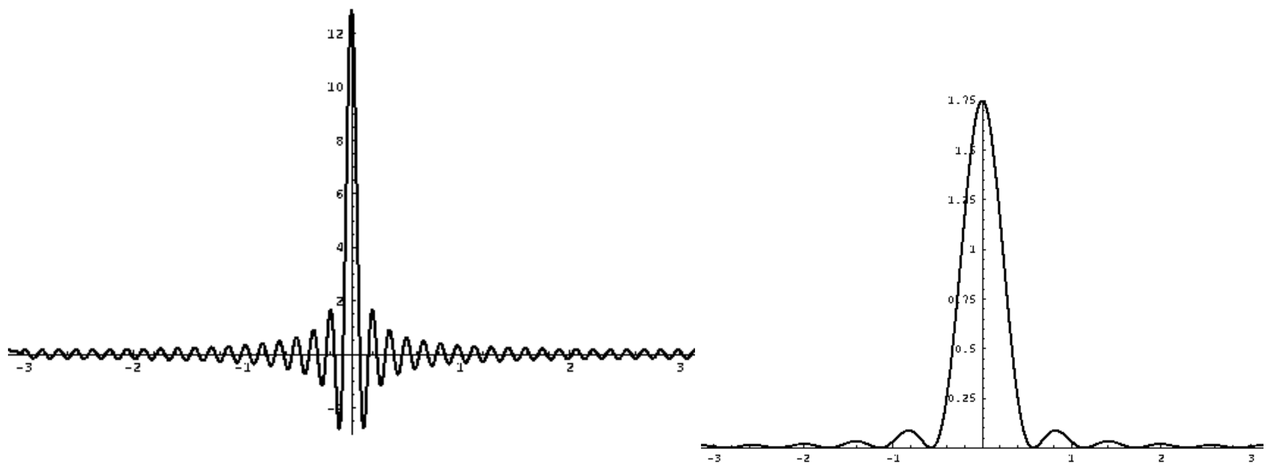
MÄÄRITELMÄ 3.12. *Fejerin ytimet F_N määritellään kaavalla*

$$F_N(x) := \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} D_k(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin\left(\frac{N}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right)^2, \qquad N \in \mathbb{N}.$$

Eli Fejerin ydin on N:n ensimmäisen Dirichlet ytimen keskiarvo; keskiarvo on syytä ottaa, jotta hyvien ytimien ehto (3.4) säilyy,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N \, dx = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_k \, dx = 1, \qquad N \in \mathbb{N}. \tag{3.17}$$

Koska $F_N \geq 0$, vaatimus (3.5) on siis triviaalisti voimassa, ja siten hyvän perheen ominaisuuksista riittää todistaa ehto (3.6).



Vasemmalla Dirichlet'n ydin, oikealla Fejerin ydin

LAUSE 3.13. *Fejerin ytimet* $\{F_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ *muodostavat perheen hyviä ytimiä, s.o. ehdot* (3.4) - (3.6) *ovat perheelle voimassa.*

Todistus. Ehtoa (3.6) varten, jos $\delta > 0$ ja $\delta < |x| \le \pi$, niin $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \ge C_\delta = \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$ ja siten

$$|F_N(x)| \le \frac{1}{N}\,\frac{1}{C_\delta} \to 0 \qquad \text{kun } N \to \infty,$$

ja tämä todistaa ehdon (3.6) Fejer-ytimien tapauksessa. □

Fejerin ytimillä on muitakin hyödyllisiä esitysmuotoja, esimerkiksi pätee (HT 3)

$$F_N(x) = \sum_{k=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) e^{ikx} \tag{3.18}$$

Fejerin ytimen määritelmästä ja (3.1):stä nähdään

$$(F_N * f)(x) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S_k f(x) = \frac{S_0 f(x) + S_1 f(x) + \cdots + S_{N-1} f(x)}{N}$$

eli $F_N * f$ on N:n ensimmäisen Fourier osasumman keskiarvo !

Yleisestikin, kun mietitään sarjojen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ suppenemista, sanotaan että sarja *Cesaro-summautuu* tai "suppenee Cesaro-mielessä", jos osasummien $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ keskiarvolla

$$\sigma_n := \frac{s_0 + s_1 + s_2 + \cdots + s_{n-1}}{n}$$

on raja-arvo, eli

$$\exists \lim_{n\to\infty} \sigma_n = a \in \mathbb{C}.$$

Selvästi (MIKSI? = HT)

$$\sum_n a_n \quad \text{suppenee} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_n a_n \quad \text{Cesaro-summautuu}$$

mutta käänteinen implikaatio ei ole totta; Cesaro-summautuminen on heikompi ehto.

Fejerin ytimien kautta voidaan tarkastella Fourier sarjojen Cesaro-summautumista. Merkitään siksi

$$\sigma_N f(x) := (F_N * f)(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_k f(x). \tag{3.19}$$

Käyttäen Lauseita 3.7, 3.8 ja 3.13 huomataan, että Fourier sarjat Cesaro-summautuvat funktioiden jatkuvuuspisteissä:

LAUSE 3.14. *Jos $f \in L^\infty[-\pi,\pi]$ ja f jatkuva pisteessä $x \in (-\pi,\pi)$ niin*

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_k f(x) \to f(x), \qquad \textit{kun } N \to \infty.$$

Edelleen, jos $f \in C_\#(-\pi,\pi)$, silloin

$$\|\sigma_N f - f\|_\infty \to 0, \qquad \textit{kun } N \to \infty.$$

Vastaavasti saadaan Cesaro-summien L^p-konvergenssi.

LAUSE 3.15. *Jos $f \in L^p(-\pi,\pi)$ ja $1 \le p < \infty$, niin silloin*

$$\|\sigma_N f - f\|_{L^p(-\pi,\pi)} \to 0, \qquad \textit{kun } N \to \infty.$$

Jatkuva funktio g on trigonometrinen polynomi jos ja vain jos $\widehat{g}(n) \neq 0$ korkeintaan äärellisen monella $n \in \mathbb{Z}$. Fejerin ytimet F_N ovat tietysti trigonometrisia polynomeja, ja koska (HT 2)

$$\widehat{f * g}\,(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n), \qquad f, g \in L^1(-\pi, \pi), \tag{3.20}$$

näemme että $\sigma_N f = F_N * f$ on trigonometrinen polynomi, kun $f \in L^1(-\pi, \pi)$. Siispä Lauseiden 3.14 ja 3.15 mukaan trigonometriset polynomit ovat *tiheässä* avaruuksissa $C_\#(-\pi, \pi)$ ja $L^p(-\pi, \pi)$, $1 \leq p < \infty$.

Tulemme jatkossa näkemään Cesaro summien $\sigma_N f(x)$ muitakin sovelluksia. Esimerkiksi (HT 3), jos $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ jatkuva, kullakin x joko f:n Fourier sarja suppenee kohti arvoa $f(x)$ tai sitten osasummat $S_N f(x)$ oskilloivat, so. osasummat eivät voi konvergoida kohti "väärää" arvoa.

Samoin Fourier-sarjojen yksikäsitteisyys seuraa Fejerin ytimien ominaisuuksista.

Lause 3.16. *Jos* $f, g \in L^1(-\pi, \pi)$ *ja*

$$\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n) \qquad \textit{jokaisella } n \in \mathbb{Z},$$

silloin $f(x) = g(x)$ *melkein kaikilla* $x \in [-\pi, \pi]$.

Todistus. Kaavojen (3.18) ja (3.20) mukaan $\sigma_N f(x) = \sum_{k=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) \widehat{f}(k)\, e^{ikx}$. Siispä, jos $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$ jokaisella $n \in \mathbb{Z}$ niin $\sigma_N f(x) = \sigma_N g(x)$ jokaisella $x \in [-\pi, \pi]$. Silloin Lauseesta 3.15 ja kolmioepäyhtälöstä (eli Minkowskin epäyhtälöstä (A.1.1)) seuraa, että $\|f - g\|_{L^1} = 0$, eli että $f = g$ m.k. $x \in [-\pi, \pi]$. $\square$

Neljäntenä tärkeänä sovelluksena saadaan

Lause 3.17. (Riemann-Lebesguen lemma) *Jokaisella* $f \in L^1(-\pi, \pi)$,

$$\widehat{f}(n) \to 0, \qquad \textit{kun } |n| \to \infty.$$

Todistus. Lauseen 3.15 avulla löydämme trigonometrisen polynomin $P(x) = \sum_{n=-M}^{M} a_k e^{ikx}$, jolle

$$\|f - P\|_{L^1(-\pi,\pi)} < \varepsilon.$$

Kun $|n| > M = \deg(P)$, perusarvio (2.12) antaa $|\widehat{f}\,(n)| = |\,\widehat{(f-P)}\,(n)| \leq \|f-P\|_{L^1(-\pi,\pi)} < \varepsilon$. Väite on näin todistettu. □

IV. Fourier sarjojen pisteittäinen konvergenssi

IV.1. Suppenemisehtoja. Lauseessa 2.9 näimme, että riittävän sileille (eli $C^2_{\#}$-) funktioille Fourier sarja suppenee pisteittäin (ja jopa tasaisesti) kohti funktion arvoa $f(x)$. Mitä tapahtuu, jos luovumme sileys-oletuksista? Voisiko esim. jatkuvan funktion Fourier sarja hajaantua ? Tai löytyisikö parempia tai yleisempiä ehtoja, jotka takaisivat Fourier sarjan suppenemisen ?

Esimerkki 4.1. *Olkoon $f(x) = \alpha$, kun $0 \leq x \leq \pi$ ja $f(x) = \beta$, kun $-\pi < x < 0$. Jos $\alpha \neq \beta$, funktio f on epäjatkuva origossa. Mutta suppeneeko vai hajaantuuko sen Fourier sarja kun $x = 0$?*

Asian selvittämiseksi huomataan, että $f(x) = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2} g(x)$, missä $g(x) = +1$, kun $0 \leq x \leq \pi$ ja $g(x) = -1$, kun $-\pi < x < 0$. Koska g on pariton funktio, (HT 1) $\Rightarrow g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx)$. Erityisesti, funktion f Fourier osasumma

$$S_N f(x) = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2} \sum_{n=1}^{N} c_n \sin(nx)$$

(samat kertoimet c_n !). Näemme, että $S_N f(0) = \frac{\alpha+\beta}{2}$ jokaisella N; siis Fourier sarja suppenee pisteessä $x = 0$ kohti arvoa

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(0+t) + f(0-t)}{2}. \tag{4.1}$$

Yleisestikin, jos funktion f epäjatkuvuus on "suhteellisen siistiä", Fourier sarja suppenee kohti arvoa (4.1).

Lemma 4.2. *Oletamme, että $f \in L^1(-\pi,\pi)$. Jos jollekin $a \in \mathbb{C}$ on*

$$\int_0^\pi \left| \frac{f(x)+f(-x)}{2} - a \right| \frac{dx}{x} \;<\; \infty, \tag{4.2}$$

niin silloin f:n Fourier sarja suppenee pisteessä $x = 0$, ja

$$\lim_{N\to\infty} S_N f(0) = a$$

Todistus. Voimme olettaa, että $a = 0$. Nimittäin muutoin voidaan tarkastella funktiota $F(x) = f(x) - a$; silloin

$$\int_0^\pi \left| \frac{F(x)+F(-x)}{2} \right| \frac{dx}{x} \;<\; \infty$$

ja $S_N F(x) = S_N f(x) - a$.

Tällä oletuksella, identiteetit (3.1) ja (3.15) näyttävät, että

$$S_N f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(0-x)\, f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \frac{\sin\left((N+\frac{1}{2})x \right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\, dx.$$

Käytetään seuraavaksi sinin yhteenlaskukaavaa, $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$ [Eulerin kaavasta (1.2) tämä on helppo palauttaa mieleen], ja saadaan

$$S_N f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \cos(Nx)\, dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\, \sin(Nx)\, dx. \tag{4.3}$$

Molemmat integraalit suppenevat itseisesti (MIKSI ?). Niistä ensimmäinen konvergoi kohti nollaa Riemann-Lebesguen Lemman 3.17 mukaan,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \cos(Nx)\, dx = 0,$$

pelkällä oletuksella $f \in L^1(-\pi,\pi)$. Jälkimmäinen integraalitermi kaavassa (4.3) taas voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x)+f(-x)}{2}\, \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\, \sin(Nx)\, dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x)-f(-x)}{2}\, \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\, \sin(Nx)\, dx$$

Viimeisessä integaalissa integroitava funktio on pariton, ja siksi sen integraali häviää. Jäljelle jää siis arvioitavaksi

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,\sin(Nx)\,dx, \qquad \text{missä } \; g(x) \;=\; \frac{f(x)+f(-x)}{2}\;\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Nyt voimme lopulta käyttää oletusta (4.2). Sen mukaan

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|\,dx \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{f(x)+f(-x)}{2}\right| \frac{dx}{x} < \infty,$$

eli $g \in L^1(-\pi,\pi)$. Riemann-Lebesguen lause puree siis funktioon $g(x)$, ja saadaan

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x)+f(-x)}{2}\;\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\,\sin(Nx)\,dx \to 0, \qquad \text{kun } \; N\to\infty.$$

Olemme näin osoittaneet, että $S_N f(0) \to 0$, kun $N \to \infty$. $\square$

Lemma avulla pääsemme käsiksi pisteittäisen suppenemisen keskeiseen tulokseen, nk. *Dini-ehtoon*, joka on käyttökelpoinen ja joustava kriteeeri, joka takaa Fourier sarjan suppenemisen annetussa pisteessä $x_0 \in [-\pi,\pi]$.

Lause 4.3. (Dini-testi Fourier sarjan suppenemiselle) *Olkoon* $x_0 \in [-\pi,\pi]$ *ja* $f \in L^1(-\pi,\pi)$ 2π*-periodinen funktio, jolle*

$$\int_0^{\pi} \left|\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2} - f(x_0)\right| \frac{dt}{t} \;<\; \infty. \tag{4.4}$$

Silloin f*:n Fourier sarja suppenee pisteessä* x_0*, ja*

$$f(x_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\,e^{inx_0}\;.$$

Todistus. Olkoon $F(x) = f(x+x_0)$, jolloin muuttujan vaihdolla $\widehat{F}(n) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+x_0)e^{-inx}dx = \widehat{f}(n)e^{inx_0}$. Edelleen, (4.4) on yhtäpitävää ehdon

$$\int_0^{\pi} \left|\frac{F(x)+F(-x)}{2} - F(0)\right| \frac{dx}{x} \;<\; \infty$$

kanssa. Toisin sanoen, Lemman 4.2 nojalla

$$f(x_0) = F(0) \ \leftarrow\ S_N F(0) = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n) e^{inx_0} = S_N f(x_0)$$

kun $N \to \infty$. $\square$

Dini-testillä saadaan lukuisia eri suppenemistuloksia; kootaan niistä tähän muutamia. Jos funktiolla f ei ole hyppyä pisteessä x_0, testi on mukavin muodossa

Seuraus 4.4. *Jos $f \in L^1(-\pi, \pi)$ ja $\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} \right| dt < \infty$, niin silloin $S_N f(x_0) \to f(x_0)$ kun $N \to \infty$.*

Tyypillisiä funktioita, joille Seurauksen 4.4 ehto toimii, ovat esimerkiksi Hölder-jatkuvat funktiot. Funktiota $f \in C_\#(-\pi, \pi)$ sanotaan *α-Hölder jatkuvaksi*, $0 < \alpha \leq 1$, ja merkitään $f \in Lip_\alpha$, jos jollakin vakiolla $M < \infty$ on

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha, \qquad \forall\, x,\, y \in [-\pi, \pi]. \tag{4.5}$$

Seuraus 4.5. *Jos $f \in Lip_\alpha$ jollakin $0 < \alpha \leq 1$, ja f on 2π-periodinen, niin silloin f:n Fourier sarja suppenee jokaisessa pisteessä $x \in [-\pi, \pi]$.*

Todistus. $\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} \right| dt \ \leq\ M \int_{-\pi}^{\pi} |t|^{\alpha-1}\, dt < \infty$. $\square$

Voidaan myös tarkastella funktioita $f(x)$, joilla jatkuvuusmoduli $w : [0, \infty) \to [0, \infty)$; silloin oletamme w:sta, että se on kasvava ja että $w(t) \to 0$ kun $t \to 0$. Yleistämme ehdon (4.5) muotoon

$$|f(x) - f(y)| \leq w(|x - y|), \qquad \forall\, x,\, y \in [-\pi, \pi],$$

ja näemme Dini-testistä, että f:n Fourier sarja suppenee joka pisteessä mikäli

$$\int_0 \frac{w(t)}{t}\, dt < \infty.$$

Toinen tyypillinen Seurauksen 4.4 sovelluskohde ovat differentioituvat funktiot.

SEURAUS 4.6. *Jos* $f \in L^1(-\pi, \pi)$ *on derivoituva pisteessä* x_0*, silloin* f*:n Fourier sarja suppenee* x_0*:ssa.*

Dini-testin kautta pääsemme käsiksi myös Fourier sarjojen lokaaleihin ominaisuuksiin. Esimerkiksi Fourier sarjan suppeneminen tai hajaantuminen pisteessä x_0 riippuu vain funktion ominaisuuksista x_0:n ympäristössä.

SEURAUS 4.7. *Olkoon* $x_0 \in [-\pi, \pi]$ *ja* $f, g \in L^1(-\pi, \pi)$ *ovat sellaisia funktioita, että* $f(x) \equiv g(x)$ *jossakin* x_0*:n ympäristössä. Tällöin*

$$\lim_{N\to\infty} |\, S_N f(x_0) - S_N g(x_0)\,| \;=\; 0.$$

Todistus. Koska $\int_{-\pi}^{\pi} |(f-g)(x_0+t)|\,\frac{dt}{t} \;<\; \infty$, Seuraus 4.4 todistaa väitteen. $\square$

Toisin sanoen: jos f ja g saavat samat arvot jossakin x_0:n ympäristössä, niin silloin joko molempien Fourier sarja hajaantuu x_0:ssa, tai sitten molempien sarja suppenee tuossa pisteessä.

Viimeisenä esimerkkinä Dini-ehdon käytöstä tarkastellaan paloittain sileitä funktioita. Sanomme että 2π-periodinen funktio f on *paloittain* C^1, jos löytyy pisteet $-\pi = a_1 < a_2 < \cdots < a_j < \cdots < a_k = \pi$ niin että jokaisella j, $\quad f|_{(a_j, a_{j+1})} \in C^1(a_j, a_{j+1})$ sekä toispuoleiset raja-arvot

$$f(a_j+) := \lim_{t\to 0^+} f(a_j+t) \quad \text{ ja } \quad f'(a_j+) := \lim_{t\to 0^+} f'(a_j+t)$$

ovat olemassa, samoin $f(a_j-) := \lim_{t\to 0^+} f(a_j - t)$ ja $f'(a_j-) := \lim_{t\to 0^+} f'(a_j-t)$. Mutta voi siis olla

$$f(x+) \neq f(x-), \qquad \text{jos } x = a_j \quad \text{jollakin } j,$$

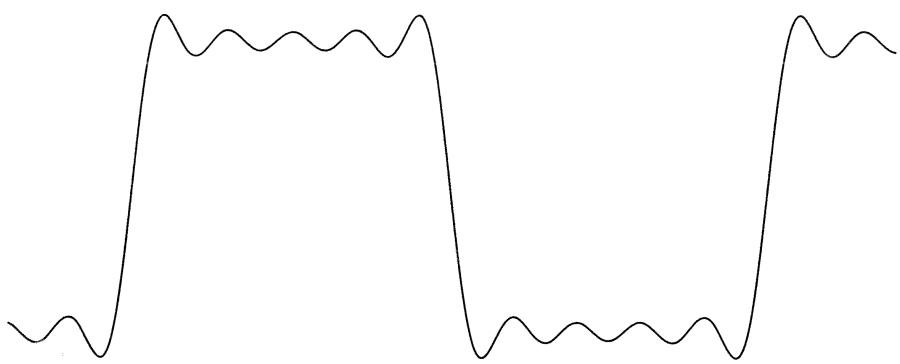
vrt. esim. kuva sivulla 7.

SEURAUS 4.8. *Jos 2π-periodinen funktio f on paloittain C^1, silloin f:n Fourier sarja suppenee joka pisteessä $x \in [-\pi, \pi]$, ja*

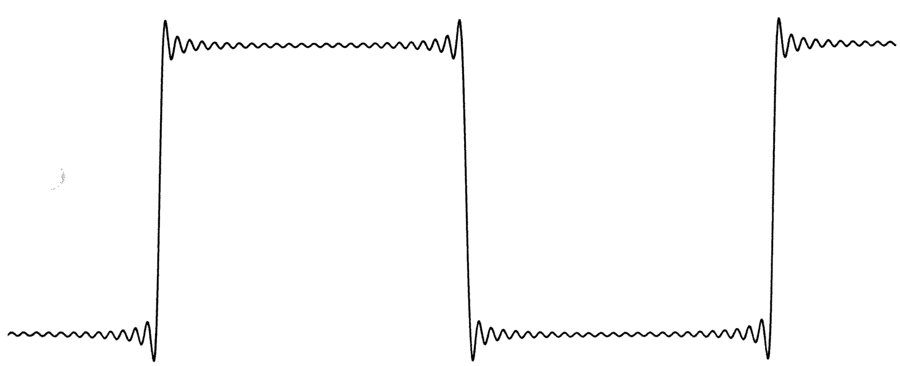
$$\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \qquad \textit{jokaisella } x \in [-\pi, \pi].$$

Todistus. (Harjoitukset) $\square$

Lopuksi, seuraavassa kuvassa 2π-periodisen porrasfunktion, $f(x) = 1$, kun $2k\pi < x < (2k+1)\pi$ ja $f(x) = -1$ kun $(2k-1)\pi < x < 2k\pi$, Fourier osasummien kuvaajia.



$S_N f(x)$, $N = 5$



$S_N f(x)$, $N = 25$

Edellisen sivun kuvissa huomaa selvästi kuuluisan Gibbsin ilmiön: Porrasfunktion epäjatkuvuuskohdissa Fourier sarja ei suppene tasaisesti, vaan tekee niissä hypyn, joka säilyy mutta siirtyy yhä lähemmäs epäjatkuvuuskohtaa, kun N kasvaa (HT 4). Rajalla $N \to \infty$ sarjan hyppy on n. 9% funktion epäjatkuvuuden suuruudesta.

IV.2. Jatkuvat funktiot ja hajaantuvat Fourier sarjat. Osoitamme luvun lopuksi, että huolimatta yo. monista konvergenssituloksista, on *jatkuvia* funktioita, joiden Fourier sarja hajaantuu joissakin pisteissä $x \in [-\pi, \pi]$.

Tavoitteenamme on *konstruoida* jatkuva funktio $f \in C_{\#}(-\pi, \pi)$ jolle

$$(4.6) \qquad S_{N_k} f(0) = (D_{N_k} * f)(0) \ \to \ \infty, \qquad \text{sopivalla osajonolla } N_k \to \infty.$$

Konstruktiota varten tarvitsemme useamman osatuloksen. Lähdetään liikkeelle Lauseesta 3.11, jonka mukaan Dirichlet ytimen integraaleille pätee

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)| \, dx \ > \ \frac{4}{\pi^2} \log N \ \to \infty, \qquad \text{kun } N \to \infty.$$

Tästä saamme

Lemma 4.9. *Jokaisella $N \in \mathbb{N}$ löytyy funktio $g = g_N \in L^\infty(-\pi, \pi)$, jolle*

$$\|g\|_\infty \ = \ 1 \qquad ja \qquad |S_N g(0)| \ \geq \ \frac{4}{\pi^2} \log N.$$

Todistus. Koska $D_N(x)$ on parillinen funktio,

$$S_N g(0) = (D_N * g)(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(0 - x) g(x) \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) g(x) \, dx.$$

Valitaan siis $g(x) = \operatorname{sgn}(D_N(x))$, eli $g(x) = 1$ kun $D_N(x) > 0$ ja $g(x) = -1$ kun $D_N(x) < 0$. Tällä on molemmat vaaditut ominaisuudet. $\square$

Seuraavaksi haluamme korvata yo. Lemman funktion $g = g_N$ trigonometrisella polynomilla P, niin että $S_N P(0)$ säilyy suurena.

LEMMA 4.10. *Jos $g \in L^1(-\pi,\pi)$ ja $N \in \mathbb{N}$, silloin*

$$\|S_N\big(\sigma_{N^2} g\big) - S_N g\|_\infty \;\le\; 2\|g\|_{L^1(-\pi,\pi)}.$$

Todistus. Kaavan (3.18) (tai HT 3/tehtävän 3) mukaan

$$(\sigma_{N^2} g)(x) = \sum_{-N^2+1}^{N^2-1} \left(1 - \frac{|k|}{N^2}\right) \widehat{g}(k)\, e^{ikx} \tag{4.7}$$

Näin ollen

$$S_N\big(\sigma_{N^2} g\big)(x) \;=\; \sum_{-N}^{N} \left(1 - \frac{|k|}{N^2}\right) \widehat{g}(k)\, e^{ikx} \;=\; \sum_{-N}^{N} \widehat{g}(k)\, e^{ikx} \;-\; \frac{1}{N^2} \sum_{-N}^{N} |k|\, \widehat{g}(k)\, e^{ikx}$$

Tässä $\sum_{-N}^{N} \widehat{g}(k)\, e^{ikx} \;=\; S_N g(x)$, kun taas viimeinen termi $\le$

$$\frac{1}{N^2} \sum_{-N}^{N} |k|\, |\widehat{g}(k)| \;\le\; \frac{2}{N^2} \frac{N(N+1)}{2} \|g\|_{L^1(-\pi,\pi)} \;\le\; 2\|g\|_{L^1(-\pi,\pi)}$$

perusarvion (2.12) nojalla. $\square$

Löydämme siis trigonometriset polynomit $P = P_N := \sigma_{N^2}(g_N)$, $N \in \mathbb{N}$, joilla seuraavat ominaisuudet:

- $\|P\|_\infty \le 1$ jokaisella $N \in \mathbb{N}$ (sillä $\|P\|_\infty \le \|g_N\|_\infty \le 1$, vrt. Lause 3.6)
- $\deg P \le N^2 - 1$ (vrt. (4.7))
- $|S_N P(0)| \;\ge\; \frac{4}{\pi^2} \log N - 2$ (Lemmat 4.9 ja 4.10)

Haluamme lisäksi varmistaa, että P:n Fourier-kertoimet $\widehat{P}(k) = 0$ kun $1 \le |k|$ pieni. Tähän auttaa

HUOMAUTUS 4.11. *Jos $P(x) = \sum_{-n}^{n} a_k e^{ikx}$ on trigonometrinen polynomi astetta n, silloin*

$$h(x) := P(Mx) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{iMkx}$$

on trigonometrinen polynomi, jonka aste $= Mn$, *jolle* $\widehat{h}(0) = \widehat{P}(0)$ (Miksi ?) *ja jolle*

$$\widehat{h}(j) \; = \; 0, \qquad \textit{kun} \;\; 1 \le |j| \le M-1.$$

Lisäksi kaikilla N,

$$(S_N P)(0) = \sum_{k=-N}^{N} a_k = (S_{N\,M} h)(0).$$

Näillä eväillä tarkastelemme Lemman 4.9 funktiota $g = g_N$ ja asetamme

$$\phi_N(x) \; := \; \big(\sigma_{N^2}(g_N)\big)(N\,x). \tag{4.8}$$

Listataan sitten trigonometristen polynomien ϕ_N ominaisuudet. Kullakin $N \in \mathbb{N}$,

$$|\widehat{\phi_N}(0)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi_N \, dx\right| \le \|\phi_N\|_\infty \le 1, \tag{4.9}$$

$$(S_{N^2}\phi_N)(0) \; \ge \; \frac{4}{\pi^2} \log N - 2 \qquad\qquad \text{ja} \tag{4.10}$$

$$\widehat{\phi_N}(j) \; = \; 0, \qquad \text{kun } 1 \le |j| \le N-1 \;\text{ tai }\; |j| \ge N^3. \tag{4.11}$$

Näin saamme konstruoitua perheen trigonometrisia polynomeja, joiden Fourier kertoimien kantajat ($\mathbb{Z}$:n osajoukkona) ovat erilliset, lukuunottamatta vakiotermiä $n = 0$; lisäksi kaavan (4.10) nojalla vastaavat Fourier osasummat kasvavat suuriksi kertoimien kantajan "keskivaiheilla": Asetetaan

$$N_k \; = \; 2^{3^k}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

ja määritellään funktio f summana

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\, \phi_{N_k}(x), \qquad x \in [-\pi, \pi]. \tag{4.12}$$

Lause 4.12. (du Bois-Reymond) *On olemassa jatkuvia funktioita $f \in C_{\#}(-\pi,\pi)$, joiden Fourier sarja hajaantuu pisteessä $x = 0$,*

$$S_{N_k^2} f(0) \to \infty, \qquad kun\ k \to \infty.$$

Todistus. Väitämme, että summan (4.12) funktio toteuttaa Lauseen vaatimukset. Ensiksi, koska ϕ_N:t ovat tasaisesti rajoitettuja (4.9), sarja (4.12) suppenee tasaisesti, ja siten $f(x)$ on ainakin jatkuva välillä $[-\pi,\pi]$.

Funktion f Fourier kertoimien määräämiseksi huomataan, että tasaisen suppenemisen vuoksi

$$S_n f(0) \;=\; (D_n * f)(0) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\, S_n\big(\phi_{N_k}\big)(0).$$

Edelleen, ehdon (4.11) avulla voimme identifioida Fourier osasummat $S_n(\phi_{N_k})(0)$, kun n on "pieni" ja kun n "suuri"; toisin sanoen,

$$\text{koska } \deg \phi_{N_k} \;<\; N_k^3 = N_{k+1} \;\;\Rightarrow\;\; S_n\big(\phi_{N_k}\big)(x) = \phi_{N_k}(x) \quad \text{kun} \quad n \ge N_{k+1};$$

$$\text{vastaavasti,} \qquad S_n\big(\phi_{N_k}\big)(x) \equiv \widehat{\phi_{N_k}}(0), \quad \text{kun} \quad n < N_k.$$

Vertaamalla tätä kaavaan (4.9) huomataan, että arvio $|S_n\big(\phi_{N_k}\big)(x)| \le \|\phi_{N_k}\|_\infty$ pätee molemmissa tapauksissa, siis kun $n \ge N_{k+1}$ ja kun $n < N_k$.

Tästä voimme päätellä, että kun $n \in [N_j, N_{j+1})$,

$$|S_n f(0)| \;\ge\; \frac{1}{j^2}\,|S_n \phi_{N_j}(0)| \;-\; \sum_{k \ne j} \frac{1}{k^2}\,\|\phi_{N_k}\|_\infty \;\;\ge\;\; \frac{1}{j^2}\,|S_n \phi_{N_j}(0)| \;-\; C,$$

missä $C = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$ vakio.

Valitaan nyt $n = N_j^2 \in [N_j, N_{j+1})$, missä muistetaan että $N_j = 2^{3^j}$. Silloin ehdon (4.10) nojalla

$$|S_n f(0)| \;\ge\; j^{-2}\,|S_n \phi_{N_j}(0)| \;-\; C \;\ge\; \frac{4}{j^2\pi^2}\,\log N_j^2 \;-2 \;-\; C$$

$$= \;\frac{8}{j^2\pi^2}\,3^j \log 2 \;-2 \;-\; C \to \;\infty, \quad \text{kun} \;\; j \to \infty. \qquad \square$$

Olemme näin osoittaneet, että joillakin jatkuvilla funktioilla Fourier sarja hajaantuu joissakin pisteissä. Positiiviseen suuntaan, Carleson ($p = 2$) ja Hunt (yleisellä p) todistivat, että kun $1 < p \leq \infty$ ja $f \in L^p(-\pi, \pi)$, silloin f:n Fourier sarja suppenee *melkein kaikkialla.* Erityisesti, tulos pätee kun $f \in C_\#(-\pi, \pi)$. Carleson-Hunt teoreeman todistus on kuitenkin liian vaikea tällä kurssilla läpikäytäväksi.

Entä tapaus $p = 1$, kun $f \in L^1(-\pi, \pi)$? Tämän ratkaisi Kolmogorov v. 1926, mutta negatiiviseen suuntaan ! Hän osoitti, että on olemassa funktioita $f \in L^1(-\pi, \pi)$, joiden Fourier sarja *ei suppene missään pisteessä.*

V. Fourier sarjojen sovelluksia I

V.1. Tasanjakautuneisuus (mod 1) ja Weylin lause Tarkastelemme seuraavaksi Fourier analyysin sovellusta lukuteoriaan - tämä on itse asiassa vain yksi esimerkki laajasta aihepiiristä.

Kuten algebrasta muistetaan, jos $x, y \in \mathbb{R}$, merkitään

$$x \;=\; y \quad (\mathrm{mod}\ 1), \qquad \text{mikäli} \;\; x - y \in \mathbb{Z},$$

sekä sanotaan, että tällöin x ja y ovat kongruentteja (mod 1). Erityisesti, kullakin $x \in \mathbb{R}$ löytyy yksikäsitteinen luku

$$< x > \;\in\; [0, 1)\,,$$

jolle

$$x \;= < x > \quad (\mathrm{mod}\ 1);$$

siis $< x >$ on luvun x murto-osa l. desimaaliosa.

KYSYMYS: Kun $\alpha \in \mathbb{R}$, mitä voidaan sanoa jonosta

$$< \alpha >, \; < 2\alpha >, \; < 3\alpha >, \; < 4\alpha >, \ldots\ldots \quad \big(\in [0, 1) \;\big) \quad ?!?$$

Eli haluamme esimerkiksi ymmärtää milloin jono tiheä joukossa $[0,1)$, miten jono käyttäytyy välillä $[0,1)$, kun $n \to \infty$ jne...

Esimerkkinä, jos $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, saamme jonon

$$< \frac{p}{q} >, \ < \frac{2p}{q} >, \ < \frac{3p}{q} >, \ \ldots, \ < \frac{(q-1)p}{q} >, \ < \frac{qp}{q} > = \ 0, \ < \frac{(q+1)p}{q} > = < \frac{p}{q} >, \ldots$$

eli jonosta tulee periodinen. Mutta jonon dynamiikka, so. se miten jonon alkiot kulkevat välillä $[0,1)$, on kuitenkin hankala ymmärtää; jos esimerkiksi $\alpha = \frac{3}{7}$, saatu jono

$$< \frac{3}{7} > \to < \frac{6}{7} > \to < \frac{9}{7} > = < \frac{2}{7} > \to < \frac{5}{7} > \to < \frac{1}{7} > \to < \frac{4}{7} > \to \ 0 \ \to < \frac{3}{7} >$$

näyttää varsin satunnaiselta.

Millainen on sitten desimaaliosien jono $< n\alpha >, \ n = 1, 2, 3, \ldots$, kun α on irrationaalinen ? Tästä voidaan itse asiassa sanoa paljonkin – erityisesti tulemme näkemään että tällöin desimaaliosat jakautuvat tasaisesti vrt. Seuraus 5.4. Tasan jakautumisen tarkka määritelmä on seuraava:

Määritelmä 5.1. *Reaalilukujono* $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ *on* **tasan jakautunut (mod 1)**, *jos jokaiselle avoimelle välille* $(a,b) \subset [0,1)$ *pätee*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#\{1 \le n \le N \ : < x_n > \in (a,b)\}}{N} \ = \ b - a.$$

HUOM: Tässä $\#A$ on joukon A alkioiden lukumäärä.

Joskus sanotaan ylläolevan ehdon kanssa yhtäpitävästi, että jonon $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *frekvenssi* avoimella välillä (a,b) on $b-a$. Jos jono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ on tasan jakautunut (mod 1), selvästikin jono $(< x_n >)_{n=1}^{\infty}$ on tiheä joukossa $[0,1)$. Mutta tasan jakautuminen on huomattavasti vahvempi ominaisuus kuin tiheys, ehto $\overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}} = [0,1)$ ei implikoi tasan jakautuneisuutta (MIKSI?, anna vastaesimerkkejä).

Annetusta jonosta on usein vaikea suoraan päätellä onko se tasan jakautunut vai ei. Seuraava nk. Weylin kriteeri antaa vahvan työkalun asian ratkaisemiseksi.

Lause 5.2. (Weylin kriteeri) *Reaalilukujono* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *on tasan jakautunut (mod 1) jos*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi ik\,x_n} \;=\; 0 \qquad \text{jokaisella} \quad k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}. \tag{5.1}$$

Tasan jakautumisen todistaminen Weylin kriteerin avulla vaatii useita osa-askeleita. Aloitetaan seuraavalla.

Lemma 5.3. *Jos reaalilukujono* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *toteuttaa Weylin kriteerin* (5.1), *silloin ehto*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) \;=\; \int_0^1 f(x)dx \tag{INT}$$

pätee jokaiselle jatkuvalle 1*-periodiselle funktiolle* $f \in C_{\#}(0,1)$.

Todistus. Oletetaan että jono (x_n) toteuttaa Weylin kriteerin.

Olkoon ensin $f(x) = e^{2\pi ikx}$, missä $k \in \mathbb{Z}$. Jos $k = 0$, $f \equiv 1$ ja väite (INT) on triviaali. Jos taas $k \neq 0$, $\int_0^1 e^{2\pi ikt}\,dt = 0$ ja (INT) pätee oletuksen, eli Weylin kriteerin nojalla.

Lineaarisuuden nojalla (INT) on tällöin voimassa aina kun f on trigonometrinen polynomi, eli muotoa $f(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{2\pi ikx}$.

Olkoon sitten $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ jatkuva ja 1-periodinen funktio, sekä $\varepsilon > 0$. Lauseen 3.14 mukaan trigonometriset polynomit ovat tiheässä avaruudessa $C_{\#}(0,1)$. Toisin sanoen, löydämme (1-periodisen) trig. polynomin $P = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{2\pi ikx}$, jolle

$$\|f - P\|_{L^\infty(0,1)} \;<\; \varepsilon. \tag{5.2}$$

Edelleen, ylläolevan mukaan, kun valitaan riittävän suuri $N_\varepsilon = N_\varepsilon(P) \in \mathbb{N}$,

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(x_n) \;-\; \int_0^1 P(t)\,dt\right| \;<\; \varepsilon, \qquad N > N_\varepsilon. \tag{5.3}$$

Yhdistämällä nämä arviot saadaan

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) \ - \ \int_0^1 f(t)\,dt\right| \le \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) \ - \ \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(x_n)\right| +$$

$$+\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(x_n) \ - \ \int_0^1 P(t)\,dt\right| + \left|\int_0^1 P(t)\,dt \ - \ \int_0^1 f(t)\,dt\right| \ \le \ 3\varepsilon,$$

kun $N > N_\varepsilon(P)$. Lemma 5.3 on siis saatu todistetuksi. $\square$

Myös tasan jakautuneisuuden ehto, Määritelmä 5.1, voidaan lausua integraalin avulla. Sovitaan ensin, että kaikki alla tarkasteltavat välin $[0,1)$ funktiot on jatkettu 1-periodisiksi koko reaaliakselille. Toisin sanoen jos käytetään välin $(a,b) \subset [0,1)$ karakteristiselle funktiolle merkintää $\chi_{(a,b)}$, tällöin

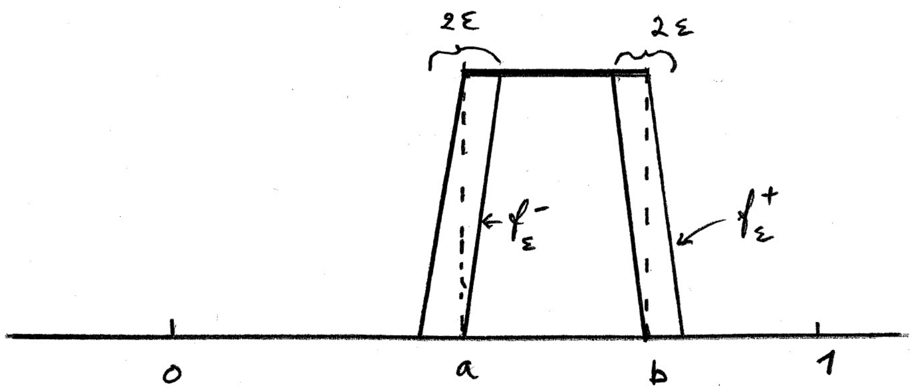
$$\chi_{(a,b)}(t) := \begin{cases} 1, & t \in (a,b) + \mathbb{Z}, \\ 0, & t \notin (a,b) + \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Huomaamme, että tasan jakautuneisuus tarkoittaa täsmälleen sitä että jokaiselle avoimelle välille $(a,b) \subset [0,1)$ funktio $\chi_{(a,b)}$ toteuttaa ehdon (INT).

Näillä eväin voimme palata päätulokseen, Lauseen 5.2 todistukseen. Kun väli (a,b) on annettu, valitaan *jatkuvat* ja 1-periodiset funktiot f_ε^+ ja f_ε^-, joille

$$0 \ \le \ f_\varepsilon^-(t) \ \le \ \chi_{(a,b)}(t) \ \le \ f_\varepsilon^+(t) \ \le \ 1, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{5.4}$$

ja $f_\varepsilon^\pm(t) = \chi_{(a,b)}(t)$, paitsi mahdollisesti kun $|t-a| < \varepsilon$ tai $|t-b| < \varepsilon$, vrt. kuva alla.



Silloin

$$(5.5) \qquad b-a-2\varepsilon \;\le\; \int_0^1 f_\varepsilon^-(t)\,dt \;\le\; \int_0^1 \chi_{(a,b)}(t)\,dt \;\le\; \int_0^1 f_\varepsilon^+(t)\,dt \;\le\; b-a+2\varepsilon.$$

Tästä huomataan, että mikäli jono $(x_n)_{n=1}^\infty$ toteuttaa Weylin ehdon (5.1), silloin

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N \chi_{(a,b)}(x_n) \;\le\; \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N f_\varepsilon^+(x_n) = \int_0^1 f_\varepsilon^+(t)\,dt \;\le\; b-a+2\varepsilon,$$

missä " = " yllä seuraa Lemmasta 5.3.

Samalla tavalla nähdään, että

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N \chi_{(a,b)}(x_n) \;\ge\; b-a-2\varepsilon.$$

Koska $\varepsilon > 0$ oli mielivaltainen, saadaan

$$(5.6) \qquad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N \chi_{(a,b)}(x_n) \;=\; b-a.$$

Olemme näin todistaneet Lauseen 5.2, eli että jokainen jono joka toteuttaa Weylin kriteerin (5.1) on tasan jakautunut. □

SEURAUS 5.4. *Jos* $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, *silloin jono* $(n\alpha)_{n=1}^\infty$ *on tasan jakautunut (mod 1). Toisin sanoen, desimaaliosat*

$$(5.7) \qquad (<\gamma>,\ <2\gamma>,\ <3\gamma>,\ <4\gamma>,\ <5\gamma>,\dots)$$

jakautuvat tasan välille $[0,1)$.

Todistus. Näytämme, että kyseinen jono toteuttaa Weylin kriteerion. Olkoon $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Voimme laskea käyttämällä geometrisen sarjan summakaavaa

$$|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i k\alpha n}| = \frac{|e^{2\pi i k\alpha}\big(e^{2\pi N i k\alpha n} - 1\big)|}{N|e^{2\pi i k\alpha} - 1|} \leq \frac{2}{N|e^{2\pi i k\alpha} - 1|} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} = 0. \qquad \square$$

KYSYMYS: Missä kohtaa edellisesssä todistuksessa tarvitaan luvun α irrationaalisuutta?

Itse asiassa Lausetta 5.2 voi vielä tarkentaa: Weylin kriteeri on karakterisaatio jonon $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tasan jakautuneisuudelle (mod 1) !

Lause 5.5. *Reaalilukujono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ on tasan jakautunut (mod 1) jos ja vain jos* Weylin kriteerio

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i k x_n} \; = \; 0 \qquad \text{jokaisella} \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \tag{5.8}$$

pätee.

Todistus. Meiltä puuttuu vain Weylin ehdon välttämättömyys, implikaatio suuntaan "$\Rightarrow$". Tämän todistamiseksi, olkoon jono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tasan jakautunut, jolloin tehtävänämme on johtaa Weylin ehto (5.8).

Kuten yllä, tulkitaan tasan jakautuminen integraalin avulla; siis oletuksen nojalla ehto

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) \;\to\; \int_0^1 f(t)\,dt, \quad \text{kun } N \to \infty, \tag{5.9}$$

pätee, kun $f = \chi_{(a,b)}$. Jotta voimme yleistää tämän vaikkapa puoliavoimille väleille $[a, b)$, huomataan ensin että

$$\frac{\#\{1 \leq n \leq N \;:< x_n >= 0\,\}}{N} \;=\; 1 - \frac{\#\{1 \leq n \leq N \;:< x_n > \in (0,1)\,\}}{N} \;\to\; 1 - 1 = 0$$

Siksi (5.9) pätee kun $f = \chi_{[0,b)}$, $0 < b < 1$. Silloin se pätee myös kun $f = \chi_{[a,b)} = \chi_{[0,b)} - \chi_{[0,a)}$. Ja edelleen, (5.9) pätee tällaisten funktioiden äärellisille lineaarikombinaatioille, eli porrasfunktioille.

Mutta jokaista jatkuvaa ja 1-periodista funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ voi approksimoida porrasfunktioilla tasaisesti välillä $[0,1)$; riittää asettaa

$$g_M(x) = \sum_{j=0}^{M-1} f\big(j/M\big)\ \chi_{[\frac{j}{M},\frac{j+1}{M})}(x),$$

jolloin $\|f - g_M\|_{L^\infty(0,1)} \to 0$ kun $M \to \infty$, ja saamme

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \varepsilon \ \le\ \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g_M(x_n) \ =\ \int_0^1 g_M \ \le\ \int_0^1 f \ +\ \varepsilon.$$

kun M on riittävän suuri. Vastaavasti $\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) \ \ge \int_0^1 f \ -\ 2\varepsilon$ ja näemme että (5.9) pätee kaikille jatkuville 1-periodisille funktioille f.

Koska $f(x) = e^{2\pi i k x}$ on jatkuva, se toteuttaa (5.9):n, joka eksponenttifunktioiden tapauksessa on täsmälleen ehto (5.8). $\square$

Weylin teoreema on varsin vahva (ja kaunis !) tulos. Sen avulla voi todistaa esimerkiksi, että jono

$$(< \log n >)_{n=1}^{\infty}$$

ei ole tasaisesti jakautunut (HT). Lisäksi Weyl todisti kriteerinsä avulla, että jokaiselle polynomille $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_d x^d$ luvut $p(1), p(2), \ldots$ ovat tasanjakautuneet mod (1) mikäli ainakin joku polynomin kertoimista $a_1, \ldots, a_d$ on irrationaalinen.

Lopuksi, voisiko tasan jakautumisen käsitettä vielä tarkentaa, korvaamalla välit (a,b) yleisillä mitallisilla joukoilla $A \subset [0,1)$? Esimerkiksi tarkasteltaessa jonoa $(< n\alpha >)_{n=1}^{\infty}$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$, tasanjakautuneisuuden määritelmää vastaava vaatimus näyttäisi olevan

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#\{1 \le n \le N \ :< n\alpha > \in\ A\,\}}{N} \ =\ |A|, \tag{5.10}$$

missä $|A|$ on ko. joukon Lebesguen mitta.

Mutta tässä on selvä pulma: Joukko $\{< n\alpha >: n \in \mathbb{N}\}$ on vain numeroituva, eikä yleinen mitallinen joukko A "näe" sitä.

Tilanne vaatii siis uutta näkökulmaa ! Tarkastellaan asiaa tässä vain hyvin lyhyesti; ideana on nyt samaistaa luku α kierron $R_\alpha : [0,1) \to [0,1), \quad R_\alpha < x > = < x + \alpha >$, kanssa. Samaistus on helpoin mieltää yksikköympyrällä [Piirrä kuva !].

Ehdon (5.10) luonnollinen vastine on silloin

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} \chi_A(x + n\alpha) \; = \; \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} \chi_A \circ R_\alpha^n(x) \; = \; |A| \qquad \text{melkein kaikilla } x.$$

Kuuluisan **Birkhoffin ergodisuuslauseen** mukaan näin todella on. Sivuutamme kuitenkin Birkhoffin lauseen todistuksen; se löytyy useimmista ergodisuusteorian kirjoista.

V.2. Jatkuvia funktioita, joilla ei derivaattaa missään pisteessä. Riemann esitti v. 1861, että sarja

$$R(x) \; = \; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}, \qquad x \in [-\pi, \pi], \tag{5.11}$$

on esimerkki jatkuvasta funktiosta, jolla ei ole derivaattaa missään pisteessä. Riemann ei kuitenkaan antanut väitteelleen perusteluja; ensimmäisen pitävän argumentin antoi Weierstrass, joka osoitti, että sopivilla luvuilla $0 < b < 1 < a, ab > 1$, funktiolla

$$W(x) \; = \; \sum_{n=1}^{\infty} b^n \sin(a^n x) \tag{5.12}$$

ei ole derivaattaa yhdessäkään pisteessä. [Tarkkaan ottaen, Weierstrass todisti tapauksen $0 < b < 1, \; 1 < a \in \mathbb{Z}$ ja $ab > 1 + 3\pi/2$.]

Tämän osaluvun tarkoituksena on todistaa eräs versio Weierstrassin tuloksesta. Alkuperäisestä Riemannin funktiosta (5.11) Hardy näytti v. 1916 derivoitumattomuuden pisteissä $t\pi$, $t \notin \mathbb{Q}$. Lopullisen ratkaisun antoi Gerver v. 1969 ja 1971; hän osoitti että $R(x)$ **on** derivoituva pisteissä $x = \pi p/q$, kun p, q parittomia kokonaislukuja, mutta *ei missään muualla*.

Todistamme tuloksen

Lause 5.6. *Jos $0 < \alpha < 1$, silloin funktio*

$$f(x) \;=\; f_\alpha(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n\alpha}\, e^{i\,2^n x}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

on jatkuva ja 2π-periodinen, eli $f \in C_\#(-\pi,\pi)$, mutta f ei ole derivoituva yhdessäkään pisteessä $x \in \mathbb{R}$.

Eli annamme todistuksen Weierstrassin tulokselle tapauksissa $b = 2^{-\alpha},\ a = 2 > 1$, jolloin tietysti $ab = 2^{1-\alpha} > 1$.

Ennen kuin päästään Lauseen 5.6 todistukseen tarvitsemme muutamia valmistelevia tarkasteluja. Ensinnäkin huomataan, että funktio $f_\alpha(x)$ on jatkuva, tasaisesti suppenevana trigonometrisena sarjana. Toisaalta, monet f:n Fourier kertoimista ovat nollia,

$$\begin{aligned} \widehat{f_\alpha}(2^n) &= (2^n)^{-\alpha}, && n \in \mathbb{N}, \\ \widehat{f_\alpha}(k) &= 0, && k \neq 2^n,\ n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Tällaista Fourier sarjaa sanotaan *lakunaariseksi.*

Yleisesti, kokonaislukujono $(a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ on lakunaarinen, jos $a_{n+1} > A a_n$ jollakin vakiolla $A > 1$. Funktion f Fourier sarja on lakunaarinen, jos f:n Fourier kertoimien kantaja ($\mathbb{Z}$:n osajoukkona) on lakunaarinen, siis

$$\widehat{f}(n) \;=\; \begin{cases} c_n, & \text{kun } n = a_k \ \text{ jollakin } k \\ 0, & \text{kun } n \neq a_k,\ \ k \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{5.13}$$

jollakin lakunaarisella jonolle $(a_n)_{n=1}^\infty$.

Lakunaarisille Fourier sarjoille Fejerin ja Dirichlet ytimien yhteyttä voidaan tarkentaa. Muistetaan ensin (3.18), että Fejerin ytimien Fourier kertoimet ovat

$$\widehat{F_N}(k) = \left(1 - \frac{|k|}{N}\right), \qquad -N \leq |k| \leq N; \qquad \widehat{F_N}(k) = 0 \quad \text{muuten.} \tag{5.14}$$

Tästä huomataan, että

$$(2F_{2N} - F_N)\hat{}(k) = 2\left(1 - \frac{|k|}{2N}\right) - \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) \ = \ 1, \qquad \text{kun } 0 \le |k| \le N,$$

ja

$$(2F_{2N} - F_N)\hat{}(k) \ = \ 2 - \frac{|k|}{N}, \qquad \text{kun } N < |k| \le 2N;$$

muut ytimen $2F_{2N} - F_N$ Fourier kertoimista ovat nollia. Erityisesti,

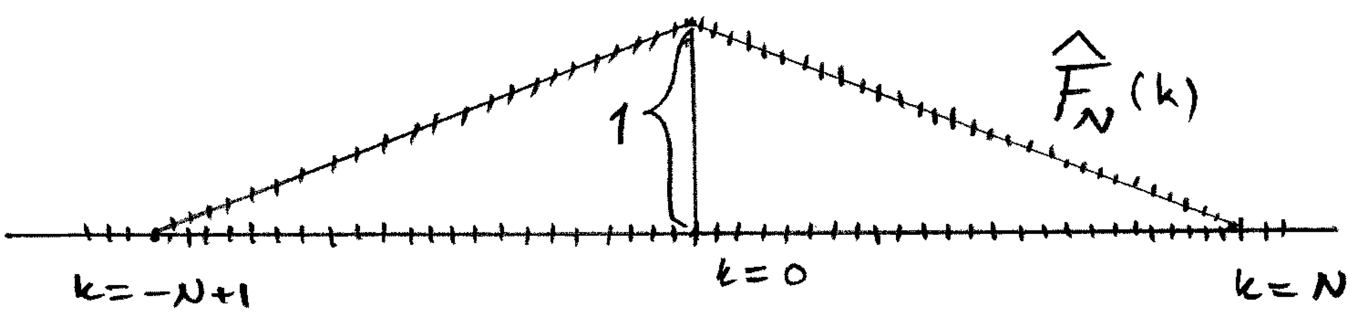
Huomautus 5.7. *Lakunaariselle sarjalle $f_\alpha(x)$ pätee:*

$$S_N f_\alpha \equiv (2F_{2N} - F_N) * f_\alpha, \qquad \text{kun} \quad N = 2^n,\ n \in \mathbb{N}.$$

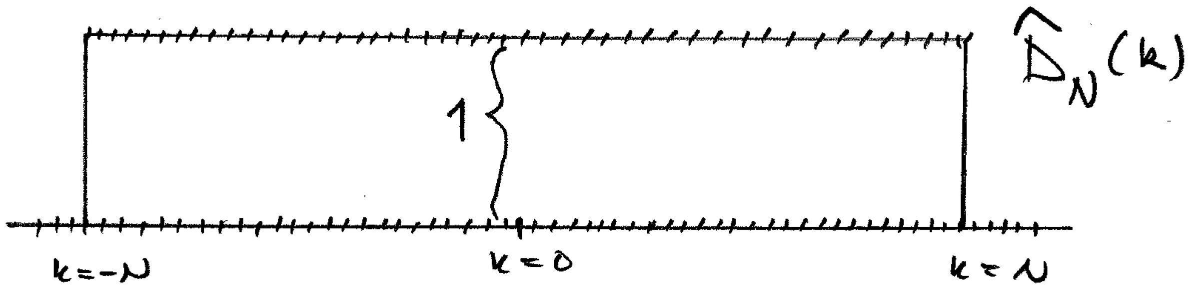
Toisin sanoen, lakunaarisen funktion f_α Fourier-sarjaa voi tutkia suoraan Fejerin ytimien avulla.

Huomautus 5.8. *Jos merkitään $K_N(x) = 2F_{2N} - F_N(x)$, silloin $\{K_N\}_{N=1}^\infty$ on perhe hyviä ytimiä* (MIKSI ?). *Näitä kutsutaan de la Vallée-Poussin ytimiksi.*

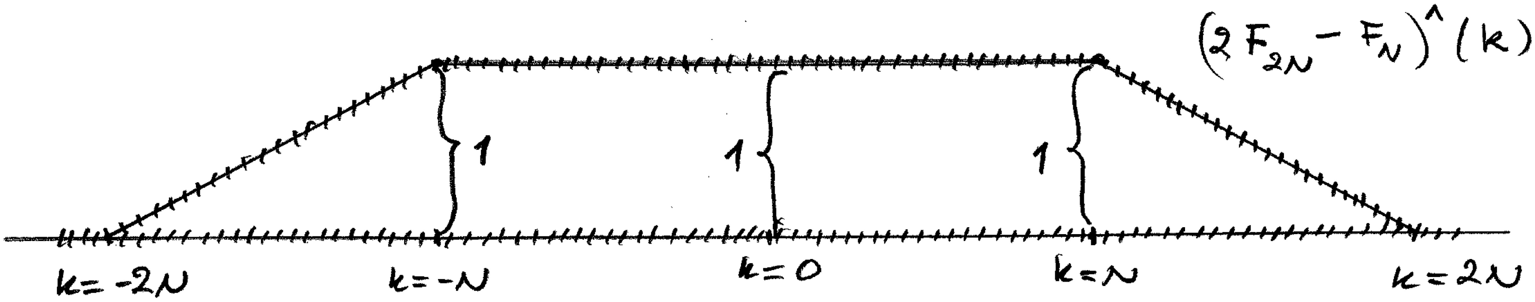
On havainnollista verrata näitä kolme perhettä ytimiä "Fourier-puolella". Ensiksi, Fejer-ytimien Fourier kertoimien kuvaajaa voi hahmotella seuraavasti, vrt (5.14).



Dirichlet ytimille taas $\widehat{D_N}(k) = 1, \quad -N \le |k| \le N,$ ja $\widehat{D_N}(k) = 0$ muuten, joten sen kuvaaja on seuraava:



De la Vallée-Poussin ytimet $K_N(x) = 2F_{2N} - F_N(x)$ muodostavat jonkinlaisen "välimuodon" Dirichlet- ja Fejer-ytimistä; sellaisilla on käyttöä muuallakin.



Koska lakunaarisen sarjan f_α Fourier kertoimille $\widehat{f_\alpha}(k) = 0$ kun $N = 2^n < k < 2^{n+1} = 2N$, ylläoleva kuva selittää myös Huomautuksen 5.7 identiteetin.

Lopuksi on vielä kytkettävä derivoituvuus Fejer-summien $\sigma_N g = F_N * g$ ominaisuuksiin.

Lemma 5.9. *Olkoon $g \in C_\#(-\pi, \pi)$. Jos g on derivoituva pisteessä $x_0 \in [-\pi, \pi]$, silloin*

$$(\sigma_N g)'(x_0) \;=\; \mathcal{O}(\log N), \qquad N \in \mathbb{N}.$$

[Muista merkintä: $a_n \;=\; \mathcal{O}(b_n) \;\Leftrightarrow\; |a_n| \le C\, b_n$ jollakin vakiolla C ja kaikilla $n \in \mathbb{N}$.]

Todistus. Lasketaan

$$(\sigma_N g)'(x_0) = \frac{d}{dx}\Big|_{x=x_0} (F_N * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N'(x_0 - t)\, g(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N'(t)\, g(x_0 - t)\, dt$$

Koska F_N on 2π-periodinen, $\int_{-\pi}^{\pi} F_N'(t)\, dt = 0$ ja siten

$$(5.15) \qquad |(\sigma_N g)'(x_0)| = \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N'(t)\, [g(x_0 - t) - g(x_0)]\, dt \right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F_N'(t)|\; C_0\, |t|\, dt$$

jollakin vakiolla $C_0 < \infty$, sillä g derivoituva x_0:ssa ja jatkuva.

Tehtävänämme on siten arvioida integraalia

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F_N'(t)|\; |t|\, dt.$$

Tässä voidaan edetä seuraavasti. Ensinnäkin

$$(5.16) \qquad |F_N'(t)| = \left| \sum_{-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) ik\, e^{ikt} \right| \le N^2$$

ja toiseksi, kaavan (3.16) tai Määritelmän 3.12 mukaan $F_N(t) = \frac{1}{N}\sin^2(Nt/2)\sin^{-2}(t/2)$. Tästä derivoimalla

$$F_N'(t) = \cos(Nt/2)\sin(Nt/2)\sin^{-2}(t/2) - \frac{1}{N}\sin^2(Nt/2)\sin^{-3}(t/2)\cos(t/2),$$

mistä saamme arvion

$$(5.17) \qquad |F_N'(t)| \le \frac{3\pi^2}{t^2}, \qquad 0 < |t| \le \pi.$$

[Tarkista arvio ! Muista: $|\sin(t)| \le |t|$ ja $2|t|/\pi \le |\sin(t)|$ kun $|t| \le \pi/2$]

Yhdistämällä arviot (5.15)-(5.17) saamme

$$|(\sigma_N g)'(x_0)| \le C_0 \int_{|t|\le 1/N} |F_N'(t)|\; |t|\, dt + C_0 \int_{1/N<|t|\le\pi} |F_N'(t)|\; |t|\, dt$$

$$\le C_0 \int_{|t|\le 1/N} N^2\, |t|\, dt + 6\pi^2 C_0 \int_{1/N}^{\pi} \frac{dt}{t} \;=\; \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(\log N) \;=\; \mathcal{O}(\log N). \qquad \square$$

Ylläolevasta tuloksesta lakunaarisen sarjan f_α derivoitumattomuus seuraa nopeasti.

Lauseen 5.6 todistus. Kun $N = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, tarkastellaan trigonometrisia polynomeja

$$P_N(x) := S_N f_\alpha(x) - S_{N/2} f_\alpha(x) = 2^{-n\alpha} e^{i2^n x} = N^{-\alpha} e^{iNx}.$$

Polynomin derivaatta $|P_N'(x)| \equiv N^{1-\alpha}$. Toisaalta Huomautuksen 5.8 mukaan

$$P_N = S_N f_\alpha - S_{N/2} f_\alpha = (2\sigma_{2N} f_\alpha - \sigma_N f_\alpha) - (2\sigma_N f_\alpha - \sigma_{N/2} f_\alpha) = 2\sigma_{2N} f_\alpha - 3\sigma_N f_\alpha + \sigma_{N/2} f_\alpha.$$

Tästä nähdään, että jos funktiolla f_α olisi derivaatta jossakin pisteessä $x_0 \in [-\pi, \pi]$, silloin Lemman 5.9 mukaan $P_N'(x_0) = \mathcal{O}(\log N)$, mikä on mahdotonta sillä $N^{1-\alpha}$ kasvaa paljon nopeammin kuin $\log N$, kun $N \to \infty$. Siten funktio f_α ei voi olla derivoituva missään pisteessä $x_0 \in [-\pi, \pi]$ ja Lause 5.6 on näin saatu todistetuksi. $\square$

Jos halutaan reaaliarvoinen funktio $f \in C_\#(-\pi, \pi)$ jolla ei derivaattaa missään pisteessä, valitaan esimerkiksi

$$g_\alpha(x) \;=\; \operatorname{Re} f_\alpha(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n\alpha} \cos(2^n x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Taas voidaan tarkastella trig. polynomeja $Q_N(x) := S_N g_\alpha(x) - S_{N/2} g_\alpha(x) = 2^{-n\alpha} \cos(2^n x)$, $N = 2^n$. Mutta tällä kertaa derivaattojen itseisarvot $|Q_N'(x)| = 2^{(1-\alpha)n} |\sin(2^n x)|$ eivät ole vakioita. Tarvitaan siksi Lemman 5.9 tarkennus (HT; tod. samaan tapaan kuin Lemmassa):

$$(5.18) \qquad (\sigma_N g)'(x_0 + h) \;=\; \mathcal{O}(\log N), \quad \text{kun } |h| \le \tfrac{1}{N} \text{ ja } g \in C_\#(-\pi, \pi) \text{ derivoituva } x_0\text{:ssa.}$$

Valitsemalla nyt jokaisella $N = 2^n$ ja $x_0 \in [-\pi, \pi]$ sopiva h saadaan $|Q_N'(x_0 + h)| = 2^{(1-\alpha)n} = N^{1-\alpha}$, mikä on ristiriidassa ehdon (5.18) kanssa. Siis myöskään g_α ei voi olla derivoituva missään pisteessä.

Vastaavanlaisella argumentilla voidaan derivoitumattomuus kaikkialla todistaa myös yleiselle Weierstrass-funktiolle (5.12), missä $0 < b < 1 < a$ mielivaltaisia lukuja joille $ab > 1$. Mutta nyt $W(x)$ ei olekaan enää periodinen funktio - todistus tarvitsee siis (jatkuvaa) Fourier muunnosta ! Jos aikaa riittää, palataan asiaan myöhemmin.

VI. Fourier sarjojen L^2-teoria

Luvussa IV tutkimme Fourier sarjojen pisteittäistä suppenemista, ja huomasimme, että pisteittäisen käyttäytymisen ymmärtäminen yleisille jatkuville tai L^p-funktioille on varsin vaikeaa. Paljon helpompaa on osoittaa, että Fourier sarjat suppenevat "keskimäärin".

Käymme tästä aihepiiristä lyhyesti läpi Fourier-sarjojen L^2-teorian, tavoitteenamme todistaa seuraavat fundamentaalit tulokset:

Jos $f \in L^2(-\pi, \pi)$, silloin

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S_N f(x) - f(x)|^2 \, dx \ \to \ 0, \tag{6.1}$$

eli funktion f Fourier sarja suppenee L^2-normin mielessä, ja

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx \ = \ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 \qquad \text{(Plancherellin kaava)} \tag{6.2}$$

Myös näitä tarvitaan Fourier analyysin eri sovelluksissa - seuraavassa luvussa käytämme niitä geometriaan ja lämpöyhtälön selvittämiseen.

Tulemme näkemään, että nämä tulokset seuraavat enemmänkin avaruuden $L^2(-\pi, \pi)$ struktuurista kuin jonkun tietyn summausmenetelmän erityisominaisuuksista.

Kuten liitteen luvussa A.1 kerrataan, avaruus $L^p(-\pi, \pi)$, $1 \le p \le \infty$, varustettuna normilla $\|f\|_p$ on täydellinen, eli siis *Banach avaruus*. Kun $p = 2$, k.o. avaruuden geometriasta saadaan vieläkin tarkempi kuva: Nyt normin määrää sisätulo

$$(f, g) = (f, g)_{L^2} \ := \ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \overline{g(x)} \, dx, \qquad [= \overline{(g, f)} \ ], \tag{6.3}$$

sillä $\|f\|_{L^2} = \sqrt{(f, f)_{L^2}}$. Huomaa, että sisätulo on ($\mathbb{C}$)-lineaarinen ensimmäisen muuttujan suhteen, antilineaarinen toisen suhteen ja jatkuva kummankin muuttujan suhteen (HT 5).

Tiivistettynä: $L^2(-\pi, \pi)$ on täydellinen sisätuloavaruus, eli *Hilbertin avaruus*.

Hölderin epäyhtälön (A.1.2) nojalla $(f,g)_{L^2}$ on hyvin määritelty kaikilla $f,g \in L^2(-\pi,\pi)$; itse asiassa tässä tapauksessa epäyhtälöä

(6.4)
$$|(f,g)_{L^2}| \le \|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2} \quad \text{eli} \quad \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\,g\,dx\right| \le \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g|^2\,dx\right)^{1/2}$$

kutsutaan *Cauchy-Schwarzin epäyhtälöksi.*

Merkitään

$$f \perp g\,, \quad \text{jos} \quad (f,g)_{L^2} = 0 \quad \text{eli} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx = 0,$$

ja huomataan (HT 5) Pythagoraan lause

$$\|f+g\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 + \|g\|_{L^2}^2 \qquad \text{kun} \quad f \perp g. \tag{6.5}$$

VI.1. L^2-funktioiden Fourier kertoimet. Hilbert avaruuden käsittein tulkittuna, eksponenttifunktiot

$$e_n(x) := e^{inx}, \quad \text{missä } x \in [-\pi,\pi] \text{ ja } n \in \mathbb{N}, \tag{6.6}$$

muodostavat ortonormaalin jonon (eli ON-jonon) avaruudessa $L^2(-\pi,\pi)$,

$$(e_n,e_m)_{L^2} \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\,e^{-imx}\,dx \;=\; \delta_{n,m}.$$

Tällöin funktion $f \in L^2(-\pi,\pi)$ Fourier kertoimet $\widehat{f}(n)$ ovat f:n projektioita funktioiden e_n suuntaan ! Nimittäin

$$(f,e_n)_{L^2} \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-inx}\,dx \;=\; \widehat{f}(n), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Lisäksi ortononormaali jono $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ on täydellinen, s.o. jos $f \in L^2(-\pi,\pi)$ ja

$$f \perp e_n \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad f(x) \;=\; 0 \quad \text{m.k. } x \in [-\pi,\pi]. \tag{6.7}$$

Tämä seuraa lauseesta Lauseesta 3.16, sillä $L^2(-\pi,\pi) \subset L^1(-\pi,\pi)$ Hölderin epäyhtälön nojalla.

Huomautus 6.1. *Koska* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *on ON-jono, äärellisille summille* $f = \sum_{k=-m}^{m} c_k e_k$ *pätee*

(i) $\quad \widehat{f}(j) \;=\; c_j \;=\; (f, e_j)_{L^2} \qquad [= \sum_k c_k (e_k, e_j)_{L^2}\,] \qquad$ *ja*

(ii) $\quad \|f\|_{L^2}^2 \;=\; \sum_{k=-m}^{m} |c_k|^2 \qquad$ [Pythagoras]

Entä äärettömät summat ?!

Lause 6.2. (Riesz-Fisher) *Olkoot kantavektorit* e_n *kuten (6.6):ssa ja* $a_k \in \mathbb{C}$ *sellaisia, että* $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$. *Silloin sarja*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e_k$$

suppenee avaruudessa $L^2(-\pi,\pi)$. *Toisin sanoen, löytyy* $f \in L^2(-\pi,\pi)$ *jolle* $\|\, f - \sum_{k=-N}^{N} a_k\, e_k \,\|_{L^2} \to 0$ *kun* $N \to \infty$.

Todistus. Olkoon $S_N := \sum_{k=-N}^{N} a_k\, e_k$. Väitämme, että $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ on Cauchyn jono avaruudessa $L^2(-\pi,\pi)$. Nimittäin kun $M > N$, Pythagoraan lauseen mukaan $\|S_N - S_M\|_{L^2}^2 = \|\sum_{N<|k|\le M} a_k\, e_k\|_{L^2}^2 = \sum_{N<|k|\le M} |a_k|^2$, joka $\to 0$ kun $N, M \to \infty$, suppenevan sarjan jäännösterminä.

Koska $L^2(-\pi,\pi)$ on *täydellinen* normiavaruus, Cauchy jono $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ suppenee eli löytyy $f \in L^2(-\pi,\pi)$, jolle $\|f - S_N\|_{L^2} \to 0$ kun $N \to \infty$. $\square$

HUOM: Koska $h \mapsto (h, g)_{L^2}$ on jatkuva $L^2(-\pi,\pi)$:n normin suhteen (HT 5), Riesz-Fisherin lauseessa löydetylle funktiolle f pätee

$$\widehat{f}(k) \;=\; a_k, \quad \text{jokaisella } k \in \mathbb{Z}. \tag{6.8}$$

Käänteiseen suuntaan,

Lemma 6.3. *Jos* $f \in L^2(-\pi,\pi)$,

(i) $\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 \;\le\; \|f\|_{L^2}^2 \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx \qquad$ [Besselin epäyhtälö]

(ii) Yhtäsuuruus pätee (i):ssä $\quad \Leftrightarrow \quad \|f - \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k)\, e_k\|_{L^2}^2 \to 0 \quad$ *kun* $N \to \infty$.

Todistus. $0 \leq \ \|f - \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k)\, e_k\|_{L^2}^2 = (f - \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k)\, e_k, f - \sum_{j=-N}^{N} \widehat{f}(j)\, e_k\,)_{L^2} \ =$

$$(f, f) - \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k)\, (e_k, f)_{L^2} - \sum_{j=-N}^{N} (f, e_j)_{L^2}\, \overline{\widehat{f}(j)} + \sum_{k=-N}^{N} |\widehat{f}(k)|^2 \ = \ \|f\|_{L^2}^2 - \sum_{k=-N}^{N} |\widehat{f}(k)|^2$$

Tästä identiteetistä molemmat väitteet seuraavat. □

Olemme nyt valmiita Fourier sarjojen L^2-teorian keskeiseen tulokseen, todistamaan perusperiaatteet (6.1) ja (6.2).

TEOREEMA 6.4. *Jos* $f \in L^2(-\pi, \pi)$, *silloin*

(i) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx \ = \ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2, \qquad$ *ja*

(ii) $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e_n$, *missä sarja suppenee* L^2*-normissa, siis*

$$\|f - S_N f\|_{L^2} \ = \ \|f - \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n) e_n\|_{L^2} \ \to 0, \quad \textit{kun } N \to \infty.$$

Todistus. Besselin epäyhtälön mukaan $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2 < \infty$. Silloin Riesz-Fisherin lause kertoo, että sarja

$$g := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e_n$$

suppenee avaruudessa $L^2(-\pi, \pi)$. Siis $g \in L^2(-\pi, \pi)$ ja $\widehat{g}(k) = (g, e_k)_{L^2} = \widehat{f}(k)$ jokaisella $k \in \mathbb{Z}$, vrt. (6.8). Fourier kertoimien yksikäsitteisyyden (6.7) nojalla $f = g$ melkein kaikkialla. Tämä todistaa väitteen (ii). Väite (i) seuraa silloin Lemmasta 6.3. □

Saamme bonuksena muutaman tärkean lisätuloksen.

LAUSE 6.5. (PARSEVAL) *Jos* $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$, *silloin*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx \ = \ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\, \overline{\widehat{g}(n)}\, .$$

Todistus. Sisätulon jatkuvuuden (HT 5) nojalla $(f,g)_{L^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\widehat{f}(n)\, e_n, g)_{L^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\, (e_n, g)_{L^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\, \overline{\widehat{g}(n)}$. $\square$

Myös jonoavaruus

$$\ell^2 = \{(a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \,:\, a_k \in \mathbb{C}, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 < \infty \,\}$$

on Hilbertin avaruus, sen sisätulona on $(a,b)_{\ell^2} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \overline{b_k}$. Cauchy-Schwarzin epäyhtälö saa nyt muodon

$$\left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\, \overline{b_k} \right| \leq \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |b_k|^2 \right)^{1/2} \tag{6.9}$$

Tulos seuraa Riesz-Fisherin ja Parsevalin lauseista, mutta sen voi tietysti todistaa myös suoraan. Tarkemmin ko. avaruuden ominaisuuksista ja geometriasta on kerrottu esim. Funktionaalianalyysin peruskurssilla.

Yhdistämällä Lause 6.2 ja Teoreema 6.4 nähdään, että kuvaus

$$T : L^2(-\pi,\pi) \;\to\; \ell^2, \qquad Tf := \big(\widehat{f}(k)\big)_{k=-\infty}^{\infty}$$

on *lineaarinen isometria*, s.o. $\|Tf\|_{\ell^2} \;=\; \|f\|_{L^2}$, ja myös surjektio; Lauseen 6.5 nojalla se säilyttää jopa sisätulonkin !

Siis $T : L^2(-\pi,\pi) \;\to\; \ell^2$ on lineaarinen Hilbert avaruus isomorfismi.

HUOMAUTUS 6.6. *Teoreeman 6.4 voi tulkita myös muodossa*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - D_N * f(x)|^2\, dx \;=\; \sum_{|k|>N} |\widehat{f}(k)|^2, \qquad f \in L^2(-\pi,\pi).$$

Yhtälössä vasemmalla integroidaan pahasti oskilloivan funktion neliötä, jota vaikea arvioida suoraan; oikealla on taas suppenevan sarjan jäännöstermi, joka menee triviaalisti nollaan!

VII. Fourier sarjojen sovelluksia II

Esittelemme sitten muutamia Fourier sarjojen L^2-teorian (monista) sovelluksista.

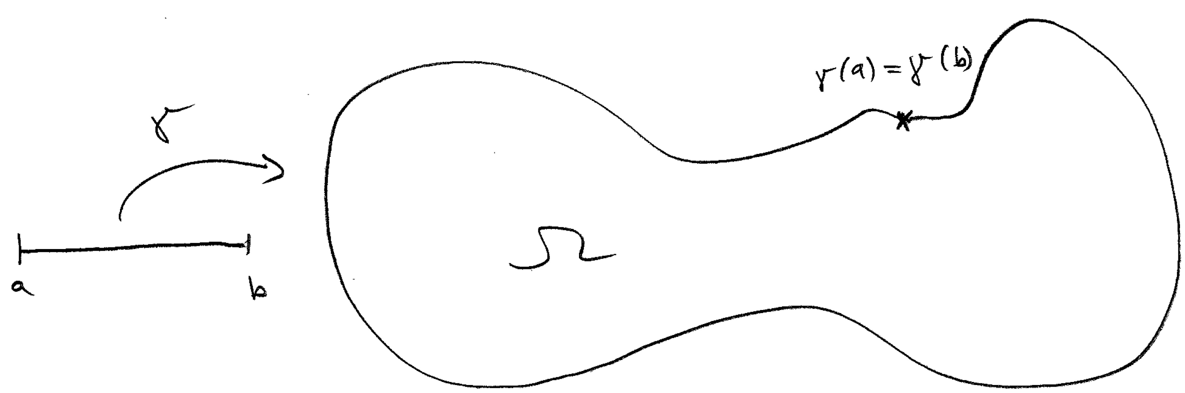
VII.1. Isoperimetrinen epäyhtälö. Kuinka suuren alueen voi rajata käyrä γ, jolla on annettu pituus L ?

Intuitiivinen ajatus on että suurin mahdollinen pinta-ala saadaan, kun γ on ympyrä; ja että ympyrä on ainoa pinta-alan maksimoiva käyrä. Isoperimetrinen epäyhtälö vahvistaa tämän intuition.

Mutta kuinka isoperimetrisen epäyhtälön voisi todistaa ? Fourier analyysin avulla asiaa voi lähestyä seuraavasti.

Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ alue, jonka reuna parametrisoitu C^1-polulla $\gamma : [a,b] \to \partial\Omega$,

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = x(t) + iy(t) \in \partial\Omega, \qquad t \in [a,b]$$



Oletamme, että γ:n toispuoleiset derivaatat ovat olemassa ja yhtyvät välin $[a,b]$ päätepisteissä; toisin sanoen että $\gamma \in C^1_{\#}(a,b)$. Lisäksi oletamme, että $\gamma'(t) \neq 0$ jokaisella t ja että γ on Jordan käyrä, s.o. $\gamma(a) = \gamma(b)$ mutta $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ kun $a \leq t_1 < t_2 < b$.

Käyrän γ pituus $L := L(\gamma)$ eli reunan $\partial\Omega$ pituus on

$$L = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

Käyrän pituus $L(\gamma)$ ei riipu parametrisoinnin valinnasta; jos $s : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ on kasvava C^1-funktio ja $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(s(t))$, ketjusäännöllä ja muuttujan vaihdolla

$$L(\tilde{\gamma}) = \int_\alpha^\beta |\tilde{\gamma}'(t)|\, dt = \int_\alpha^\beta |\gamma'(s(t))|\, s'(t)\, dt = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt = L(\gamma).$$

Voimme siis valita parametriksi kaaren pituuden $s \in [0, L]$, eli $s = L(\gamma|_{[0,s]})$. Silloin $|\gamma'(s)| \equiv 1$.

[Parametrin vaihto: Oletustemme nojalla $l(\rho) := \int_a^\rho |\gamma'(t)|\, dt$ antaa aidosti kasvavan C^1-funktion $l : [a, b] \to [0, L]$; valitaan uudeksi parametrisoinniksi $s = l^{-1} : [0, L] \to [a, b]$.]

Entä alueen Ω pinta-ala $|\Omega|$, kuinka se saadaan laskettua käyrästä γ ?

Tähän tarvitsemme Greenin kaavaa tai Gaussin lausetta eli divergenssilausetta dimensiossa $d = 2$ (ks. O.Martio, Vektorianalyysi, s. 169). Tätä varten, jos $\overline{n}(s)$ on $\partial\Omega$:n ulkonormaali pisteessä $\gamma(s) = (\, x(s), y(s)\,) \in \partial\Omega$,

(7.1) $$\overline{n}(s) = \pm\, (y'(s), -x'(s)\,), \qquad \text{kun } |\gamma'(s)| \equiv 1, \;\; s \in [0, L]. \qquad \text{(MIKSI ?)}$$

Merkki "+" valitaan kun γ positiivisesti suunnistettu ja "$-$" kun suunnistus on negatiivinen. Edelleen, jos $V : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ on C^1-vektorikenttä, divergenssilauseen mukaan

(7.2) $$\int_\Omega \nabla \cdot V(z)\, dx\, dy \;=\; \int_{\partial\Omega} V \cdot \overline{n}\, ds.$$

Valitaan nyt identtinen vektorikenttä $V(x, y) = (x, y)$, jolloin $\nabla \cdot V(z) \equiv 2$ ja divergenssilause saa muodon

$$|\Omega| \;=\; \frac{1}{2} \left| \int_0^L V(\gamma(s)) \cdot \overline{n}(s)\, ds \right| \;=\; \frac{1}{2} \left| \int_0^L x(s)y'(s) - y(s)x'(s)\, ds \right|.$$

Koska Fourier sarjat on mukavinta esittää kompleksilukuja käyttäen, esitetään yo. vielä kompleksianalyysin kielellä; eli kun $\gamma(s) = x(s) + iy(s)$ ja $\gamma'(s) = x'(s) + iy'(s)$, saadaan $xy' - yx' = \mathrm{Im}[\gamma'(s)\,\overline{\gamma(s)}]$. Yhteenvetona

$$|\Omega| \;=\; \frac{1}{2}\left|\int_0^L \mathrm{Im}[\,\gamma'(s)\,\overline{\gamma(s)}\,]\,ds\right| \;=\; \frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\int_0^L \gamma'(s)\,\overline{\gamma(s)}\,ds\right|. \tag{7.3}$$

Teoreema 7.1. (Isoperimetrinen epäyhtälö) *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ alue, jonka rajaa yksinkertainen ja suljettu C^1-käyrä, pituudeltaan L. Silloin alueen pinta-ala*

$$|\Omega| \;\le\; \frac{L^2}{4\pi},$$

missä yhtäsuuruus pätee $\Leftrightarrow$ $\partial\Omega$ on ympyrä.

Todistus. Skaalaamalla $\Omega \to \tau\Omega$, jolloin $|\tau\Omega| = \tau^2|\Omega|$ ja $L(\tau\partial\Omega)^2 = \tau^2 L(\partial\Omega)^2$ voimme olettaa, että reunan pituus $L = 2\pi$.

Jos $\gamma(s),\ s \in [0, L]$, on reunan $\partial\Omega$ parametrisointi kaarenpituudella, $|\gamma'(s)| \equiv 1$ ja

$$\gamma \in C^1_{\#}(0, 2\pi), \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\gamma'(s)|^2\,ds \;=\; 1. \tag{7.4}$$

Voimme nyt käyttää Fourier esitystä $\gamma(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,e^{ins}$, jolloin

$$\widehat{\gamma'}\,(n) \;=\; i\,n\,\widehat{\gamma}\,(n) \;=\; i\,n\,c_n, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Plancherel (6.2) yhdessä ehdon (7.4) kanssa antaa

$$1 \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\gamma'(s)|^2\,ds \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\,\widehat{\gamma'}\,(n)|^2 \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2\,|c_n|^2. \tag{7.5}$$

Toisaalta (7.4) $\Rightarrow$

$$2|\Omega| \;=\; \left|\mathrm{Im}\int_0^{2\pi} \gamma'(s)\,\overline{\gamma(s)}\,ds\right| \;=\; 2\pi\Big|\mathrm{Im}\,(\,\gamma', \gamma\,)_{L^2(0,2\pi)}\Big| \;=\; 2\pi\left|\mathrm{Im}\,(\sum_{n=-\infty}^{\infty} i\,n\,c_n\,\overline{c_n})\right|,$$

missä viimeinen identiteetti käyttää Parsevalin Lausetta 6.5. Saamme siten

$$2|\Omega| \;=\; 2\pi \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\,|c_n|^2 \right| \;\le\; 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2\,|c_n|^2 \;=\; 2\pi \tag{7.6}$$

eli toisin sanoen

$$|\Omega| \;\le\; \pi \;=\; \frac{(2\pi)^2}{4\pi} \;=\; \frac{L^2}{4\pi}.$$

Isoperimetrinen epäyhtälö on siis todistettu. Lisäksi yhtäsuuruus pätee (7.6):ssa $\Rightarrow c_n = 0$ aina kun $|n| < n^2$, eli kun $|n| > 1$. Ja tällä ehdolla, jos yhtäsuuruus pätee (7.6):ssa,

$$\Big|\, |c_1|^2 \;-\; |c_{-1}|^2 \,\Big| \;=\; |c_1|^2 + |c_{-1}|^2;$$

on siis oltava joko $c_1 = 0$ tai $c_{-1} = 0$. Näin yhtäsuuruus pätee isoperimetrisessä epäyhtälössä vain jos

$$\gamma(s) \;=\; c_0 + c_1 e^{is} \qquad \text{tai} \qquad \gamma(s) \;=\; c_0 + c_{-1}e^{-is}, \qquad s \in [0, 2\pi].$$

Molemmissa tapauksissa reunakäyrä on ympyrä. □

VII.2. Esimerkki sovelluksista differentiaaliyhtälöihin. Palataan Johdanto-luvun lämpöyhtälöön, joka esiteltiin Esimerkissä 1.2. Kuten sielläkin, tarkastelemme lämmön johtumista tangossa, jonka pituus on L. Merkintöjen yksikertaistamiseksi oletamme, että $L = \pi$.

Tangon päätepisteissä $x = 0$ ja $x = \pi$ vaaditaan, että lämpötila on koko ajan 0^o, ja lisäksi oletetaan että alkuhetkellä $t = 0$ tangon lämpöjakauma on $f(x)$, $0 \le x \le \pi$.

Tehtävänä on siis määrätä lämpöjakauma $u(x,t)$, hetkellä t ja pisteessä $x \in [0,\pi]$, kun tiedetään, että u toteuttaa yhtälöt

$$\partial_t u(x,t) \;=\; c_0\, \partial_x^2 u(x,t), \qquad x \in [0,\pi],\; t > 0, \tag{7.7}$$

$$u(x,0) \;=\; f(x), \qquad x \in [0,\pi], \tag{7.8}$$

$$u(0,t) \;=\; u(\pi,t) \;\equiv\; 0, \qquad t > 0. \tag{7.9}$$

Selvitetään ratkaisu useassa vaiheessa ja samalla myös ratkaisun luonnetta vähän pohtien.

1^o) Ennenkuin edes aloitamme ratkaisun hakemisen, meidän on päätettävä ainakin seuraavat asiat:

(i) Mitä tarkoitetaan derivaatoilla yhtälössä (7.7) ?

Lämpöyhtälön tapauksessa voimme vaatia että $\partial_t u(x,t)$ ja $\partial_x^2 u(x,t)$ ovat olemassa ja jatkuvia $\forall\, t > 0$ ja $x \in [0,\pi]$, välin päätepisteissä derivaatat tietysti vain toispuoleisia; merkitään

$$u(\cdot,t) \in C^2[0,\pi] \quad \forall\, t > 0, \qquad u(x,\cdot) \in C^1(0,\infty) \quad \forall\, x \in [0,\pi]. \tag{7.10}$$

HUOM: Esim. aaltoyhtälölle $\partial_t^2 u = c\,\partial_x^2 u$ vaatimus (7.10) olisi mahdoton, jos alkuarvolla $f(x)$ on singulariteettejä. Diff. yhtälö on silloin tulkittava heikkoina ratkaisuina tms.

(ii) Mitä oletetaan alkuarvosta $f(x)$?

Vaadimme, että $f \geq 0$ [luonn. fysiikan vaatimus] ja että $f \in L^2(0,\pi)$ [lievä oletus f:stä]. Saamme uuden kysymyksen:

(iii) Mitä tarkoittaa ehto $u(x,0) = f(x)$? Eli missä mielessä $u(x,t) \to f(x)$ kun $t \to 0$?

Vaaditaan

$$\int_0^\pi |u(x,t) - f(x)|^2\, dx \;\to\; 0, \qquad \text{kun } t \to 0. \tag{7.11}$$

eli halutaan että $u(\cdot,t) \to f$ L^2-normin mielessä, kun $t \to 0$.

Seuraavana vaiheena selvitetään:

2^o) Ratkaisun yksikäsitteisyys. Jos u_1 ja u_2 yhtälöiden (7.7) – (7.9) ratkaisuja, jotka toteuttavat kohdan 1^o) vaatimukset, olkoon silloin

$$v \;:=\; u_1 - u_2 \qquad \Rightarrow \quad v(\cdot,t) \in C^2[0,\pi] \subset L^2(0,\pi) \quad \forall\, t > 0.$$

Käyttäen ehtoa (7.11) ja Minkowskin epäyhtälöä saadaan "energia"integraalille

$$E(t) := \int_0^\pi |v(x,t)|^2\,dx \;\to\; 0, \qquad \text{kun } t \to 0. \tag{7.12}$$

Oletus (7.10) taas kertoo, että $E(t)$ on jatkuvasti derivoituva, kun $t > 0$; siispä

$$\frac{d}{dt}E(t) = \int_0^\pi \partial_t\, v(x,t)^2\,dx = 2\int_0^\pi v(x,t)\,\partial_t v(x,t)\,dx = 2c_0\int_0^\pi v(x,t)\partial_x^2 v(x,t)\,dx$$

kun sovellamme yhtälöä (7.7). Nyt voimme integroida osittain, jolloin saadaan

$$\frac{d}{dt}E(t) = \Big|_0^\pi v(\cdot,t)\partial_x v(\cdot,t) - 2c_0\int_0^\pi \left[\partial_x v(x,t)\right]^2\,dx$$

Koska sijoitustermi häviää oletettujen reunaehtojen (7.9) vuoksi, $\frac{d}{dt}E(t) \le 0$, eli $t \mapsto E(t)$ on vähenevä. Mutta $0 \le E(t) \to 0$ kun $t \to 0$, mikä antaa yksikäsitteisyyden,

$$E(t) \equiv 0 \qquad \Rightarrow \quad u_1(x,t) = u_2(x,t), \qquad x \in [0,\pi],\; t > 0.$$

Yleisemminkin, yo. energia-estimaatit ovat tyypillisiä *parabolisille* diff. yhtälöille, joiden prototyyppi lämpöyhtälö on. Toisaalta tämän argumentin kautta myös alkuarvon L^2-oletus ja tulkinta (7.11) tulevat luonnollisiksi.

3^o) Dirichlet ominaiskanta operaattorille $Tg := g''$. Jos

$$g \in C^1[0,\pi] \quad \text{ja} \quad g(0) = g(\pi) = 0 \tag{7.13}$$

kuten reunaehdossa (7.9), jatketaan $g(x)$ välille $[-\pi, 0]$ peilaamalla, s.o. vaatimalla

$$g(-x) = -g(x), \qquad x \in [-\pi,\pi].$$

Silloin g on pariton ja yhä $g \in C^1[-\pi,\pi]$ (MIKSI ?). Erityisesti, g voidaan kirjoittaa (pisteittäin suppenevana; muista Dini-ehto) sarjana

$$g(x) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{g}(n) e^{inx} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx) \tag{7.14}$$

missä $A_n = 2i\,\widehat{g}(n) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\sin(nx)\,dx$ (vrt. HT 1/Teht. 3). Kääntäen, jokainen termi $A_n \sin(nx)$ summassa (7.14) toteuttaa ehdot (7.13). Siis (7.14) on **luonnollinen** tapa esittää välin $[0, \pi]$ C^1-funktioita, joille pätee reunaehto $g(0) = g(\pi) = 0$!

Tämä havainto voidaan asettaa yleisempään yhteyteen seuraavalla tulkinnalla: $\{sin(nx)\}_{n\geq 1}$ on operaattorin $Tg := g''$ *ominaiskanta Dirichlet reuna-ehdoilla* $g(0) = g(\pi) = 0$, avaruudessa $L^2(0, \pi)$. K.o. Fourier kannalle pätee seuraava Plancherelin lauseen versio.

Lemma 7.2. *Jos* $f \in L^2(0, \pi)$ *ja merkitään* $A_n(f) := \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\,dx$, $n \geq 1$, *silloin*

$$\int_0^\pi |f(x) - \sum_{n=1}^{N} A_n(f)\sin(nx)|^2\,dx \;\to 0$$

ja

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi |f(x)|^2\,dx \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} |A_n(f)|^2.$$

Todistus. Laajennetaan f peilaamalla välille $[-\pi, \pi]$, eli asetetaan $f(-x) = -f(x)$, ja sovelletaan laajennukseen Lausetta 6.4; yksityiskohdat (HT 6). □

[HUOM: Periaatteessa $L^2(0, \pi)$:ssa voisi käyttää myös täydellistä ON-kantaa $\{e^{2inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, mutta se ei ota huomioon reunaehtoa $g(0) = g(\pi) = 0$, ja siksi tarvittavista laskuista ja arvioista tulisi paljon hankalampia.]

4^o) Yleisen ratkaisun etsiminen yhtälölle (7.7). Etsimme lämpöyhtälölle ratkaisuja, joille $x \mapsto u(x, t)$ kuuluu luokkaan (7.13). Yo. keskustelun mukaan sellaisten pitäisi olla summa funktioista

$$u_n(x, t) = A_n(t)\sin(nx). \tag{7.15}$$

On järkevää vaatia, että kukin tekijä u_n erikseen toteuttaa lämpöyhtälön - menetelmää kutsutaan muuttujien separoinniksi. Sijoittamalla (7.15) lämpöyhtälöön nähdään, että kertoimien $A_n(t)$ tulee toteuttaa differentiaaliyhtälö $A_n'(t) \;=\; -\,c_0\,n^2\,A_n(t)$, mistä

$$A_n(t) = A_n(0)\,e^{-\,c_0\,n^2\,t}, \qquad t > 0.$$

Jokainen u_n toteuttaa (7.7):n $\;\Rightarrow$ saman pitäisi toimia summalle

$$u(x,t) = \sum_n u_n(x,t) \sim \sum_n A_n(0)\,e^{-c_0\,n^2\,t}\,\sin(nx). \tag{7.16}$$

Mutta mistä saamme kertoimet $A_n(0)$? Ne antaa alkuehto $u(x,t) \to f(x)$ kun $t \to 0$, kunhan sovelletaan Lemmaa 7.2 ja kehitetään f sarjana

$$f(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} A_n\,\sin(nx), \qquad \text{missä } A_n \;=\; A_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx. \tag{7.17}$$

Määritellään nyt:

$$u(x,t) \;:=\; \sum_{n=1}^{\infty} A_n(f)e^{-\,c_0\,n^2\,t}\,\sin(nx), \qquad t > 0,\; x \in [0,\pi]. \tag{7.18}$$

5^o) <u>Kaavan (7.18) funktio on etsitty ratkaisu</u>. Merkintöjen yksinkertaistamiseksi oletetaan, että $c_0 = 1$; tähän voi aina päästä aikaa skaalaamalla.

(i) Lemmasta 7.2 seuraa, että kun $t \geq t_0 > 0$ ja $k \in \mathbb{N}$,

$$\sup_n |A_n(f)|\,|n|^k e^{-n^2\,t} \;\leq\; \|f\|_{L^2} \sup_n |n|^k\,e^{-n^2\,t_0} \;\leq\; C_k < \infty, \tag{7.19}$$

joten sarja (7.18) suppenee kaikkine derivaattoineen tasaisesti joukossa $\{(x,t) : x \in [0,\pi], t \geq t_0\}$. Erityisesti $u(x,t)$ hyvin määritelty, jatkuva ja jopa C^∞-funktio joukossa $[0,\pi] \times (0,\infty)$.

(ii) Reunaehdot $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ toteutuvat, sillä tasaisen suppenemisen vuoksi voimme sijoittaa $x = 0$ ja $x = \pi$ suoraan kaavaan (7.18).

(iii) Samoin tasaisen suppenemisen vuoksi voimme vaihtaa summauksen ja derivoinnin järjestystä,

$$\partial_t u(x,t) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} -n^2 A_n(f)\, e^{-n^2 t} e^{inx} \;=\; \partial_x^2 u(x,t), \qquad \forall\, t > 0,\; x \in [-\pi, \pi],$$

eli funktio $u(x,t)$ todellakin toteuttaa lämpöyhtälön, kun $t > 0$.

(iv) Jäljelle jää vielä alkuehto (7.8), joka siis tulkitaan muodossa (7.11). Tämä seuraa helposti; funktion $x \mapsto u(x,t)$ Fourier kertoimet kannassa $\{sin(nx)\}_{n\geq 1}$ ovat $A_n(f)\, e^{-n^2 t}$, joten Lemman 7.2 mukaan

$$\|u(\cdot,t) - f\|^2_{L^2(0,\pi)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\, A_n(f)\,|^2\, |e^{-n^2 t} - 1|^2$$

$$\leq \sum_{|n|\geq N} |\, A_n(f)\,|^2 \;+\; \sum_{|n|\leq N} |\, A_n(f)\,|^2\, (1 - e^{-n^2 t})^2$$

Ensimmäinen termi $< \varepsilon$ kun N riittävän suuri; ja kun N kiinnitetty, jälkimmäinen tekijä $< \varepsilon$ kun $t = t(N)$ riittävän pieni. Näillä valinnoilla $\|u(\cdot,t) - f\|^2_{L^2(0,\pi)} \leq 2\varepsilon$ kun $0 < t < \delta$.

Lämpöyhtälölle on näin löydetty yksikäsitteinen ratkaisu halutuilla reuna- ja alkuarvoilla (7.7) - (7.9). $\square$

HUOMAUTUS 7.3. *Edellä esitetty argumenttimme yhdistettynä Planchereliin/Lemmaan 7.2 näyttää, että lämpöyhtälön ratkaisulle* (7.18) *on*

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi |u(x,t)|^2\, dx \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_n(f)|^2\, e^{-2n^2 t} \;\to\; 0, \quad \textit{kun}\;\; t \to \infty.$$

Tällä on selvä fysikaalinen tulkinta; lämpö karkaa tangon molemmista päistä, joista sitä jäähdytetään $[u(0,t) = u(\pi,t) = 0]$*, ja siksi tanko jäähtyy lopulta kokonaan.*

Seuraava havainto antaa vielä syvemmän tai tarkemman kuvan ratkaisun $u(x,t)$ luonteesta. Kaavan (7.18) mukaan

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n(f) e^{-n^2 t} \sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(y) \sin(ny)\, dy\, e^{-n^2 t} \sin(nx) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(y) \left[\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \sin(ny) \sin(nx) \right] dy = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(y) K_t(x,y)\, dy, \end{aligned}$$

missä

$$K_t(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \sin(ny) \sin(nx), \qquad 0 \le x, y \le \pi,\ 0 < t, \tag{7.20}$$

on *lämpöydin* (engl.: Heat kernel) Dirichlet reuna-arvoilla.

[MIKSI yllä saattoi vaihtaa summauksen ja integroinnin järjestyksen ?]

Taas K_t:tä esittävä sarja suppenee derivaattoineen tasaisesti kun $t \ge t_0 > 0$, joten $K_t(x,y)$ on jokaisen (kolmen) muuttujansa suhteen C^∞-funktio; ja esityksestä $u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(y) K_t(x,y)\, dy$ kaikki u:n ominaisuudet nopeasti seuraavat.

Entä jos halutaan luopua nolla reuna-arvoista tangon $[0,\pi]$ päissä ja vaatia esim. että $u(0,t) = a$ ja $u(\pi,t) = b$ jokaisena ajanhetkenä $t > 0$?

Merkitään nyt $f_0(x) = b\frac{x}{\pi} + a(1 - \frac{x}{\pi})$ sekä asetetaan

$$u(x,t) = f_0(x) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \big[f(y) - f_0(y) \big] K_t(x,y)\, dy,$$

joka on etsitty ratkaisu (MIKSI ?).

Vaikka yllä saatiin varsin hyvä kuva lämpöyhtälön ratkaisuista, useampikin luonnollinen kysymys jäi vielä avoimeksi:

KYSYMYS 7.4. *Jos (7.8):n alkuarvo $f(x)$ on jatkuva välillä $[0,\pi]$ ja $f(0) = f(\pi) = 0$, onko silloin $u(x,t) \to f(x)$ jokaisessa pisteessä $x \in [0,\pi]$ kun $t \to 0$?*

Eli voidaanko tällöin u laajentaa jatkuvasti reunalle $\{t = 0\}$ asti ? Silloin alkuehto $u(x,0) = f(x)$ olisi voimassa tavallisessa pisteittäisessä mielessä.

Kysymys 7.5. *Entä jos* $f \in L^2(0,\pi)$, *voiko normikonvergenssin* (7.11) *parantaa ehdoksi* $u(x,t) \to f(x)$ *melkein kaikilla* $x \in [0,\pi]$ *?*

Näitä kysymyksiä varten meidän on ymmärrettävä operaattorin

$$f \mapsto \frac{2}{\pi}\int_0^\pi K_t(x,y)\, f(y)\, dy$$

ja lämpöytimen $K_t(x,y)$ käytöstä kun $t \to 0$. Käy ilmi, että (geometrisesti luonnollinen) Dirichlet lämpöydin $K_t(x,y)$ on mukava korvata *periodisella lämpöytimellä* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 t} e^{inx} e^{-iny}$, jonka toiminta palautuu konvoluutio-operaatioksi. Asetetaan

$$H_t(x) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 t}\, e^{inx}. \tag{7.21}$$

Silloin (HT 6, Tehtävä 1) osoittaa, että

$$(H_t * f)(x) \;=\; \frac{2}{\pi}\int_0^\pi K_t(x,y)\, f(y)\, dy, \qquad \text{kun } f \in L^2(-\pi,\pi) \text{ pariton ja } x \in [0,\pi].$$

Kysymykset 7.4 – 7.5 palautuvat näin ytimien $\{H_t\}_{t>0}$ ominaisuuksien selvittämiseen ! Siis:

Onko $\{H_t\}_{t>0}$ perhe hyviä ytimiä ?

Keskiarvo $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_t(x)\, dx = 1$ (MIKSI ?), mutta muut hyvien ytimen ominaisuudet ovat vähemmän selviä. Välillä $[0,\pi]$ funktio $u(x,t) = (H_t * f)(x)$ kuvaa lämpöjakaumaa ja siksi tulisi olla $H_t(x) \geq 0$, mutta tätä on vaikea osoittaa suoraan sarjasta (7.21).

Hieman yllättäen, positiivisuuteen kuin myös useampaan muuhun lämpöytimen ominaisuuteen tarvitaan $\mathbb{R}$:n jatkuvaa Fourier muunnosta !

Palataan siksi yo. kysymyksiin uudestaan kurssin loppupuolella.

VIII. Diskreetti Fourier Muunnos (DFT)

Numeriikassa, signaalin käsittelyssä tai monissa muissa käytännön Fourier-sovelluksissa tarvitaan diskretisoitujen funktioiden Fourier-muunnoksia.

Esimerkki 8.1. *Jatkuva-aikaista signaalia* $x(t)$ *approksimoidaan tai sämplätään diskreettiaikaisella jonolla* $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$*,*

$$\ldots,\, x_{-2},\, x_{-1},\, x_0,\, x_1,\, x_2,\, x_3,\ldots$$

Sopivin oletuksin (vrt. C^∞-funktioiden Fourier sarjat tai L^2-teoria) luvut ovat jonkun funktion Fourier kertoimet. Signaalille saadaan silloin taajuusesitys

$$X(\omega) \;=\; \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k e^{ik\omega}, \qquad \omega \in [0,2\pi].$$

[Tarvittaessa voidaan myös valita vaikkapa $\omega \in (\omega_0-\pi, \omega_0+\pi)$ tarkasteltavaksi taajuusväliksi.] Käytännön tilanteissa hallitaan tai voidaan käsitellä kuitenkin vain äärellistä määrää taajuuksia, esim. taajuudet $\omega_j = \frac{j}{N}2\pi$, $j = 0,1,\ldots,N-1$.

KYSYMYS: Kuinka voimme rakentaa näistä taajuuksista Fourier analyysin, joka antaisi signaalille hyvän ja tehokkaan approksimaation ? Tilanteen analysoimiseksi tarvitaan *Diskreetti Fourier muunnos.*

Taajuudet

$$\mathbb{Z}(N) := \{\frac{j}{N}\,2\pi, \quad j = 0,1,\ldots,N-1\}$$

muodostavat (Abelin) ryhmän. On siis hyvä rakentaa $\mathbb{Z}(N)$:n Fourier analyysi ryhmärakenteen kanssa yhteensopivaksi ! (Muista tässä eksponenttifunktioiden homomorfismiominaisuudet, joista puhetta mm. muistiinpanojen sivuilla 1-2.)

Mietitään ensin muutamia sopivia realisaatioita ko. ryhmälle.

Ryhmä $\mathbb{Z}(N)$. Merkitään $\eta := e^{2\pi i/N}$. Jos $z \in \mathbb{C}$ ja $z^N = 1$ (eli z on jokin ykkösen N:s juuri), silloin $z = e^{2\pi i \frac{k}{N}} = \eta^k$ jollakin $k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ (MIKSI ?). Siis

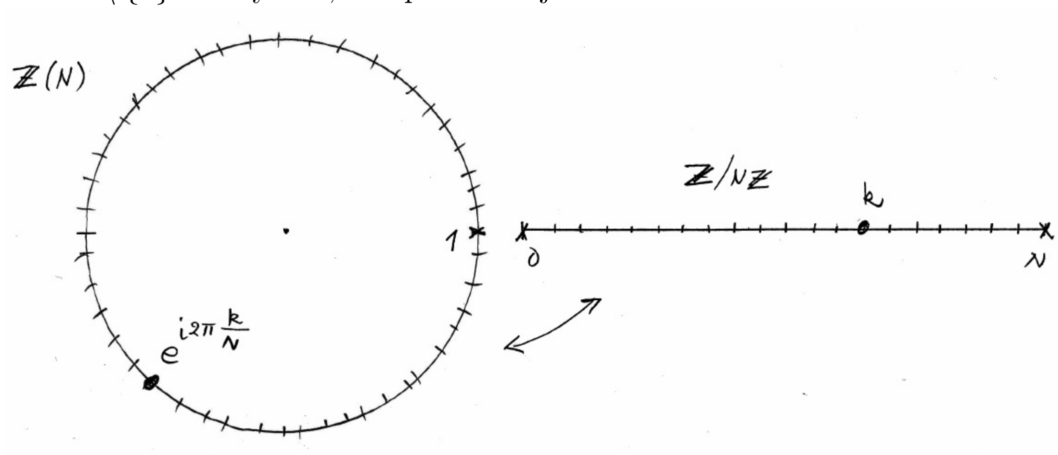
$$z^N = 1 \;\Leftrightarrow\; z \in \mathbb{Z}(N) := \{1, e^{2\pi i \frac{1}{N}}, \ldots, e^{2\pi i \frac{N-1}{N}}\} \quad = \quad \{\eta^k : k = 0, 1, \ldots, N-1\}.$$

Huomataan:

$$z,\ w \in \mathbb{Z}(N) \;\Rightarrow\; z\,w \in \mathbb{Z}(N),\ \ \frac{1}{z} \in \mathbb{Z}(N) \ \text{ ja } \ 1 \in \mathbb{Z}(N).$$

Siis ykkösen N:nnet juuret $\mathbb{Z}(N)$ muodostavat syklisen ryhmän, virittäjänä $\eta = e^{2\pi i/N}$.

Yo. ryhmä on $\mathbb{C} \setminus \{0\}$:n aliryhmä, kompleksilukujen *tulon* suhteen.



Ryhmä $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Kun asetetaan $\mathbb{Z}$:n ekvivalenssirelaatio

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; x = y \pmod{N} \ \text{ eli } x - y \in N\mathbb{Z},$$

ja merkitään $[x] = \{n \in \mathbb{Z} : x \sim n\}$, saadaan $[x + y] = [x] + [y]$ ja edelleen että $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} := \{[k] : k \in \mathbb{Z}\}$ on ryhmä yo. yhteenlaskun suhteen.

[Algebran kurssilta: $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} := \mathbb{Z}_N$ jäännösluokkaryhmä (modulo N).]

Lemma 8.2. *Kuvaus* $[k] \mapsto e^{2\pi i \frac{k}{N}}$ *on ryhmä-isomorfismi* $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}(N)$.

Samaistetaan $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_N = \mathbb{Z}(N)$. Ko. ryhmien funktioille ehto $F(k) = f(e^{2\pi i \frac{k}{N}})$ antaa luonnollisen vastaavuuden

$$F : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C} \quad \leftrightarrow \quad f : \mathbb{Z}(N) \to \mathbb{C}.$$

KYSYMYS: Kun teemme Fourier analyysiä $\mathbb{Z}(N)$:ssä, mitkä ovat eksponenttifunktioiden e^{inx} luonnolliset vastineet ? Halutaan vastineet ainakin seuraaville perusominaisuuksille:

(i) $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ on ON-kanta avaruudessa $L^2(-\pi,\pi)$.

(ii) Trigonometriset polynomit $\{\sum_{n=-k}^{k} a_k e^{inx}\}$ tiheässä $L^2(-\pi,\pi)$:ssä.

(iii) $e^{in(x+y)} = e^{inx}e^{iny}$.

MÄÄRITELMÄ 8.3. *Asetetaan* $e_\ell : \mathbb{Z}(N) \to \mathbb{S}^1$ *kaavalla*

$$e_\ell(k) \;=\; e^{2\pi i \frac{\ell k}{N}} \;=\; \eta^{\ell k}, \qquad \textit{kun}\;\; k,\ell = 0,1,\dots,N-1; \quad \textit{tässä}\; \eta \;=\; e^{2\pi i \frac{1}{N}}.$$

[muista samaistus $\mathbb{Z}(N) = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$]. Selvästi $e_\ell(k+m) = e_\ell(k)e_\ell(m)$, eli vaatimus (iii) täyttyy. Entä (i) ja (ii) ?

Huomataan, että $V = V_N := \{F : \mathbb{Z}(N) \to \mathbb{C}\}$ on $\mathbb{C}$-kertoiminen vektoriavaruus, sisätulona

$$(F,G) \;=\; \sum_{k=0}^{N-1} F(k)\,\overline{G(k)},$$

ja siten normina $\|F\| = \left(\sum_{k=0}^{N-1} |F(k)|^2\right)^{1/2}$. Erityisesti, $V \simeq \mathbb{C}^N$.

LEMMA 8.4. *Perhe* $\{e_0, e_1, \dots, e_{N-1}\}$ *on ortogonaali avaruudessa* V_N,

$$(e_\ell, e_m) \;=\; N\delta_{\ell,m}$$

Todistus. $(e_\ell, e_m) = \sum_{k=0}^{N-1} e_\ell(k)\,\overline{e_m(k)} = \sum_{k=0}^{N-1} \eta^{k\ell}\,\overline{\eta^{km}} = \sum_{k=0}^{N-1} \eta^{k(\ell-m)}$, mistä nähdään että $(e_\ell, e_m) = N$ kun $\ell = m$, ja

$$(e_\ell, e_m) \;=\; \sum_{k=0}^{N-1} \eta^{k(\ell-m)} = \frac{1-\eta^{N(\ell-m)}}{1-\eta^{(\ell-m)}} = 0,$$

mikäli $\ell \neq m$ (MIKSI?). $\square$

Erityisesti, koska $\dim V = N \Rightarrow \{\frac{e_0}{\sqrt{N}}, \dots, \frac{e_{N-1}}{\sqrt{N}}\}$ on V:n ortonormaali kanta. Silloin jokainen $F : \mathbb{Z}(N) \to \mathbb{C}$ voidaan esittää summana

$$F = \sum_{n=0}^{N-1} \left(F, \frac{e_n}{\sqrt{N}} \right) \frac{e_n}{\sqrt{N}} \tag{8.1}$$

Määritelmä 8.5. *Funktion $F : \mathbb{Z}(N) \to \mathbb{C}$ Fourier kertoimet ovat*

$$\widehat{F}(n) := \frac{1}{N}(F, e_n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) e^{-2\pi i \frac{n\,k}{N}}, \qquad n = 0, 1, \dots, N-1. \tag{8.2}$$

Voimme näin tulkita (8.1):n seuraavassa muodossa

Lause 8.6. *Jos $F : \mathbb{Z}(N) \to \mathbb{C}$ mielivaltainen funktio, silloin $F = \sum_{n=0}^{N-1} \widehat{F}(n)\, e_n$. Siis*

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \widehat{F}(n)\, e_n(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \widehat{F}(n) e^{2\pi i \frac{n\,k}{N}}, \qquad k = 0, 1, \dots N-1. \tag{8.3}$$

Lisäksi Plancherelin lause pätee,

$$\sum_{n=0}^{N-1} |\widehat{F}(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |F(k)|^2.$$

Todistus. Ensimmäinen väite seuraa kaavasta (8.1). Plancherelin lause taas seuraa Lemmasta 8.4, sillä sen mukaan

$$\sum_{k=0}^{N-1} |F(k)|^2 = (F, F) = \left(\sum_n \widehat{F}(n)\, e_n, \sum_\ell \widehat{F}(\ell)\, e_\ell \right) = N \sum_n |\widehat{F}(n)|^2. \qquad \square$$

Kaavat (8.2) - (8.3) antavat systemaattisen tavan tehdä diskreettiä Fourier analyysiä.

VIII.1. Nopea Fourier muunnos (FFT). Diskreetin Fourier muunnoksen numeerisissa implementoinneissa, kun funktio $F : \mathbb{Z}(N) \to \mathbb{C}$ eli luvut $F(0), F(1), \dots, F(N-1)$ on annettu, Fourier kertoimien

$$\widehat{F}(n) \;=\; \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F(k)\, e^{-2\pi i \frac{k\,n}{N}}, \qquad n = 0, 1, \dots, N-1, \tag{8.4}$$

suoraviivainen laskeminen vaatii liikaa laskutoimituksia; ensin $N-2$ kertolaskua jotka antavat luvut $e^{-2\pi i \frac{k\,n}{N}}$, ja sen jälkeen jokaista indeksiä $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ kohden N+1 kertolaskua ja N-1 yhteenlaskua, siis yhteensä laskutoimituksia on $2N^2 + N - 2 = \mathcal{O}(N^2)$ kappaletta.

Nopean Fourier muunnoksen avulla laskunopeutta voi huomattavasti parantaa.

LAUSE 8.7. *Jos $N = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, silloin funktion $F : \mathbb{Z}(N) \to \mathbb{C}$ Fourier kertoimet voi laskea*

$$4N \log_2(N) = \mathcal{O}(N \log N)$$

laskutoimituksella.

Todistus. Otetaan käyttöön merkinnät

$$a_k^N(F) = \widehat{F}(k), \quad \text{kun } F : \mathbb{Z}(N) \to \mathbb{C},$$

ja $\omega_N = e^{-2\pi i \frac{1}{N}}$. Silloin $\omega_{2M}^{2\ell} = e^{-2\pi i \frac{2\ell}{2M}} = \omega_M^{\ell}$.

Kun $F : \mathbb{Z}(2M) \to \mathbb{C}$, asetetaan funktiot $F_0,\ F_1 : \mathbb{Z}(M) \to \mathbb{C}$ seuraavasti,

$$F_0(r) = F(2r) \qquad \text{ja} \qquad F_1(r) = F(2r+1), \qquad r = 0, 1, \dots, M-1.$$

Ehdon (8.4) nojalla

$$\begin{aligned} a_k^{2M}(F) \;&=\; \frac{1}{2M}\sum_{r=0}^{2M-1} F(r)\,\omega_{2M}^{k\,r} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M}\sum_{\ell=0}^{M-1} F(2\ell)\omega_{2M}^{k2\ell} + \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} F(2m+1)\omega_{2M}^{k(2m+1)}\right) \\ &=\; \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M}\sum_{\ell=0}^{M-1} F_0(\ell)\omega_M^{k\ell} + \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} F_1(m)\omega_M^{km}\,\omega_{2M}^{k}\right) = \frac{1}{2}\left[a_k^M(F_0) \,+\, \omega_{2M}^k\, a_k^M(F_1)\right]. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Olkoon sitten $\#(M)$ (pienin mahd.) lukumäärä laskutoimituksia, joilla kertoimet a_k^M voidaan laskea, $k = 0, 1, \ldots, M-1$. Silloin

(i) Luvut ω_{2M}^k saadaan 2M kertolaskulla (tästä saadaan myös $\omega_M = \omega_{2M}^2$).

(ii) Niinpä laskut (8.5) $\Rightarrow$ $\#(2M) \leq 2M + 2\#(M) + 3 \cdot 2M = 2\#(M) + 8M$.

(iii) Väitämme, että $\#(2^n) \leq 4\,n\,2^n$; tämä todistetaan induktiolla:

Kun $n = 1$, eli $N = 2$,

$$a_0^N(F) = \frac{1}{2}\big(F(0) + F(1)\big), \qquad a_1^N(F) = \frac{1}{2}\big(F(0) - F(1)\big),$$

ja ko. luvut saadaan 5:llä laskutoimituksella, missä $5 < 4 \cdot 1 \cdot 2^1 = 8$.

Jos induktio-oletus toimii indeksille $n-1$, eli $\#(2^{n-1}) \leq 4(n-1)2^{n-1}$, silloin kohdan (ii) avulla nähdään että $\#(2^n) \leq 2\#(2^{n-1}) + 8 \cdot 2^{n-1} \leq 4(n-1)2^n + 4 \cdot 2^n = 4\,n\,2^n$. Induktiotodistus on siis valmis, ja niinpä $\#(N) \leq 4\,N\,\log_2(N)$, kun $N = 2^n$. $\square$

Yo. laskut myös antavat eksplisiittisen algoritmin

$$a_k^{2M}(F) \;=\; \frac{1}{2}\left[a_k^M(F_0) \;+\; \omega_{2M}^k\, a_k^M(F_1)\right], \qquad k = 0, 1, \ldots, 2M-1; \quad M = 2^n,$$

Fourier kertoimien laskemiseen. Tässä huomaa, että $a_k^M(F_j) = a_{k+M}^M(F_j)$, $j = 0, 1$.

VIII.2. Fourier analyysistä äärellisillä ryhmillä. Jos G on äärellinen Abelin ryhmä (eli äärellinen kommutatiivinen ryhmä), G:n funktiota

$$e : G \;\to\; \mathbb{S}^1 \;=\; \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

kutsutaan G:n *karaktääriksi* jos $e(gh) = e(g)e(h)$ $\forall\, g,\, h \in G$ (eli jos $e : G \to \mathbb{S}^1$ ryhmähomomorfismi). Merkitään

$$\widehat{G} \;:=\; \{e : G \to \mathbb{S}^1 \text{ karaktääri }\}$$

ja kutsutaan $\widehat{G}$:tä ryhmän G *duaaliryhmäksi*; se on ryhmä pisteittäisen kertomisen suhteen.

Seuraavaksi asetetaan vektoriavaruuteen $V = \{f : G \to \mathbb{C} \text{ funktio}\}$ sisätulo

$$(f, h) \; = \; \frac{1}{\#(G)} \sum_{a \in G} f(a)\,\overline{h(a)}\,,$$

ja funktioiden $f : G \to \mathbb{C}$ Fourier muunnokset kuten kaavassa (8.2);

$$\widehat{f} : \widehat{G} \; \to \; \mathbb{C}, \qquad \widehat{f}(e) \; = \; (f, e) \; = \; \frac{1}{\#(G)} \sum_{a \in G} f(a)\,\overline{e(a)} \tag{8.6}$$

Lause 8.8. *Jos G on äärellinen Abelin ryhmä, silloin duaaliryhmä $\widehat{G}$ on vektoriavaruuden V ortonormaali kanta. Lisäksi jokaisella $f : G \to \mathbb{C}$,*

$$f = \sum_{e \in \widehat{G}} \widehat{f}(e) \cdot e$$

ja

$$\frac{1}{\#(G)} \sum_{a \in G} |f(a)|^2 \; = \; \sum_{e \in \widehat{G}} |\widehat{f}(e)|^2.$$

Sivuutamme todistuksen – se löytyy esimerkiksi Stein - Shakarchin kirjasta, Luku 7.2.

Lopuksi, jos G on äärellinen ryhmä mutta ei enää kommutatiivinen, karaktäärien joukko ei enää riitä Fourier analyysin perustaksi – tällöin karaktäärit tulee korvata ryhmän G *esityksillä*, homomorfismeilla

$$e : G \; \to \; L(W)$$

missä W on (äärellisulotteinen) vektoriavaruus ja $L(W)$ sen lineaarikuvausten ryhmä (kuvausten yhdistämisen suhteen). Tällä tavalla Lauseelle 8.8 saadaan vastine kaikkiin äärellisiin ryhmiin, Plancherelin identiteetti mukaan lukien. Ja nk. Haarin mitan avulla summaus (8.6):ssa voidaan korvata integroinnilla, jolloin Fourier analyysiä päästään tekemään jatkuvilla ryhmillä, kuten Lien ryhmillä ...... mutta tämä on jo oma tarinansa !

IX. Jatkuva Fourier muunnos $\mathbb{R}^d$:ssä

Kurssin toisen osan tehtävänä on rakentaa Fourier analyysi, joka soveltuu funktioiden $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ analysoimiseen.

Mikä olisi tähän paras lähestymistapa ? Luvun VIII ajatusten mukaisesti, Fourier analyysi (yleensäkin) pyrkii esittämään funktiot karaktäärien avulla. Mitkä silloin ovat $\mathbb{R}^d$:n karaktäärit, s.o. funktiot $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ joille

$$g(x+y) = g(x)g(y), \qquad x, y \in \mathbb{R}^d. \tag{9.1}$$

Jos oletamme, että g on myös jatkuvasti derivoituva (voi näyttää, ettei tämä ole rajoitus), silloin derivoimalla (9.1) saadaan

$$\frac{\partial}{\partial y_j} g(x+y) = g(x) \frac{\partial}{\partial y_j} g(y),$$

josta kun $y \to 0$, $\frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = a_j\, g(x)$, missä $a_j = \frac{\partial g}{\partial y_j}(0)$, $\quad j = 1, \ldots, d$. Integroimalla nämä differentiaaliyhtälöt pitkin paloittain koordinaattiakselien suuntaisia polkuja saadaan

$$g(x) = Ce^{a_1 x_1} e^{a_2 x_2} \cdots e^{a_d x_d}, \qquad x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Mutta (9.1) $\Rightarrow g(0) = g(0)^2$ ja $g(0) \neq 0$, joten $g(0) = 1$ ja siis $C = 1$. Koska $|g(x)| \equiv 1$, on $a_j = i\xi_j$, missä $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$. Siis $\mathbb{R}^d$:n karaktäärit ovat (täsmälleen !) funktiot

$$g(x) = e^{i\,\xi \cdot x}, \qquad \xi \in \mathbb{R}^d, \qquad \text{missä } \xi \cdot x \;=\; \sum_{j=1}^{d} \xi_j x_j. \tag{9.2}$$

Huomaamme, että erona periodiseen tapaukseen, jossa $\mathbb{Z}$ parametrisoi karaktäärit e^{inx}, nyt karaktäärejä on jatkumon verran ja ne parametrisoidaan vektoreilla $\xi \in \mathbb{R}^d$. Tämän vuoksi Fourier sarjojen summaus pitää vaihtaa integroinniksi (yli $\mathbb{R}^d$:n). Haluamme siis esittää funktiot $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ hajotelmana

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} W(\xi)\, e^{i\,\xi \cdot x}\, d\xi, \qquad \text{missä } d\xi = d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_d. \tag{9.3}$$

Yllä integrointi siis d-ulotteisen Lebesguen mitan suhteen. Riittää enää selvittää mistä saadaan kertoimet $W(\xi)$. Käy ilmi, että nämä saadaan Fourier muunnoksena f:stä (kuten vast. periodisessakin tapauksessa), $W(\xi) = \widehat{f}(\xi)$, jolloin (9.3):n Fourier hajotelmasta tulee

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\, e^{i\,\xi\cdot x}\, d\xi.$$

Mutta tämän todistaminen (ja tulkitseminen silloin kun $\widehat{f}(\xi) \notin L^1(\mathbb{R}^d)$!) vaatii valmistelevia tarkasteluja. Lähdetään siksi liikkeelle perusmääritelmästä:

IX.1. Jatkuvan Fourier muunnoksen perusominaisuudet; L^1-funktiot.

MÄÄRITELMÄ 9.1. *Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 1$. Silloin f:n* **Fourier muunnos***, merkitään $\widehat{f}$ tai $\mathcal{F}f$, on funktio*

$$\mathcal{F}f(\xi) \;=\; \widehat{f}(\xi) \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-i\,\xi\cdot x}\, dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{9.4}$$

Huomaa, että $|f(x)\, e^{-i\,\xi\cdot x}| = |f(x)| \in L^1(\mathbb{R}^d)$, joten Fourier muunnos $\widehat{f}(\xi)$ on hyvin määritelty nyt *jokaisella* $\xi \in \mathbb{R}^d$. Tässä on olennaista, että $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Uutena erona periodiseen tapaukseen, esimerkiksi kaavan (9.4) integrointi ei olekaan enää määritelty kaikilla $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Siksi L^2-funktioiden Fourier muunnos tulee vaatimaan uuden tulkinnan, ja silloin yleiselle L^2-funktiolle, Fourier muunnos $\widehat{f}(\xi)$ on määritelty vain melkein kaikkialla !

Entä jos $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$? Tai jos $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$? Palaamme näihin kaikkiin kysymyksiin myöhemmin.

Lähdetään sitten selvittämään Fourier-muunnoksen perusominaisuuksia.

LAUSE 9.2. *Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ja $\alpha \in \mathbb{R}^d$.*

(i) Jos $g(x) = f(x+\alpha)$, silloin $\widehat{g}(\xi) = e^{i\alpha\cdot\xi}\,\widehat{f}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^d$.

(ii) Jos $g(x) = e^{i\alpha\cdot x}\, f(x)$, silloin $\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi - \alpha)$, $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Todistus. Kohdassa (i) muuttujan vaihto antaa $\widehat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x+\alpha)\, e^{-i\,\xi\cdot x}\, dx = e^{i\alpha\cdot\xi} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-i\,\xi\cdot x}\, dx$. Kohta (ii) saadaan vastaavasti, $\widehat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-i\,\xi\cdot x}\, e^{i\alpha\cdot\xi}\, dx$ $\square$

Toisin sanoen, Fourier muunnos muuttaa translaation karaktäärillä kertomiseksi ja päinvastoin. Tällaisia duaalisia operaatioita tai Fourier muunnos symmetrioita on monia muitakin, kts. alla.

LAUSE 9.3. *Jos $f,\, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, silloin konvoluutio $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ja*

$$\widehat{(f*g)}\,(\xi) \;=\; \widehat{f}(\xi)\,\widehat{g}(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Todistus. Konvoluution kuuluminen avaruuteen $L^1(\mathbb{R}^d)$ kerrataan Appendix-luvussa, vrt. (A.1.4). Konvoluution Fourier muunnoksen taas voi laskea Fubinin lauseen avulla,

$$\begin{aligned}\widehat{(f*g)}\,(\xi) \;&=\; \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\,\xi\cdot x} \Big[\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy\Big]\,dx \\ &=\; \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\,\xi\cdot y}\, g(y) \Big[\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\, e^{-i\,\xi\cdot(x-y)}\,dx\Big]\,dy \;=\; \widehat{f}(\xi)\,\widehat{g}(\xi). \qquad \square\end{aligned}$$

Kun Fourier muunnos muuttaa konvoluution tuloksi, onko tälläkin operaatiolla käänteinen versio, so. onko tulon Fourier muunnos konvoluutio? Pulmana on tietysti se että $f(x)g(x) \notin L^1(\mathbb{R}^d)$ joillakin L^1-funktioilla f ja g, eikä tulon Fourier muunnosta voi siksi ottaa ainakaan tässä yhteydessä. Palataan käänteiskysymykseen tilanteissa joissa tulon kanssa voi operoida.

Muita esimerkkejä perusominaisuuksista ja symmetrioista:

LAUSE 9.4. *Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.*

(i) *Jos* $g(x) \;=\; \overline{f(-x)}$, *silloin* $\widehat{g}(\xi) \;=\; \overline{\widehat{f}(\xi)}$.

(ii) *Jos* $g(x) \;=\; \frac{1}{t^d} f\big(\frac{x}{t}\big)$, $t > 0$, *silloin* $\widehat{g}(\xi) \;=\; \widehat{f}(t\,\xi)$.

(iii) *Jos* $|x|f(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, *silloin* $\widehat{f}(\xi) \in C^1(\mathbb{R}^d)$ *ja*

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j}\widehat{f}(\xi) = \left(\widehat{-ix_j f}\right)(\xi) \tag{9.5}$$

(iv) *Jos* $|f(x)| \le \frac{C}{1+|x|^d}$ *ja* $\partial_j f \in C(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$, $j = 1, \ldots, d$, *silloin*

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) \;=\; i\,\xi_j\,\widehat{f}(\xi). \tag{9.6}$$

Todistus. Kaksi ensimmäistä väitettä jätetään harjoitustehtäviksi. Kolmannessa derivaattojen jatkuvuus seuraa Riemann-Lebesguen lemmasta, Lauseesta 9.5 alla; osoitetaan tässä derivaattojen olemassaolo ja identiteetti (9.5):

Kun $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$,

$$\frac{\widehat{f}(\xi + he_j) - \widehat{f}(\xi)}{h} = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{-i\,x\cdot(\xi+he_j)} - e^{-i\,x\cdot\xi}}{h} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{-i\,x_j h} - 1}{-ix_j h}(-ix_j)\,f(x)\,e^{-i\,x\cdot\xi}\,dx$$

Tässä

$$\left|\frac{e^{-i\,x_j h} - 1}{-ix_j h}\right| \le 1, \qquad \left|e^{-i\,x\cdot\xi}\right| \equiv 1 \qquad \text{ja} \;\; x_j f(x) \in L^1(\mathbb{R}^d).$$

Voimme siis ottaa raja-arvon $h \to 0$, ja dominoidun konvergenssin lauseen nojalla vaihtaa raja-arvon ja integroinnin järjestyksen. Tämä todistaa (9.5):n.

Viimeiseen väitteeseen (iv) käytetään osittaisintegrointia. Koska $\partial_j f \in L^1(\mathbb{R}^d)$,

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) \;=\; \lim_{R\to\infty} \int_{B(0,R)} e^{-i\,x\cdot\xi}\,\frac{\partial f}{\partial x_j}\,dx,$$

missä

$$\int_{B(0,R)} e^{-i\,x\cdot\xi}\frac{\partial f}{\partial x_j}\,dx \;=\; \int_{B(0,R)} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(e^{-i\,x\cdot\xi}\,f(x)\right)\,dx + \int_{B(0,R)} i\xi_j e^{-i\,x\cdot\xi}\,f(x)\,dx.$$

Stokes'n kaavan mukaan

$$\left|\int_{B(0,R)} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(e^{-i\,x\cdot\xi}\,f(x)\right)\,dx\right| \;=\; \left|\int_{\partial B(0,R)} e^{-i\,x\cdot\xi}\,f(x)\,e_j\cdot\nu\,d\sigma\right| \le \frac{C_1}{1+|R|^d}R^{d-1} \to 0,$$

kun $R \to \infty$. Tässä σ on pallon pintamitta ($d-1$ ulotteinen Lebesguen mitta) ja $\nu(x)$ ulkonormaali pallon pinnan pisteessä x. Viimeiselle termille taas

$$\lim_{R\to\infty} \int_{B(0,R)} i\xi_j e^{-i\,x\cdot\xi}\, f(x)\, dx \;=\; i\,\xi_j\, \widehat{f}(\xi)$$

ja väite (iv) on näin tullut todistetuksi. $\square$

Entä millainen on L^1-funktion Fourier muunnos ?

LAUSE 9.5. *Jos $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, silloin*

- $\widehat{f}(\xi)$ *on jatkuva $\mathbb{R}^d$:ssä,*
- $\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)| = \|\widehat{f}\|_\infty \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\, dx$
- $\widehat{f}(\xi) \;\to\; 0$ *kun* $|\xi| \to \infty$ *(Riemann-Lebesguen lemma).*

Todistus. Koska $|\widehat{f}(\xi)| \;=\; \left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-i\,\xi\cdot x}\, dx\right| \;\le\; \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\, dx \;=\; \|f\|_{\mathbb{R}^d}$, keskimmäinen väite pätee. Jatkuvuuteen, jos jono $\xi_n \to \xi$, arvioidaan $\left|f(x)\, e^{-i\,\xi_n\cdot x}\right| \le |f(x)| \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ja silloin dominoidun konvergenssin lauseesta seuraa

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{f}(\xi_n) \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-i\,\xi_n\cdot x}\, dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-i\,\xi\cdot x}\, dx \;=\; \widehat{f}(\xi).$$

Jäljelle jää Riemann-Lebesguen lemman osuus. Tähän, kullakin $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ merkitään $w = w_\xi = \frac{\xi}{|\xi|} \in \mathbb{S}^1$. Koska $e^{i\pi} = -1$,

$$\widehat{f}(\xi) \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-i\,\xi\cdot x}\, dx \;=\; -\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-i\,\xi\cdot(x-\pi\frac{w}{|\xi|})}\, dx \;=\; -\int_{\mathbb{R}^d} f(x+\pi\frac{w}{|\xi|})\, e^{-i\,\xi\cdot x}\, dx$$

Siten

$$2|\widehat{f}(\xi)| \;=\; \left|\int_{\mathbb{R}^d} \left[f(x) - f(x+\pi\frac{w}{|\xi|})\right]\, e^{-i\,\xi\cdot x}\, dx\right| \;\le\; \int_{\mathbb{R}^d} \left|f(x) - f(x+\pi\frac{w}{|\xi|})\right|\, dx \to 0$$

kun $|\xi| \to \infty$; tässä olemme hyödyntäneet reaalianalyysia, Appendixin Lausetta A.1.7. $\square$

Huomautus 9.6. *Jos määritellään*

$$C_0(\mathbb{R}^d) := \{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \quad jatkuva, \quad ja \quad f(y) \to 0 \quad kun \quad |y| \to \infty\} \tag{9.7}$$

silloin $C_0(\mathbb{R}^d)$ *varustettuna normilla* $\|f\|_\infty = \sup_{y\in\mathbb{R}^d} |f(y)|$ *on täydellinen, so. Banach avaruus* (Harjoitustehtävä).

Tällä merkinnällä, vrt. Appendix A.2, voimme tulkita Lauseen 9.5 muodossa: Fourier muunnos on jatkuva lineaarinen operaattori

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \to C_0(\mathbb{R}^d), \qquad ja\ operaattorinormi \ \ \|\mathcal{F}\| \leq 1. \tag{9.8}$$

Itse asiassa (Harjoitustehtävä), yo. avaruuksissa pätee $\|\mathcal{F}\| = 1$.

IX.2. Käänteinen Fourier muunnos. Tässä osaluvussa osoitamme, että mikäli molemmat $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ja Fourier muunnos $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, silloin

$$f(x) \; = \; \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\, e^{i\,\xi\cdot x}\, d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}^d. \tag{9.9}$$

Toisin sanoen, Fourier muunnoksen käänteisoperaattori on itsekin Fourier muunnos, muuttujan etumerkkiä ja tekijää $(2\pi)^d$ vaille , $\big(\mathcal{F}^{-1}\widehat{f}\,\big)(x) = (2\pi)^{-d}\big(\mathcal{F}\widehat{f}\,\big)(-x)$.

Todistuksen ideana on ensin osoittaa (9.9) jollekin (konkreettiselle) funktiolle g. Sitä skaalaamalla ja konvoloimalla päästään sitten käsiksi yleisiin L^1-funktioihin.

Funktioksi g on monia hyviä valintoja; ehkä kaikkein mukavin on kuitenkin gaussinen tapaus,

$$g(x) \; = \; e^{-|x|^2} \quad (= \; e^{-x\cdot x}\,), \qquad x \in \mathbb{R}^d. \tag{9.10}$$

Selvästi sekä g, $|x|g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ että $\partial_{x_j} g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ja $|g(x)| = g(x) \leq C(1+|x|^d)^{-1}$. Silloin Lauseen 9.4 mukaan $\widehat{g} \in C^1(\mathbb{R}^d)$ ja

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j}\, \widehat{g}(\xi) \; = \; \big(\widehat{-ix_j g}\big)\,(\xi) \; = \; i \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\,\xi\cdot x}\,(-x_j)\, e^{-|x|^2}\, dx$$

$$= \frac{i}{2}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\,\xi\cdot x}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\,\left(e^{-|x|^2}\right)\,dx \;=\; -\frac{1}{2}\,\xi_j\,\widehat{g}(\xi), \quad j = 1,\ldots,d,$$

missä viimeinen yhtäsuuruus seuraa Lauseen 9.4 kohdasta (iv).

Gaussinen funktion Fourier muunnos siis toteuttaa joukon differentiaaliyhtälöitä; näistä se on helppo määrätä. Koska $\widehat{g} \in C^1(\mathbb{R}^d)$ ja yo. laskun mukaan

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j}\,\left(e^{\frac{1}{4}|\xi|^2}\,\widehat{g}(\xi)\right) \;\equiv\; 0, \quad j = 1,\ldots,d,$$

on välttämättä

$$\widehat{g} \;=\; C\,e^{-\frac{1}{4}|\xi|^2}, \qquad \xi \in \mathbb{R}^d,$$

jollakin vakiolla C.

On vielä määrättävä vakio C. Huomataan, että

$$C \;=\; \widehat{g}(0) \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2}\,dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} e^{-x_1^2}e^{-x_2^2}\ldots e^{-x_d^2}\,dx_1\cdots dx_d \;=\; \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\,dt\right)^d.$$

Toisaalta napakoordinaattien avulla

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\,dt \;=\; \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{-t_1^2-t_2^2}\,dt_1dt_2\right)^{1/2} \;=\; \left(\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\,r\,drd\theta\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{2\pi}\left(\Big|_0^{\infty}(-\frac{1}{2})\,e^{-r^2}\right)^{1/2} \;=\; \sqrt{\pi}$$

Olemme siis osoittaneet, että $\widehat{g}(\xi) = \pi^{d/2}\,e^{-\frac{1}{4}|\xi|^2}$ kun $g(x) = e^{-|x|^2}$. Yhdistämällä tämä Lauseen 9.4 kohtaan (ii) saadaan

$$\left(e^{-t|x|^2}\right)^{\wedge}(\xi) \;=\; (\pi/t)^{d/2}\,e^{-\frac{1}{4t}|\xi|^2}, \qquad \xi \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0. \tag{9.11}$$

Kun valitaan $t = 1/2$ nähdään, että funktio $g(x) = e^{-\frac{1}{2}|x|^2}$ on Fourier muunnoksen ominaisvektori, ominaisarvolla $(2\pi)^{d/2}$!

Myöhempiä tarpeita varten kirjataan tähän myös yo. päättelyn sivutulos,

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-t|x|^2}\,dx = (\pi/t)^{d/2}, \qquad t > 0. \tag{9.12}$$

Palataan sitten L^1-funktioiden Fourier muunnoksen kääntämiseen. Tarvitsemme siihen seuraavan helpon mutta yllättävän tehokkaan identiteetin, jota käytetään monessa muussakin yhteydessä. Tätä identiteettiä voi ajatella vaikkapa Plancherelin lauseen esiversiona.

LAUSE 9.7. *Jos f, $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, silloin*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\widehat{g}(x)\,dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\,g(\xi)\,d\xi.$$

Todistus. Koska Lauseen 9.4 mukaan $\widehat{g}$, $\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, yo. integraalit ovat hyvin määriteltyjä. Edelleen $f(x)g(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, ja silloin Fubinin lauseen mukaan

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\widehat{g}(x)\,dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,g(\xi)\,e^{-i\xi\cdot x}\,d\xi dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\,g(\xi)\,d\xi. \qquad \Box$$

"Parannetaan" Lausetta 9.7 vielä hieman korvaamalla $f(x)$ funktiolla $F(x) := f(y-x)$; silloin $\widehat{F}(\xi) = e^{-i\xi\cdot y}\widehat{f}(-\xi)$. (MIKSI ?)

Saamme uuden identiteetin

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(y-x)\,\widehat{g}(x)\,dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi\cdot y}\widehat{f}(-\xi)\,g(\xi)\,d\xi$$

eli

$$(f * \widehat{g})(y) \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\xi\cdot y}\widehat{f}(\xi)\,g(-\xi)\,d\xi, \qquad f,\, g \in L^1(\mathbb{R}^d). \tag{9.13}$$

Näillä eväin L^1-Fourier teorian perustulos, käänteinen Fourier muunnos, seuraa helposti:

LAUSE 9.8. *Jos sekä $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ että $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, silloin*

$$f(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\,e^{i\,\xi\cdot x}\,d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}^d. \tag{9.14}$$

Todistus. Käytämme identiteettiä (9.14) missä valitaan $g(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\, e^{-t^2|x|^2}$. Silloin (9.11) $\Rightarrow\ \widehat{g}(x) = \frac{1}{t^d} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\, e^{-\frac{1}{4}|\frac{x}{t}|^2} = \frac{1}{t^d} K(\frac{x}{t}) = K_t(x)$, missä

$$K(x) = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\, e^{-\frac{1}{4}|x|^2}. \tag{9.15}$$

Kun $t \to 0$, $g(x) \to \frac{1}{(2\pi)^d}$ ja silloin dominoidun konvergenssin avulla [tässä käytetään ehtoa $|e^{i\xi\cdot y} \widehat{f}(\xi)\, g(-\xi)| \le |\widehat{f}(\xi)| \in L^1(\mathbb{R}^d)$!] yhtälön (9.14) oikea puoli

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\xi\cdot y} \widehat{f}(\xi)\, g(-\xi)\, d\xi \ \to\ \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\xi\cdot y} \widehat{f}(\xi)\, d\xi \qquad \text{kun } t \to 0.$$

Toisaalta yhtälön (9.14) vasenta puolta voi tarkastella Lauseen A.1.3 avulla. Lauseen mukaan löydämme jonon lukuja $t_j > 0$, joille $t_j \to 0$ kun $j \to \infty$ ja

$$(f * \widehat{g})(y) = (K_{t_j} * f)(y) \to f(y) \qquad \text{melkein kaikilla } y \in \mathbb{R}^d \qquad \text{kun } j \to \infty.$$

Väite (9.14) on näin tullut todistetuksi. □

HUOMAUTUS 9.9. *Yllä olevasta nähdään, että avaruudessa $L^1(\mathbb{R}^d)$ voi rakentaa varsin tyydyttävän ja intuitiivisesti luontevan Fourier teorian, jossa Fourier muunnoksen pisteittäiset tulkinnat selviä. Mutta muutamia pulmia meille jää:*

Lauseen 9.5 mukaan L^1-funktioiden Fourier muunnokset ovat jatkuvia, joten käänteiskaavan (9.14) *molemmat oletukset f, $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ voivat olla voimassa vain jos $f(x)$ on jatkuva !*

(Erityisesti, Lauseen 9.8 tilanteessa voimme valita f:lle jatkuvan edustajan, vaikka emme f:n jatkuvuutta olettaneetkaan; silloin identiteetti (9.14) on voimassa jokaisessa pisteessä $x \in \mathbb{R}^d$.)

Toisin sanoen, jos ja kun haluamme hyödyntää Fourier analyysiä myös epäjatkuviin funktioihin, tarvitsemme pisteittäisen $\widehat{f}(\xi)$:n yleistyksiä ja Fourier teoriaa L^1-avaruuksia yleisemmissä tilanteissa.

IX.3. Nopeasti vähenevät funktiot $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Ennen kuin menemme L^1-funktioita yleisempiin tapauksiin, on hyödyllistä ja jatkotarkasteluja helpottavaa tarkastella Fourier muunnosta n.k. nopeasti vähenevien funktioiden avaruudessa.

Muistamme Fourier sarjojen teoriasta, että L^2-avaruuden ohella oli toinenkin funktioluokka, joka pystyttiin karakterisoimaan puhtaasti Fourier kertoimien avulla: (HT 2, Tehtävä 5) osoitti että $f \in C^\infty_\#(-\pi,\pi)$ jos ja vain jos

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} (1+|n|)^k \, |\widehat{f}(n)| \; < \; \infty \qquad \text{kaikilla } k \in \mathbb{N}. \tag{9.16}$$

Haluamme jotain vastaavaa myös jatkuvalle Fourier muunnokselle.

Mutta voimme edelleen lisätä vaatimuksia; jos haluamme funktioluokan jossa tulon ja konvoluution Fourier-dualiteetti toimii täydellisesti, etsimämme avaruuden tulee olla suljettu tulon, konvoluution kuin myös Fourier muunnoksen suhteen. Ja jos haluamme, että derivoinnin ja polynomilla kertomisen Fourier-dualiteetti yhä pätee, luokan tulee olla suljettu samoin näiden operaatioiden suhteen. Kun vertaamme vaatimuksia Lauseen 9.4 oletuksiin näyttää siltä että meidän tulee vaatia, että etsimämme funktioluokka säilyy ainakin operaatioissa

$$f(x) \;\mapsto\; (1+|x|^2)f(x) \qquad \text{ja} \qquad f(x) \;\mapsto\; \frac{\partial}{\partial x_j} f(x), \qquad j = 1,\dots,d.$$

Pienin luokka joka nämä vaatimukset täyttää on *Schwartzin nopeasti vähenevien funktioiden* avaruus. Sen määrittelemistä varten tarvitsemme hieman lisää notaatioita.

Multi-indeksi on jono $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, s.o. $\alpha_j \in \mathbb{N}$ jokaisella $j = 1,\dots,d$. Multi-indeksin α *normi* on

$$|\alpha| \;=\; \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d \;\in \mathbb{N},$$

ja kahden multi-indeksin summa $\alpha + \beta = (\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \dots, \alpha_d+\beta_d) \in \mathbb{N}^d$. Edelleen, sanomme että $\beta \le \alpha$ mikäli $\beta_j \le \alpha_j$ jokaisella $j = 1,\dots,d$. Tässä tapauksessa myös erotus $\alpha - \beta$ on hyvin määritelty. Lisäksi merkitään

$$x^\alpha \;:=\; x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_d^{\alpha_d}\,, \qquad \text{kun } x = (x_j)_{j=1}^d \in \mathbb{R}^d,$$

sekä

$$\partial^\alpha \ = \ (\partial_{x_1})^{\alpha_1} \, (\partial_{x_2})^{\alpha_2} \cdots (\partial_{x_d})^{\alpha_d} \, , \qquad \partial_{x_j} \equiv \frac{\partial}{\partial_{x_j}} \, .$$

ESIMERKKI 9.10. *Olkoon* $d = 3$; *jos* $\alpha = (1,0,2)$ *silloin* $x^\alpha = x_1 \, x_3^2$ *ja* $|\alpha| = 1+0+2 = 3$; *jos taas* $\alpha = (3,1,2)$, *niin* $x^\alpha = x_1^3 \, x_2 \, x_3^2$, $|\alpha| = 6$ *ja* $\partial^\alpha f(x) = \partial_{x_1}^3 \, \partial_{x_2} \, \partial_{x_3}^2 f(x)$.

Siis esimerkiksi kahden muuttujan polynomi

$$P(s,t) = \sum_{n,m=1}^{N} c_{n,m} s^n t^m$$

esitetään multi-indeksien avulla muodossa $P(x) = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha$, missä $x = (s,t) \in \mathbb{R}^2$ ja $\alpha = (n,m) \in \mathbb{N}^2$, eli $s^n t^m \equiv (s,t)^{(n,m)}$. Vastaava esitys toimii tietysti myös yleisellä d :n muuttujan polynomilla.

MÄÄRITELMÄ 9.11. *Schwartzin nopeasti vähenevien funktioiden avaruus on*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : \sup_{|\alpha| \le N} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + |x|^2)^N \, |\partial^\alpha f(x)| \ < \ \infty, \ \ \textit{kaikilla } N \in \mathbb{N} \}.$$

Huomaa selvä analogia ehdon (9.16) kanssa; ja funktio f kuuluu Schwartzin luokkaan jos ja vain jos f:n kaikki derivaatat vähenevät äärettömyydessä nopeammin kuin mikä tahansa potenssi $|x|^{-N}$. Erinomainen esimerkki sellaisesta funktiosta on (Harjoitustehtävät)

$$f(x) \ = \ e^{-|x|^2}, \qquad x \in \mathbb{R}^d.$$

Koska *kompaktikantajaisten* C^∞*-funktioiden* luokka $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (MIKSI ?), nopeasti väheneviä funktioita $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ löytyy helposti paljon muitakin. Luokan $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ funktioita on kyllä helppo manipuloida, ja Lauseen 9.4 mukaan sellaisen Fourier muunnos

$$\widehat{g}(\xi) \ = \ \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \, e^{-i \, \xi \cdot x} \, dx \ \ \in \ C^\infty(\mathbb{R}^d),$$

mutta pulmana on, ettei Fourier muunnos *koskaan* säilytä luokkaa $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$,

$$0 \neq g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \;\Rightarrow\; \widehat{g}(\xi) \quad \text{ei ole kompaktikantajainen.} \tag{9.17}$$

Todistetaan tämä dimensiossa $d = 1$. Nimittäin jos g kompaktikantajainen, silloin Fourier muunnos $\widehat{g}(\xi)$ voidaan jatkaa analyyttiseksi funktioksi koko kompleksitasoon,

$$\widehat{g}(z) \;=\; \int_{-R}^{R} g(x)\, e^{-i\,z\,x}\, dx, \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{9.18}$$

sillä $|e^{-i\,z\,x}| \leq e^{R|z|}$ kun $|x| \leq R$; muunnoksen analyyttisyys nähdään nyt esim. kehittämällä eksponenttifunktio sarjaksi ja vaihtamalla summan ja integroinnin järjestys. [Analyyttisyyden voi osoittaa myös ottamalla integraalista (9.18) $\partial_{\bar{z}}$-derivaatta; derivoinnin ja integroinnin järjestyksen voi vaihtaa koska integraali suppenee lokaalisti tasaisesti z:n suhteen. Tai analyyttisyyden voi näytää vaikkapa Moreran lauseen avulla.]

Jos olisi $\widehat{g}(\xi) = 0$ kun $|\xi| > M$, silloin analyyttisen funktion $\widehat{g}(z)$ nollakohdilla olisi kasautumispisteitä, ja siis $\widehat{g}(\xi) \equiv 0$ sekä $g \equiv 0$ (Kurssi "Kompleksianalyysi I"). Vastaava päättely, joka käyttää analyyttisten useamman kompleksimuuttujan funktioiden ominaisuuksia, toimii kaikissa dimensioissa d.

Yhteenvetona, $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ ei ole hyvä tai luonnollinen avaruus Fourier analyysin kannalta. Tämän osaluvun tarkoituksena on osoittaa, että sen sijaan Schwartzin avaruus $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ toteuttaa *jokaisen* osaluvun alussa esitetyistä toivomuksista tai vaatimuksista. Aloitetaan seuraavalla.

LAUSE 9.12. *$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$ jokaisella $1 \leq p \leq \infty$. Lisäksi $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on tiheä avaruuksissa $L^p(\mathbb{R}^d)$, kun $1 \leq p < \infty$.*

Todistus. Inkluusio on harjoitustehtävä, ja tiheys seuraa siitä että $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ on tiheä avaruuksissa $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p < \infty$ (kts. [H], Lause 2.36). □

LAUSE 9.13. *Jos $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, silloin jokaisella multi-indeksillä $\alpha \in \mathbb{N}^d$ pätee*

(i) $x^\alpha f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *ja* $\partial^\alpha f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

(ii) $\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ *ja* $\partial^\alpha \widehat{f}(\xi) = \Big((-i\,x)^\alpha f(x) \Big)\widehat{\ }(\xi)$.

(iii) $(\partial^\alpha f)\widehat{\ }(\xi) \;=\; (i\,\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)$.

(iv) $\widehat{f} \;\in\; \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Todistus. Kohdat (ii) ja (iii) seuraavat Lauseen 9.4 vastaavista kohdista (iii) ja (iv). Muut väitteet (i) ja (iv) jätetään harjoitustehtäviksi. □

Erityisesti, Schwartzin funktiot voi karakterisoida Fourier muunnoksen avulla,

$$f \;\in\; \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \;\;\Leftrightarrow\;\; \widehat{f} \;\in\; \mathcal{S}(\mathbb{R}^d). \tag{9.19}$$

Tai tarkemmin:

LAUSE 9.14. *Jos $f \;\in\; \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, silloin*

(i) $(2\pi)^d f(x) \;=\; \mathcal{F}\big(\,\widehat{f}\,\big)(-x)$, *eli* $(\mathcal{F}^2 f)\,(x) \;=\; (2\pi)^d f(-x)$, $x \in \mathbb{R}^d$.

(ii) $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \;\to\; \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *on bijektio.*

Todistus. Koska (Lause 9.13) $f, \widehat{f} \;\in\; \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$, Lauseen 9.8 mukaan $\mathcal{F}\big(\,\widehat{f}\,\big)(-x) \;=\; (2\pi)^d f(x)$. Tämän nojalla $\mathcal{F}^4 \;=\; \mathcal{F} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{F} \;=\; (2\pi)^{2d} Id$ on identtisen kuvauksen monikerta. Erityisesti $f \;=\; \mathcal{F}\big(\,(2\pi)^{-2d}\,\mathcal{F}^3 f\,\big)$, missä $\mathcal{F}^3 f \;\in\; \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Siten $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on surjektio.

Sama identiteetti näyttää, että $\mathcal{F}(f) = 0 \Rightarrow f = 0$. Fourier muunnoksen lineaarisuuden nojalla $\mathcal{F}$ on silloin injektio. □

Huomautus 9.15. *Lauseen 9.14 kohdan (i) voi tietysti tulkita myös muodossa*

$$\big(\mathcal{F}^{-1}g\big)(x) = (2\pi)^{-d}\big(\mathcal{F}g\big)(-x), \qquad g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ x \in \mathbb{R}^d.$$

Tarkistetaan vielä tulon ja konvoluution Fourier-dualiteetti.

Lause 9.16. *Jos f ja $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, silloin tulo $fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*

Todistus. Väite seuraa Leibnitzin säännöstä

$$\partial^\alpha(fg)(x) \;=\; \sum_{\beta\le\alpha} c_{\alpha,\beta}\,\partial^\beta f(x)\,\partial^{\alpha-\beta}g(x); \quad c_{\alpha,\beta} \;=\; \prod_{j=1}^{d}\binom{\alpha_j}{\beta_j}. \qquad \square$$

Lause 9.17. *Jos f, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, silloin*

(i) $\mathcal{F}(f*g) \;=\; \mathcal{F}(f)\cdot\mathcal{F}(g)$.

(ii) $\mathcal{F}(f\,g) \;=\; (2\pi)^{-d}\,(\mathcal{F}f)*(\mathcal{F}g)$.

Todistus. Ensimmäinen tulos seuraa Lauseesta 9.3, sillä $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$. Toiseen väitteeseen taas sovelletetaan Lausetta 9.3 kerran ja Lausetta 9.14 kahdesti, jotka tässä järjestyksessä antavat

$$\mathcal{F}\big(\,\mathcal{F}f*\mathcal{F}g\,\big) \;=\; \big(\mathcal{F}^2f\big)\,\big(\mathcal{F}^2g\big) \;=\; (2\pi)^{2d}\,f(-x)\,g(-x) \;=\; (2\pi)^d\big(\mathcal{F}^2(f\,g)\big) \;=\; \mathcal{F}\big((2\pi)^d\mathcal{F}(f\,g)\big)$$

sillä $fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ edellisen Lauseen nojalla. Koska $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \;\to\; \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on injektio, myös toinen väite on tullut todistetuksi. $\square$

X. Fourier muunnos avaruudessa $L^2(\mathbb{R}^d)$

Palataan sitten L^1-Fourier teorian yleistyksiin. Aloitetaan avaruudesta $L^2(\mathbb{R}^d)$ - tavoitteena karakterisoida L^2-funktiot Fourier muunnoksen avulla. Fourier sarjojen teoriassa tämä onnistui mainiosta. Haemme vastaavaa tulosta jatkuvan Fourier muunnoksen tapauksessa:

Teoreema 10.1. *Jokaiseen $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ voi liittää luonnollisen Fourier muunnoksen, funktion $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, jolla seuraavat ominaisuudet.*

(i) *Jos $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, silloin "uusi $\mathcal{F}$ = vanha $\mathcal{F}$",*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-i\,\xi\cdot x}\, dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

(ii) *Jokaiselle $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ pätee*

$$(2\pi)^{d/2}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\widehat{f}\,\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Erityisesti, $\|\widehat{f} - \widehat{g}\,\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = (2\pi)^{d/2}\|f - g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ kaikilla $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$; siten $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ on jatkuva (itse asiassa, homeomorfismi).

(iii) *Kaikille f, $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ on voimassa*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\, \overline{\widehat{g}(\xi)}\, d\xi = (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx.$$

(iv) *Kuvaus $f \mapsto \widehat{f}$ on lineaarinen bijektio $L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$;*
Erityisesti, jokainen $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ on muotoa $f = \widehat{g}$, $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

(v) $$\Big\| \widehat{f}(\xi) - \textstyle\int_{B(0,M)} f(x)\, e^{-i\,\xi\cdot x}\, dx \Big\|_{L^2(d\xi)} \to 0 \quad \text{kun } M \to \infty \quad \text{ja} \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

(vi) *Kääntäen, jos $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, silloin*

$$\Big\| f(x) - \tfrac{1}{(2\pi)^d} \textstyle\int_{B(0,M)} \widehat{f}(\xi)\, e^{i\,\xi\cdot x}\, d\xi \Big\|_{L^2(dx)} \to 0 \quad \text{kun } M \to \infty.$$

Nämä kuusi ehtoa antavat varsin täydellisen kuvan Fourier muunnoksesta avaruudessa $L^2(\mathbb{R}^d)$. Ne antavat myös vihjeen siitä miten L^2-funktion Fourier muunnos tulee täsmällisesti määritellä: Ehdon (v) mukaan

$$\widehat{f}(\xi) := \lim_{M\to\infty} \int_{B(0,M)} f(x)\, e^{-i\,\xi\cdot x}\, dx, \tag{10.1}$$

missä suppeneminen tapahtuu L^2*-normin mielessä.*

Koska $f\chi_{B(0,M)} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ jokaisella $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ (MIKSI ?), ovat integraalit ehdossa (10.1) hyvin määriteltyjä; kuitenkin, jotta voisimme asettaa (10.1):n muunnoksen $\widehat{f}$ määritelmäksi, meidän on ensin näytettävä, että raja-arvo (10.1):ssä on olemassa kun $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Teoreemaa 10.1 varten todistetaan ensin seuraava erikoistapaus Plancherelin kaavasta.

LEMMA 10.2. *Jos* $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *ja* $f(x) = 0$ *kun* $|x| \geq M$*, silloin*

$$(2\pi)^d \int_{\{|x|\leq M\}} |f(x)|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi \tag{10.2}$$

Todistus. Olkoon ensin $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ funktio, joka häviää kuulan $B(0,M)$ ulkopuolella; erityisesti $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Lauseen 9.14 kohdan (ii) mukaan löytyy funktio $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ jolle $\widehat{g}(x) = \overline{f(x)}$, $x \in \mathbb{R}^d$, mistä esim. Lauseen 9.8 mukaan

$$(2\pi)^d\, g(x) = (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{g}(\xi) e^{i\,\xi\cdot x}\, d\xi = (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(\xi)} e^{i\,\xi\cdot x}\, d\xi = (2\pi)^d\, \overline{\widehat{f}(x)}.$$

Sijoitetaan nämä identiteetit Lauseeseen 9.7, ja saadaan

$$(2\pi)^d \int_{\{|x|\leq M\}} |f(x)|^2\, dx = (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \widehat{g}(x)\, dx = (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\, g(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi.$$

Yleisessä tapauksessa valitaan ensin kompaktikantajainen $K \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, jolle $\int_{\mathbb{R}^d} K(x)\, dx = 1$. Voimme olettaa, että K:n kantaja kuuluu yksikkökuulaan, so. $K(x) = 0$

kun $|x| \geq 1$. Merkitään sitten $K_t(x) = \frac{1}{t^d} K\left(\frac{x}{t}\right)$, jolloin Harjoitukset $\Rightarrow \{K_t\}_{t>0}$ on hyvä perhe ytimiä $\mathbb{R}^d$:ssä. Lisäksi, koska f on kompaktikantajainen, konvoluutio

$$K_t * f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K_t(x-y) f(y)\, dy \ \in \ C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Tässä tosin funktion $K_t * f$ kantaja kuuluu kiekkoon $B(0, M+t)$, mutta korvaamalla M esim. $M+1$:llä ja valitsemalla $0 < t < 1$, voimme näin soveltaa ylläesitettyä funktioon $K_t * f$, ja saadaan

$$(2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} |(K_t * f)(x)|^2\, dx \ = \ \int_{\mathbb{R}^d} |(\,\widehat{K_t * f}\,)(\xi)|^2\, d\xi \ = \tag{10.3}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{K_t}(\xi)|^2 |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi \ = \ \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{K}(t\xi)|^2 |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi.$$

Hyvän perheen ominaisuuksien nojalla (Harjoitukset) tai käyttämällä suoraan Reaalianalyysiä, vrt. Appendix (A.1.6), yhtälön (10.3) vasen puoli $\to (2\pi)^d \int_{\{|x| \leq M\}} |f|^2\, dx$ kun $t \to 0$.

Yhtälön oikean puolimmaiseen termiin on ehkä mukavinta soveltaa dominoitua konvergenssia: Ensin Fatoun lemman nojalla nähdään helposti (MITEN?) että $|\widehat{f}(\xi)| \ \in \ L^2(\mathbb{R}^d)$ ja siis $|\widehat{K}(t\xi)|^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 \ \leq \ \|\widehat{K}\|_\infty^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 \ \in \ L^1(\mathbb{R}^d)$. Dominoidun konvergenssin lauseen mukaan silloin yhtälön (10.3) viimeinen termi $\to \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{K}(0)|^2 |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi$, sillä $\widehat{K}(0) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x)\, dx \ = \ 1$. Väite (10.2) on näin todistettu. $\square$

Pääsemme sitten Luvun X varsinaiseen päätulokseen.

Teoreeman 10.1 todistus. Jos $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, asetetaan kullakin $M < \infty$

$$f_M(x) \ := \ \chi_{B(0,M)}(x) f(x).$$

Silloin f_M toteuttaa Lemman 10.2 oletukset jokaisella $M < \infty$. Lisäksi $\{f_M\}_{M<\infty}$ on Cauchy $L^2(\mathbb{R}^d)$:ssä,

$$\|f_M - f_N\|_{L^2}^2 \ \leq \ \int_{|x| > \min\{M,N\}} |f(x)|^2\, dx \to 0, \qquad \text{kun } M, N \to \infty.$$

Koska Lemman 10.2 mukaan $\|\widehat{f_M} - \widehat{f_N}\|_{L^2} = (2\pi)^{d/2}\|f_M - f_N\|_{L^2} \to 0$, myös $\{\, \widehat{f_M} \,\}$ on Cauchy $L^2(\mathbb{R}^d)$:ssä, ja koska $L^2(\mathbb{R}^d)$ on täydellinen, on olemassa raja-arvo $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$,

$$\widehat{f}(\xi) \;:=\; \lim_{M\to\infty} \widehat{f_M}(\xi) \;=\; \lim_{M\to\infty} \int_{B(0,M)} f(x)\, e^{-i\,\xi\cdot x}\, dx. \tag{10.4}$$

Kuten edellä yhtälössä (10.1) ennakoitiin, raja-arvo yllä siis suppenee L^2-normin mielessä.

Tällä tavalla olemme saaneet määriteltyä Fourier muunnoksen $\widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ jokaisella funktiolla $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. On vielä näytettävä, että muunnos toteuttaa kaikki luonnolliset vaatimukset (i) - (vi). Nämä saadaan helposti:

(i) Jos $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, silloin dominoidun konvergenssin nojalla

$$\widehat{f_M}(\xi) \;=\; \int_{B(0,M)} f(x)\, e^{-i\,\xi\cdot x}\, dx$$

suppenee sekä pisteittäin että L^2-normin mielessä, kun $M \to \infty$. Raja-arvojen tulee olla sama funktio m.k. $\xi \in \mathbb{R}^d$, sillä jokaisella L^2-normin suhteen suppenevalla jonolla on osajono, joka suppenee pisteittäin, vrt. [H] Lause 1.3.4, tai Lauseen A.1.3 todistus.
Väite (i) on siis todistettu.

(ii) Lemman 10.2 nojalla

$$(2\pi)^{d/2}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \;=\; \lim_{M\to\infty} (2\pi)^{d/2}\|\chi_{B(0,M)} f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \;=\; \lim_{M\to\infty} \|\widehat{f_M}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \;=\; \|\widehat{f}\,\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

(iii) Avaruuden $L^2(\mathbb{R}^d)$ sisätulolle $(f,g) = (f,g)_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} f\,\overline{g}\,dx$ [kuten jokaisen Hilbert avaruuden sisätulolle] pätee

$$2\,\Re e(f,g) \;=\; \|f+g\|_{L^2}^2 - \|f\|_{L^2}^2 - \|g\|_{L^2}^2.$$

Yhdistämällä tämä kohtaan (ii) saadaan $\Re e(\,\widehat{f}\,, \widehat{g}\,)_{L^2} = (2\pi)^d\, \Re e(f,g)_{L^2}$. Korvaamalla f funktiolla $-if$ saadaan vast. tulos sisätulojen imaginääriosille. Väite (iii) on näin selvitetty.

(iv) Koska edellisen kohdan nojalla Fourier muunnos $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ säilyttää L^2:n sisätulon [vakiota $(2\pi)^d$ vaille], riittää osoittaa, että $\mathcal{F}$ on $L^2(\mathbb{R}^d)$:n surjektio.

Kohdan (ii) mukaan kuva-avaruus $\mathcal{F}L^2(\mathbb{R}^d)$ on $L^2(\mathbb{R}^d)$:n täydellinen aliavaruus, vrt. Lause A.2.3, ja siten suljettu (MIKSI?). Koska $\mathcal{F}L^2(\mathbb{R}^d) \supset \mathcal{F}\Big(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\Big) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on myös tiheä, välttämättä $\mathcal{F}L^2(\mathbb{R}^d) = L^2(\mathbb{R}^d)$. Toinen mahdollisuus surjektiivisuuden todistamiseen on käyttää alla esitettävää kohtaa (vi) ja sen seurausta $f(x) = (2\pi)^{-2d}\big(\mathcal{F}^4 f\big)(x)$.

(v) Suoraan määritelmästä (10.4) seuraa että $\Big\| \widehat{f}(\xi) - \int_{B(0,M)} f(x)\, e^{-i\,\xi\cdot x}\, dx \Big\|_{L^2(d\xi)} \to 0$ kun $M \to \infty$ ja $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

(vi) Tämä väitteen voi tulkita sanovan, että $f(x) = (2\pi)^{-d}\mathcal{F}\big(\,\widehat{f}\,\big)(-x)$ m.k. $x \in \mathbb{R}^d$, kun $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ja $\mathcal{F}$ sekä $\widehat{f}$ merkitsevät ehdossa (10.4) annettua $L^2(\mathbb{R}^d)$:n Fourier muunnosta.

Mutta kohdan (i) ja Lauseen 9.14 mukaan väitteen identiteetti pätee tiheässä osajoukossa $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$. Silloin $T : f \mapsto (2\pi)^{-d}(\mathcal{F}^2 f)(-x) - f(x)$ on jatkuva lineaarinen kuvaus $L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ [vrt. kohta (ii)] joka häviää tiheässä osajoukossa; siis $T(f) = 0$ kaikilla $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, t.s. $f(x) = (2\pi)^{-d}\mathcal{F}\big(\,\widehat{f}\,\big)(-x)$ kun $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. $\square$

Huomautus 10.3. *Edellä määrittelimme L^2-funktion Fourier muunnoksen rajana*

$$\widehat{f}(\xi) := \lim_{M\to\infty} \int_{B(0,M)} f(x)\, e^{-i\,\xi\cdot x}\, dx, \tag{10.5}$$

missä suppeneminen toimii L^2-normin mielessä. Ehkä intuitiivisempi tapa olisi vaatia että (10.5):n raja-arvo pätee pisteittäin, melkein kaikilla $\xi \in \mathbb{R}^d$?

Kuten Fourier sarjojen teoriassa, melkein kaikissa pisteissä suppeneminen on totta, mutta samalla paljon syvällisempi asia, jonka todistaminen ei onnistu tällä kurssilla. Pulma on samanlainen kuin ennenkin - $\widehat{\chi_B} \notin L^1(\mathbb{R}^d)$, kun χ_B on yksikköpallon B karakteristinen funktio.

Toisaalta, esim. käyttämällä Appendixissä mainittua Reaalianalyysin tulosta (A.1.9), voi Fourier muunnosta lähestyä varsin helposti melkein jokaisessa pisteessä Fejer-tyyppisillä ytimillä operoiden (Harjoitustehtävä).

XI. Interpolaatio ja L^p-funktioiden Fourier muunnokset, $1 < p < 2$.

Edellisten lukujen nojalla

(11.1)
$$f \in L^1(\mathbb{R}^d) \;\Rightarrow \Big\| \widehat{f}(\xi) - \int_{B(0,M)} f(x)\, e^{-i\,\xi\cdot x}\, dx \Big\|_{L^\infty} \le \int_{|x|>M} |f(x)|\, dx \to 0 \quad (M\to\infty)$$

ja samoin

$$f \in L^2(\mathbb{R}^d) \;\Rightarrow \Big\| \widehat{f}(\xi) - \int_{B(0,M)} f(x)\, e^{-i\,\xi\cdot x}\, dx \Big\|_{L^2(d\xi)} \to 0 \quad (M\to\infty). \tag{11.2}$$

Jos $1 < p < 2$, avaruus $L^p(\mathbb{R}^d)$ on L^1:n ja L^2:n "välissä", joten jotain vastaavaa voisi sielläkin toivoa ?

Kun $1 < p < 2$,

$$\int_{\{x:|f(x)|>1\}} |f|\, dx \le \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p < \infty \quad \text{ja} \quad \int_{\{x:|f(x)|\le 1\}} |f|^2\, dx \le \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p < \infty,$$

joten voimme kirjoittaa $f = \chi_{\{|f(x)|>1\}} f + \chi_{\{|f(x)|\le 1\}} f =: f_1 + f_2$, missä $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $f_2 \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Voimme siis asettaa

$$\widehat{f}(\xi) = \widehat{f_1}(\xi) + \widehat{f_2}(\xi),$$

jolloin näemme, että $\widehat{f}(\xi)$ on ainakin m.k. hyvin määritelty funktio.

Entä löytyykö tuloksille (11.1)-(11.2) vastineet ? Eli missä mielessä $\widehat{f_M} \to \widehat{f}$ kun $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ja $M \to \infty$? Tässä on hyvä muistaa Hölderin epäyhtälö (A.1.2), joka liittää yhteen avaruudet $L^p(\mu)$ ja $L^q(\mu)$ kun $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; Funktionaalianalyysissä tätä yhteyttä vielä tarkennetaan, ja osoitetaan että $L^q(\mu)$ on avaruuden $L^p(\mu)$ n.k. *duaali*, kun $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Niinpä voisimme tehdä seuraavan arvauksen

$$\left.\begin{array}{ll} \mathcal{F} & : L^1(\mathbb{R}^d) \to C_0(\mathbb{R}^d) \subset L^\infty(\mathbb{R}^d) \\ \mathcal{F} & : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d) \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \mathcal{F} : L^p(\mathbb{R}^d) \to L^q(\mathbb{R}^d), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad ?$$

Tämän ajatuksen toteuttamiseen tarvitaan taas uudenlaisia näkökulmia.

XI.1. Funktionaalianalyyttinen periaate. Tyypillinen esimerkki tilanteesta, jossa funktionaalianalyysin lähestymistapoja voi soveltaa, niin Fourier teoriassa kuin muussakin analyysissä, on seuraava:

Meillä on annettu (konkreettinen) operaattori, esimerkiksi integraali-operaattori

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x,y) f(y)\, dy \tag{11.3}$$

joka saada hyvin määriteltyä sopivilla funktioilla, vaikkapa kun $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Fourier muunnoksella $K(x,y) = e^{-ix\cdot y}$, nk. Hilbertin muunnoksen tapauksessa ($d = 1$), $K(x,y) = \frac{1}{x-y}$ jne. jne.

Pyrkimyksenä on laajentaa Tf:n määritelmä funktioihin $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Mutta kuinka tämän voisi tehdä jos pisteittäisen määritelmän (11.3) integraali - kuten Fourier muunnoksen tapauksessa ($p > 1$) - ei suppene itseisesti ?

Tällöin tilanne palautetaan seuraavan tulokseen.

LAUSE 11.1. *Olkoot E ja F Banach avaruuksia ja $V \subset E$* **tiheä** *lineaarinen aliavaruus. Jos $T : V \to F$ jatkuva lineaarinen kuvaus, eli jollakin vakiolla $C < \infty$*

$$\|Tv\|_F \leq C\|v\|_E \qquad \textit{kaikilla } v \in V, \tag{11.4}$$

niin silloin T voidaan laajentaa jatkuvaksi lineaariseksi kuvaukseksi $T : E \to F$, jolle $\|T\| \leq C$.

Tyypillisissä käytännön tilanteissa, jos $E = L^p(\mathbb{R}^d)$ aliavaruus V voisi esimerkiksi olla
$V = C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tai $V = \{$ yksinkertaiset funktiot $\}$.

Lauseen 11.1 todistus. Jos $x \in E$, olkoon $v_n \in V$ joille $v_n \to x$ (V:n tiheys). Silloin (11.4) $\Rightarrow$ $\|Tv_n - Tv_m\| \leq C\|v_n - v_m\| \to 0$ kun $n, m \to \infty$, eli $\{Tv_n\}_{n=1}^\infty$ on F:n Cauchy jono, jolla raja-arvo, $\lim_{n\to\infty} Tv_n = f \in F$. Asetetaan

$$Tx = \lim_{n\to\infty} Tv_n, \quad \text{kun} \quad x = \lim_{n\to\infty} v_n, \quad v_n \in V.$$

Helposti nähdään, että Tx ei riipu jonon (v_n) valinnasta, joten $x \mapsto Tx$ on hyvin määritelty; samoin saatu kuvaus $T : E \to F$ on lineaarinen ja jatkuva, ehto $\|Tx\|_F \leq C\|x\|_E$ säilyy sulkeumaan V. $\square$

Toisin sanoen, jos haluamme näyttää että (11.3):n operaattori saadaan määriteltyä kaikilla $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ja että $Tf \in L^s(\mathbb{R}^d)$, silloin riittää osoittaa arvio

$$\|Tf\|_{L^s} \leq C\|f\|_{L^p},$$

kun $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tai todistaa tuo arvio kaikilla yksinkertaisilla funktioilla f.

XI.2. Interpolaatio ja Riesz-Thorinin lause. Kun ajatellaan Fourier muunnosta lineaarisena operaattorina, vrt. Appendix A.2, olemme osoittaneet että $\|\mathcal{F}f\|_\infty \leq \|f\|_{L^1}$ kun $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Samoin $\|\mathcal{F}f\|_{L^2 \to L^2} = (2\pi)^{d/2}\|f\|_{L^2 \to L^2}$ (Lause 10.1). Haluamme johtaa näistä myös L^p-arvioita.

Tavoite johtaa meidät seuraavaan operaattoriteorian periaatteeseen, Banach avaruuksien ja operaattoreiden *interpolaatioon.*

Teoreema 11.2. (Riesz-Thorinin lause) *Olkoot* $1 \leq p_0.p_1, r_0, r_1 \leq \infty$, *ja* $T : L^{p_0}(\mathbb{R}^d) \cap L^{p_1}(\mathbb{R}^d) \to L^{r_0}(\mathbb{R}^d) \cap L^{r_1}(\mathbb{R}^d)$ *lineaarinen kuvaus, jolle*

(11.5)

$$\|Tf\|_{L^{r_0}} \leq M_0 \|f\|_{L^{p_0}} \quad ja \quad \|Tf\|_{L^{r_1}} \leq M_1 \|f\|_{L^{p_1}}, \qquad \forall f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^d) \cap L^{p_1}(\mathbb{R}^d).$$

Sidotaan eksponentit p *ja* r *seuraavasti,*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \quad ja \quad \frac{1}{r} = \frac{1-t}{r_0} + \frac{t}{r_1}, \qquad missä\ 0 < t < 1. \tag{11.6}$$

(Huom: sama t !)

Silloin T *jatkuu lineaariseksi kuvaukseksi* $T : L^p(\mathbb{R}^d) \to L^r(\mathbb{R}^d)$, *jolle*

$$\|Tf\|_{L^r} \leq M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_{L^p} \qquad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^d). \tag{11.7}$$

Huomaa, että aina p on eksponenttien p_0, p_1 välissä, samoin q eksponenttien q_0, q_1 välissä.

Ennen Riesz-Thorinin lauseen todistusta katsotaan miten se ja yo. periaate ratkaisevat kysymyksemme Fourier muunnoksesta avaruuksissa $L^p(\mathbb{R}^d)$, kun $1 \le p \le 2$:

SEURAUS 11.3. (HAUSDORFF-YOUNGIN EPÄYHTÄLÖ) *Jos* $1 \le p \le 2$ *ja* $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, *silloin* $\widehat{f} \in L^q(\mathbb{R}^d)$, *missä*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \;=\; 1.$$

Lisäksi

$$\| \widehat{f} \|_{L^q} \;\le\; (2\pi)^{d/q} \|f\|_{L^p}, \qquad\qquad f \in L^p(\mathbb{R}^d).$$

Erityisesti kaikilla $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p \le 2$,

$$\left\| \widehat{f}(\xi) - \int_{B(0,M)} f(x)\, e^{-i\,\xi\cdot x}\, dx \right\|_{L^q(d\xi)} \to 0 \qquad (M \to \infty). \tag{11.8}$$

Todistus. Kuten edellä todettiin, Fourier muunnos toteuttaa normiarviot $\|\mathcal{F}f\|_\infty \le \|f\|_{L^1}$ ja $\|\mathcal{F}f\|_{L^2} = (2\pi)^{d/2}\| f\|_{L^2}$. Kun sovelletaan Riesz-Thorinin lausetta näihin eksponentteihin,

$$\text{lähtöpuolen eksponentille:} \qquad \frac{1}{p} \;=\; \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \;=\; \frac{1-t}{1} + \frac{t}{2} \;=\; 1 - \frac{t}{2},$$

$$\text{maalipuolen eksponentille:} \qquad \frac{1}{q} \;=\; \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1} \;=\; \frac{1-t}{\infty} + \frac{t}{2} \;=\; \frac{t}{2}.$$

Tästä nähdään, että $1/p + 1/q = 1$ ja että p käy läpi kaikki eksponentit $1 < p < 2$, kun t käy läpi arvot $0 < t < 1$. Edelleen,

$$\| \widehat{f} \|_{L^q} \;\le\; M_0^{1-t} M_1^t \, \|f\|_{L^p} \;=\; (2\pi)^{d\frac{t}{2}} \, \|f\|_{L^p} \;=\; (2\pi)^{d/q} \, \|f\|_{L^p}, \qquad 2 < q < \infty.$$

Lopuksi, tämän arvion nojalla $f \in L^p(\mathbb{R}^d) \;\Rightarrow$

$$\left\| \mathcal{F}f - \mathcal{F}\big(\chi_{B(0,M)} f\big) \right\|_{L^q} \;=\; \left\| \mathcal{F}\big(f - \chi_{B(0,M)} f\big) \right\|_{L^q} \;\le\; (2\pi)^{d/q} \left[\int_{\{|x| \ge M\}} |f(x)|^p \right]^{1/p} \to 0,$$

kun $M \to \infty$. $\square$

Riesz-Thorinin lausetta varten tarvitsemme muutamia aputuloksia; ja ensimmäiseksi käännymme kompleksianalyysin puoleen !

Kompleksianalyysin perustuloksia on esitelty esim. ko. peruskurssilla; tarvitsemme aihepiiristä vain analyyttisten funktioiden käsitteen ja maksimiperiaatteen, jotka oletamme kummatkin tunnetuiksi:

Lemma 11.4. (Maksimiperiaate) *Olkoon $F(z)$ analyyttinen funktio* **rajoitetussa** *alueessa $\Omega \subset \mathbb{C}$, ja oletamme, että F on jatkuva sulkeumassa $\overline{\Omega}$. Silloin*

$$|F(z)| \le \sup_{\zeta \in \partial\Omega} |F(\zeta)|, \qquad \forall\, z \in \Omega.$$

Huomaa, ettei maksimiperiaate toimi (ilman lisäoletuksia) rajoittamattomissa alueissa: Jos $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ ja $F(z) = e^z$, silloin jokaisessa reunapisteessä $z = iy$ on $|F(z)| = |F(iy)| = |e^{iy}| = 1$. Funktio F ei kuitenkaan ole rajoitettu Ω:ssa, $F(x) = e^x \to \infty$ kun $0 < x \to \infty$, eikä maksimiperiaatekaan siis toimi tässä tilanteessa.

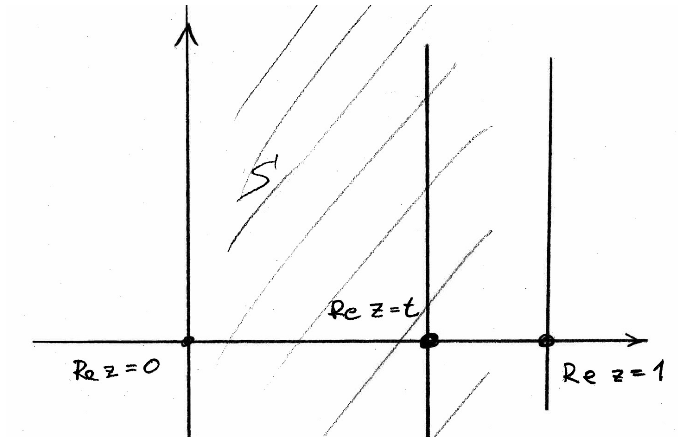
Tarvitsemme kuitenkin maksimiperiaatetta rajoittamattomassa alueessa ja erityisesti seuraavassa muodossa:

Lause 11.5. (Hadamard) *Olkoon $F(z)$ analyyttinen funktio nauhassa $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$. Oletamme lisäksi, että $F(z)$ on jatkuva ja* **rajoitettu** *sulkeumassa $\overline{S}$, ja että*

$$|F(z)| \le B_0 \quad \text{kun } \operatorname{Re} z = 0 \quad \text{ja} \quad |F(z)| \le B_1 \quad \text{kun } \operatorname{Re} z = 1,$$

missä $0 < B_0, B_1 < \infty$. Silloin

$$|F(z)| \le B_0^{1-t} B_1^t \qquad \text{kun} \quad \operatorname{Re} z = t \in (0,1), \;\; z \in S.$$



HUOM: Lause ei taaskaan päde yleisille, rajoittamattomille funktioille $F(z)$, vrt. esim $F(z) = e^{ie^{i\pi z}}$.

Lauseen 11.5 todistus. Tarkastellaan ensin sopivia apufunktioita. Jos $0 < B < \infty$, silloin $z \mapsto B^z := e^{z \log B}$ on analyyttinen nauhassa S, ja kun $z = x + iy \in S$,

$$\min\{B, 1\} \;\leq\; |B^z| \equiv B^x \;\leq\; \max\{B, 1\} \qquad (\text{sillä } 0 < x < 1). \tag{11.9}$$

Siten B^z on S:ssä rajoitettu ylhäältä ja alhaalta, joten $G(z) \;:=\; \frac{F(z)}{B_0^{1-z} B_1^z}$ on analyyttinen ja rajoitettu nauhassa S,

$$|G(z)| \leq C \qquad \forall z \in S, \quad \text{jollakin vakiolla } C < \infty$$

Lisäksi, oletustemme mukaan

$$\operatorname{Re} z = 0 \;\Rightarrow\; |G(z)| = \frac{|F(z)|}{B_0} \leq 1$$

$$\operatorname{Re} z = 1 \;\Rightarrow\; |G(z)| = \frac{|F(z)|}{B_1} \leq 1$$

eli $\sup_{z \in \partial S} |G(z)| \leq 1$. Väite on näin palautettu tilanteeseen jossa $B_0 = B_1 = 1$.

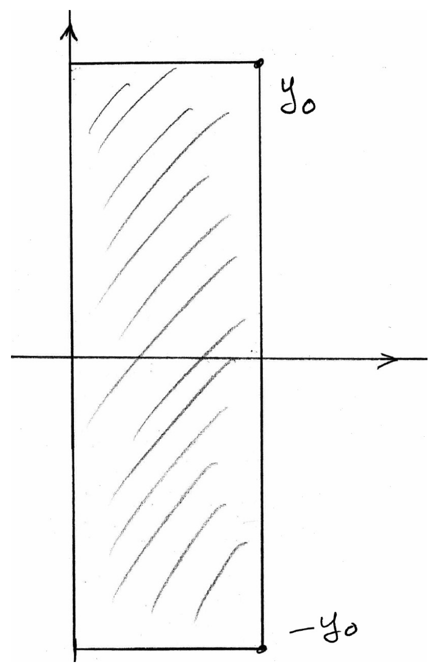
Maksimiperiaatteen käyttöä varten "katkaistaan" S: Olkoon

$$G_n(z) \;:=\; G(z) e^{\frac{z^2 - 1}{n}}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

jolloin $G_n(z)$ on analyyttinen S:ssä, jatkuva $\overline{S}$:ssa ja $z = x + iy \in S \;\Rightarrow |G_n(x+iy)| \leq Ce^{\frac{x^2-y^2-1}{n}} \leq Ce^{\frac{y^2-1}{n}} \to 0$ kun $y \to \infty$; suppeneminen on tasaista x:n suhteen. Silloin kullekin $n \in \mathbb{N}$ löytyy $y_0 = y_0(n)$ niin että

$$|G_n(x+iy)| \leq 1 \qquad \text{kun } |y| \geq y_0(n), \quad x + iy \in S. \tag{11.10}$$

Jäljelle jää arvio alueessa $S_n = \{z = x + iy \in S : |y| < y_0(n)\}$.



Alueet S_n ovat rajoitettuja, ja niinpä maksimiperiaate soveltuu niihin. Nyt

$$\operatorname{Re} z = 0 \;\Rightarrow\; |G_n(z)| := |G(z)|e^{\frac{-y^2-1}{n}} \leq 1; \qquad \operatorname{Re} z = 1 \;\Rightarrow\; |G_n(z)| := |G(z)|e^{\frac{-y^2}{n}} \leq 1,$$

ja ylläolevan mukaan $|G_n(z)| \leq 1$, kun $z \in \partial S_n$ ja $|\operatorname{Im} z| = y_0(n)$. Siis

$$\sup_{\zeta \in \partial S_n} |G_n(z)| \leq 1,$$

joten maksimiperiaate antaa $|G_n(z)| \leq 1$ kaikilla $z \in S_n$. Kun tämä yhdistetään ehtoon (11.10), saadaan $|G_n(z)| \leq 1$ jokaisella $z \in S$.

Näillä eväin, kun $z = x \in [0,1] \in S$,

$$\frac{|F(z)|}{B_0^{1-x} B_1^x} e^{\frac{x^2-1}{n}} \;=\; |G_n(x)| \leq 1.$$

Antamalla $n \to \infty$ saadaan $|F(x)| \leq B_0^{1-x} B_1^x$, $x \in [0,1]$.

Lopuksi, jos $z_0 \in S$ mielivaltainen, silloin $z + i\mathrm{Im}\, z_0$ aina kun $z \in S$, ja voimme siis soveltaa ylläolevaa funktioon $z \mapsto F_0(z) := F(z + i\mathrm{Im}\, z_0)$. $\square$

Toisena Riesz-Thorin aputuloksena tarvitaan L^p-avaruuksien dualiteetti, tosin vain seuraavassa osittaisessa muodossa.

LAUSE 11.6. *Jos $1 \leq p \leq \infty$, olkoon $q = \frac{p}{p-1}$ sen duaalieksponentti, s.o. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Silloin*

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \;=\; \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^d} g(x) f(x)\, dx \right| : \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} = 1 \right\}.$$

Todistus seuraa Reaalianalyysi I:n tiedoista; ensinnäkin Hölderin epäyhtälön mukaan

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} g(x) f(x)\, dx \right| \;\leq\; \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}, \qquad f \in L^p(\mathbb{R}^d), g \in L^q(\mathbb{R}^d).$$

Toisaalta, kun $p < \infty$, asetetaan $g(x) = \overline{f(x)} |f(x)|^{p-2} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^{1-p}$ pisteissä joissa $f(x) \neq 0$, ja $g(x) = 0$ muuten; silloin $\|g\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} = 1$ ja

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x) f(x)\, dx \;=\; \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Tapauksessa $p = \infty$ valitaan $g_\varepsilon(x) = \frac{1}{|E|} \chi_E(x) \frac{\overline{f(x)}}{|f(x)|}$, missä $|E| > 0$ ja $|f(x)| > (1-\varepsilon) \|f\|_{L^\infty}$, kun $x \in E$. Tarkemmat yksityiskohdat: ylim. HT. $\square$

Riesz-Thorinin lauseen todistus. Olkoon $s \in [1, \infty]$ maaliavaruuden $L^r(\mathbb{R}^d)$ eksponentin Hölder-konjugaatti,

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1.$$

Vastaavasti merkitään s_0:llä r_0:n Hölder-konjugaattia, ja s_1:llä r_1:n Hölder-konjugaattia.

Lauseiden 11.1 ja 11.6 mukaan Riesz-Thorinin tulokseen riittää osoittaa (MIKSI ?), että

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\,(Tf)(x)\,dx \right| \;\le\; M_0^{1-t} M_1^t \, \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^s}, \tag{11.11}$$

kun $f \in V$ ja $g \in W$, missä aliavaruudet $V \subset L^{p_0}(\mathbb{R}^d) \cap L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$ ja $W \subset L^s(\mathbb{R}^d)$ tiheitä.

Oletamme ensin, että $s < \infty$ ja $p < \infty$, ja valitaan $V = W = \{$yksinkertaiset funktiot$\}$. Silloin

$$f(x) \;=\; \sum_{k=1}^{m} a_k\, e^{i\alpha_k} \chi_{A_k}(x), \qquad g(x) \;=\; \sum_{j=1}^{n} b_j\, e^{i\beta_j} \chi_{B_j}(x) \tag{11.12}$$

missä kukin $a_k > 0$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$ ja A_k:t mitallisia, $|A_k| < \infty$ sekä $A_k \cap A_\ell = \emptyset$ kun $k \neq \ell$; samoin $b_j > 0$, $\beta_j \in \mathbb{R}$ ja B_j:t mitallisia, äärellismittaisia ja erillisiä. Jatkotarkasteluja varten kiinnitetään funktiot f ja g luokasta (11.12), ja tavoitteenamme on todistaa niille arvio (11.11). Sopivalla vakiolla jakamalla voimme lisäksi olettaa, että

$$\|f\|_{L^p} \;=\; \|g\|_{L^s} \;=\; 1.$$

Seuraavaksi, eksponentit p ja r valittiin ehdoilla (11.6), jotka nyt saavat muodon

$$\frac{1}{p} \;=\; \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \quad \text{ja} \quad \frac{1}{s} \;=\; \frac{1-t}{s_0} + \frac{t}{s_1}, \qquad (0 < t < 1).$$

Laitetaan tässä t muuttumaan analyyttisesti nauhassa S ja asetetaan

$$\pi(z) := p\left[\frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}\right], \qquad \zeta(z) := s\left[\frac{1-z}{s_0} + \frac{z}{s_1}\right], \qquad 0 < \operatorname{Re} z < 1. \tag{11.13}$$

Tarkastellaan nyt parametrista $z \in S$ riippuvaa funktiota

$$f_z(x) \;=\; \sum_{k=1}^{m} a_k^{\pi(z)}\, e^{i\alpha_k} \chi_{A_k}(x), \qquad x \in \mathbb{R}^d,\; 0 \le \operatorname{Re} z \le 1.$$

Kun $z = t$, on $\pi(t) = 1$ (MIKSI ?) ja siis $f_t = f$. Kun $\operatorname{Re} z = 0$, (11.13) $\Rightarrow |a_k^{\pi(z)}|^{p_0} = |a_k^{\pi(iy)}|^{p_0} = |a_k|^p$. Siispä

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f_z(x)|^{p_0}\,dx \;=\; \sum_{k=1}^{m} |a_k|^p |A_k| \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p\,dx \;=\; 1, \qquad \text{kun } \operatorname{Re} z = 0. \tag{11.14}$$

Samoin, kun $\operatorname{Re} z = 1$, $|a_k^{\pi(z)}|^{p_1} = |a_k|^p$. Siten

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f_z(x)|^{p_1}\, dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p\, dx \;=\; 1, \qquad \text{kun } \operatorname{Re} z = 1.$$

Lisäksi, koska $a_k^{\pi(z)} = e^{\pi(z)\log a_k}$ on analyyttinen koko tasossa, myös näiden äärellinen summa $f_z(x)$ riippuu z:sta analyyttisesti.

Vastaava muunnos tehdään tietysti myös funktiolle g, eli määritellään

$$g(x) \;=\; \sum_{j=1}^{n} b_j^{\zeta(z)}\, e^{i\beta_j} \chi_{B_j}(x), \qquad x \in \mathbb{R}^d,\ 0 \le \operatorname{Re} z \le 1.$$

Kuten yllä saamme

$$g_t \;=\; g \quad \text{ja} \quad \|g_z\|_{L^{s_0}}^{s_0} \;=\; \|g\|_{L^s}^{s} \;=\; 1, \quad \text{kun } \operatorname{Re} z = 0, \tag{11.15}$$

sekä

$$\|g_z\|_{L^{s_1}}^{s_1} \;=\; \|g\|_{L^s}^{s} \;=\; 1, \quad \text{kun } \operatorname{Re} z = 1.$$

Kaikkien näiden konstruktioiden jälkeen määritellään lopuksi funktio

$$F(z) \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} g_z(x)\, (Tf_z)(x)\, dx.$$

Kun $0 \le \operatorname{Re} z \le 1$, jokainen termeistä $|a_k^{\pi(z)}|$, $|b_j^{\zeta(z)}|$ on tasaisesti rajoitettu [vrt. (11.9)], ja siksi

$$F(z) \;\equiv\; \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_k^{\pi(z)} b_j^{\zeta(z)}\, e^{i\alpha_k}\, e^{i\beta_j} \int_{B_j} T(\chi_{A_k})\, dx$$

on analyyttinen nauhassa $S = \{z : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ sekä rajoitettu ja jatkuva sulkeumassa $\overline{S}$. Voimme näin soveltaa Hadamardin Lausetta 11.5.

Kun $\operatorname{Re} z = 0$, Hölderin epäyhtälö antaa

$$|F(z)| \;\le\; \int_{\mathbb{R}^d} |g_z|\,|Tf_z|\, dx \;\le\; \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g_z|^{s_0}\, dx\right)^{1/s_0} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |Tf_z|^{r_0}\, dx\right)^{1/r_0}$$

$$\leq\ 1 \cdot \|Tf_z\|_{L^{r_0}}\ \leq\ M_0 \|f_z\|_{L^{p_0}}\ =\ M_0$$

ehtojen (11.14) ja (11.15) ja oletuksen (11.5) mukaan. Samalla tavalla nähdään

$$|F(z)|\ \leq\ M_1 \qquad \text{kun } \operatorname{Re} z = 1.$$

Hadamardin lauseen nojalla $|F(t)| \leq M_0^{1-t} M_1^t$. Koska $F(t) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\,(Tf)(x)\,dx$ arvio (11.11) seuraa tästä.

Jäljelle jäävät tapaukset, joissa joko $p = \infty$ tai $s = \infty$, eli $r = 1$, jätetään harjoitustehtäviksi. $\square$

HUOMAUTUS: Riesz-Thorinin lauseen todistus toimii sellaisenaan yleisissäkin mitta-avaruuksissa operaattoreille $T : L^p(\mu) \to L^r(\nu)$; y.o. argumentissa tarvittiin vain että aliavaruudet

$$\{\textstyle\sum_{k=1}^m a_k \chi_{A_k},\ \ a_k \in \mathbb{C},\ \mu(A_k) < \infty\} \subset L^p(\mu) \quad \text{ja}$$

$$\{\textstyle\sum_{j=1}^n b_j \chi_{B_j},\ \ b_j \in \mathbb{C},\ \nu(B_j) < \infty\} \subset L^s(\nu), \qquad s = \tfrac{r}{r-1},$$

ovat tiheitä. Menetelmästä saa näin (MITEN ?) esim. Hausdorff-Youngin epäyhtälön *Fourier sarjoille*,

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^q \right)^{1/q} \leq\ C_p \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p\, dx \right)^{1/p}, \quad \text{kun } f \in L^p(-\pi,\pi),\ \ 1 \leq p \leq 2 \ \text{ ja } \ q = \frac{p}{p-1}.$$

XII. Temperoidut distribuutiot

Edellisten lukujen avulla ymmärrämme hyvin Fourier muunnoksen $\widehat{f}(\xi)$ ominaisuudet kun funktio $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ja $1 \leq p \leq 2$: $\widehat{f}$ on funktio, jolle $\widehat{f}(\xi) \in L^q(\mathbb{R}^d)$.

Entä jos $p > 2$? Tai jos $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$?

Jos syystä tai toisesta Fourier muunnoksen määritteleminen funktiona ei näissä tapauksissa enää onnistuisikaan, vaadimme kuitenkin määritelmältä ainakin seuraavaa:

(i) Määritelmä on luonnollinen ja toimiva, se säilyttää kaikki Fourier muunnoksen hyvät ominaisuudet, sekä

(ii) $\widehat{f}(\xi) \;=\; \lim_{M\to\infty}\Big(\chi_{B(0,M)}f\Big)\widehat{\ }(\xi)$ ainakin jossakin mielessä (missä?);

eli taas (ii):n mukaan, "vanha $\mathcal{F}f$" $=$ "uusi $\mathcal{F}f$" kun molemmat määriteltyjä.

Kuten kohta havaitaan, Fourier muunnos voidaan yhä määritellä niin, että (i) – (ii) pätee, mutta (kun $p > 2$) yleiselle L^p-funktiolle f muunnos $\widehat{f}$ ei enää ole funktio, vaan distribuutio, "yleistetty funktio".

Tilanteen selvittämiseksi lähdetään ensin liikkeelle osaluvun IX.3 nopeasti vähenevistä funktioista $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

XII.1. Schwartzin luokan $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ topologia. Lähes kaikki tällä kurssilla vastaan tulleet Fourier analyysissä mielenkiintoiset avaruudet kuten L^p tai $C^k_\#$ tai C_0 ovat olleet Banach avaruuksia, s.o. täydellisiä avaruuksia joiden topologia saadaan (luonnollisesta) normista. Entä $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, onko sille luonnollista topologiaa, jossa se olisi täydellinen ?

Voidaan osoittaa ettei ole yhtä $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$:n normia joka nuo vaatimukset toteuttaisi. Sen sijaan avaruuden $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ luonnollinen topologia saadaan (numeroituvasti) äärettömän monen normin avulla - itse asiassa näihin normeihin törmättiin jo Määritelmässä 9.11. Kun $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ja $N \in \mathbb{N}$, asetetaan

$$p_N(f) \;:=\; \sup_{|\alpha|\leq N}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}(1+|x|^2)^N\,|\partial^\alpha f(x)| \;<\; \infty, \tag{12.1}$$

jolloin $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ jos ja vain jos $p_N(f) < \infty$ jokaisella N.

Selvästi jokainen $p_N(f)$ on normi $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$:ssä; $p_N(f+g) \leq p_N(f) + p_N(g)$ ja $p_N(\lambda f) = |\lambda| p_N(f)$ kaikilla $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ja indekseillä N. Lisäksi $\|f\|_\infty = p_0(f) \leq p_N(f)$, joten $p_N(f) = 0$ vain jos $f = 0$.

Koska yhtä normia p_N ei ole mahdollista laittaa toista paremmaksi, topologisoidaan $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ vaatimalla (vrt. kurssi Topologia II), että *jokainen* joukoista

$$B_N(f,r) \ := \ \{g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) : p_N(f-g) < r\}, \qquad N \in \mathbb{N},$$

on avoin, s.o. kuulat $B_N(f,r)$ muodostavat $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$:n ympäristökannan, $N \in \mathbb{N}$.

Vaikka $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ei ole normiavaruus, sen topologia on metrisoituva. Asetetaan

$$\rho(f,g) \ := \ \sum_{N=0}^{\infty} 2^{-N} \frac{p_N(f-g)}{1+p_N(f-g)}, \qquad \text{kun } f,g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d). \tag{12.2}$$

LEMMA 12.1. *$\rho(f,g)$ on metriikka ja Schwartzin luokka $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ varustettuna tällä metriikalla on täydellinen. Lisäksi metriikka $\rho(f,g)$ ja normit $p_N(f)$, $N \in \mathbb{N}$, määräävät saman topologian. Erityisesti,*

$$\rho(f_n, f) \to 0 \ \textit{kun} \ n \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad \textit{jokaisella} \ N \in \mathbb{N}, \ \ p_N(f - f_n) \to 0 \ \textit{kun} \ n \to \infty.$$

Todistus. (Harjoitustehtävät). $\square$

Schwartzin luokan lineaarikuvauksille jatkuvuus voidaan karakterisoida samaan tapaan kuin Banach avaruus operaattoreillekin, vrt. Lause A.2.1.

LAUSE 12.2. *Lineaarinen kuvaus $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on jatkuva $\Leftrightarrow$ Jokaiselle $N \in \mathbb{N}$ löytyy $M \in \mathbb{N}$ ja vakio $C = C_{N,M}$ s.e.*

$$p_N(Tf) \ \leq \ C p_M(f), \qquad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d). \tag{12.3}$$

Todistus. Näytetään ensin, että jos (12.3) on voimassa, silloin $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on jatkuva Schwartzin avaruuden $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ metriikan (12.2) suhteen. Jos $\rho(f_n, f) \to 0$, on siis osoitettava että $\rho(Tf_n, Tf) \to 0$, ja Lemman 12.1 mukaan riittää näyttää että jokaisella $N \in \mathbb{N}$ on $p_N(Tf - Tf_n) \to 0$.

Kun $N \in \mathbb{N}$ annettu, valitaan indeksi M, jolle (12.3) on voimassa. Koska aina $2^{-M} \frac{p_M(f_n - f)}{1 + p_M(f_n - f)} \leq \rho(f_n, f) \to 0$, myös $p_M(f_n - f) \to 0$, ja käyttämällä ehtoa (12.3) huomataan, että todellakin $p_N(Tf - Tf_n) = p_N\big(T(f - f_n)\big) \to 0$. Kuvaus T on siis jatkuva, jos (12.3) pätee kaikilla $N \in \mathbb{N}$.

Käänteistä suuntaa varten tehdään ensin seuraava havainto: Jos $\varepsilon > 0$ on annettu, valitaan indeksi $M \in \mathbb{N}$ jolle $2^{-M} < \varepsilon/2$. Jos tällä indeksillä $p_M(f) < \varepsilon/4$, voimme arvioida

$$
\begin{aligned}
(12.4) \qquad \rho(f, 0) &< \big(1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \ldots + 2^{-M}\big) p_M(f) + \big(2^{-M-1} + 2^{-M-2} + \ldots\big) \\
&\leq 2p_M(f) + 2^{-M} \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Yllä olemme käyttäneet (m.m.) tietoa $p_0(f) \leq p_1(f) \leq p_2(f) \leq \cdots \leq p_M(f)$.

Oletetaan sitten että $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on jatkuva. Lineaarisena kuvauksena $T(0) = 0$, ja jatkuvuudesta origossa seuraa, että kun $N \in \mathbb{N}$ on annettu, löytyy $\varepsilon > 0$ niin että $\rho(f, 0) < \varepsilon \Rightarrow \rho(Tf, 0) < \frac{1}{2} 2^{-N}$. Voimme nyt hyödyntää arviota (12.4) ja nähdä että

$$
p_M(f) < \varepsilon/4 \;\Rightarrow\; \rho(f, 0) < \varepsilon \;\Rightarrow\; 2^{-N} \frac{p_N(Tf)}{1 + p_N(Tf)} \leq \rho(Tf, 0) < \frac{1}{2} 2^{-N} \;\Rightarrow\; p_N(Tf) < 1.
$$

Lopuksi, jos $0 \neq f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on aina $p_M\left(\frac{\varepsilon}{5\, p_M(f)} f\right) < \varepsilon/4$ mistä edelleen

$$
\frac{\varepsilon}{5\, p_M(f)} p_N(Tf) = p_N\left(T\Big(\frac{\varepsilon}{5\, p_M(f)} f\Big)\right) < 1 \quad \Rightarrow \quad p_N(Tf) \leq \frac{5}{\varepsilon} p_M(f). \qquad \square
$$

Vastaavasti skalaariarvoisille lineaarikuvauksille:

Lause 12.3. *Lineaarinen $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ on jatkuva* $\Leftrightarrow$ **jollakin** $N \in \mathbb{N}$ *ja* $C < \infty$,

$$
|T(f)| \leq C \sup_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + |x|^2)^N \, |\partial^\alpha f(x)| \qquad \text{kun } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).
$$

Todistus. (Harjoitukset). $\square$

ESIMERKKI 12.4. *Olkoon $\alpha \in \mathbb{N}^d$ multi-indeksi.*

(i) Koska $p_N(\partial^\alpha f) \le p_{N+|\alpha|}(f)$, kuvaus $f \mapsto \partial^\alpha f$ on jatkuva $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

(ii) Koska $p_N(x^\alpha f) \le C p_{N+|\alpha|}(f)$, kuvaus $f \mapsto x^\alpha f$ on jatkuva $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

SEURAUS 12.5. *Fourier muunnos on homeomorfismi $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*

Todistus. Olkoon $\alpha \in \mathbb{N}^d$ multi-indeksi, $|\alpha| \le N$. Silloin (MIKSI ?)

$$(1+|\xi|^2)^N |\partial^\alpha \widehat{f}(\xi)| = \sum_{|\beta|\le N} c_{N,\beta} |\xi^{2\beta}||\partial^\alpha \widehat{f}(\xi)|.$$

Toisaalta, Lauseen 9.13 mukaan

$$\begin{aligned} |\xi^{2\beta}||\partial^\alpha \widehat{f}(\xi)| \;&=\; \left|\left[\partial^{2\beta}(x^\alpha f)\right]\widehat{\ }(\xi)\right| \;\le\; \int_{\mathbb{R}^d} \left|\partial^{2\beta}\big(x^\alpha f(x)\big)\right| dx \\ &\le\; C_0 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{p_{2N+d}(f)}{(1+|x|^2)^d}\, dx \;\le\; C_1\, p_{2N+d}(f) \end{aligned}$$

kun $|\beta| \le N$. Yhteenvetona näistä

$$p_N(\,\widehat{f}\,) \le C\, p_{2N+d}(f), \qquad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ N \in \mathbb{N}. \tag{12.5}$$

Koska Lauseen 9.14 nojalla $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on bijektio ja $\mathcal{F}^4 = cId$, tästä väite seuraa. $\square$

XII.2. Distribuutiot ja testifunktiot. Jatkoa varten otetaan käyttöön funktionaalianalyysissä yleinen merkintätapa,

$$X(g) \;\equiv < X, g >,$$

kun $X : E \to \mathbb{C}$ lineaarinen, E vektoriavaruus ja $g \in E$.

Temperoidun distribuution ideaa varten palataan kysymykseen miten määritellä funktion $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ (tai $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $p > 2$) Fourier muunnos. Jos $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, Lauseesta 9.7 saadaan

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\, g(\xi)\, d\xi \; = \; \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \widehat{g}(x)\, dx \qquad \forall\, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d). \tag{12.6}$$

Vaikka y.o. identiteetti formuloitiin alunperin L^1-funktioille, Plancherellin lauseen avulla se yleistyy ainakin L^2-tapauksiin. Ja oikein tulkittuna (12.6) on lähtökohta $\widehat{f}(\xi)$:n määrittelylle myös yleisellä $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Tähän muutama idea:

1.) Funktion $h \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ominaisuuksia voi selvittää "testaamalla" sitä Schwartzin funktioilla - silloin tarkastelemme lineaarista kuvausta

$$T_h : g \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} h(x) g(x)\, dx; \quad T_h : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}.$$

Ja testitulokset, eli luvut $T_h(g)$ missä $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, määräävät funktion $h(x)$. Nimittäin, valitaan $g(x) = K_t(y-x)$, missä $K_t(x) = \frac{1}{t^d} K(\frac{x}{t})$, $K \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ja $\int_{\mathbb{R}^d} K(x)\, dx = 1$. Voimme valita esim. Gaussisen $K(x) = \pi^{-d/2} e^{-|x|^2}$. Näillä oletuksin $\{K_t\}$ on perhe hyviä ytimiä ja Lauseen A.1.3 mukaan löytyy jono $\{t_j\}$, jolle

$$T_h(g) \; \equiv \; \int_{\mathbb{R}^d} h(x) K_{t_j}(y-x)\, dx \; \to \; h(y) \quad m.k. \;\; y \in \mathbb{R}^d, \;\; \text{kun } t_j \to 0.$$

Erityisesti, $T_f = T_h \;\Leftrightarrow\; f(x) = h(x)$ m.k. $x \in \mathbb{R}^d$. On siis järkevää *samaistaa* funktio $h(x)$ ja lineaarikuvaus $T_h : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$.

2.) Y.o. näkökulmasta, kaava (12.6) saa muodon $T_{\widehat{f}}(g) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \widehat{g}(x)\, dx$, kun $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Ja tässä yhtälön oikea puoli on hyvin määritelty paljon yleisemmille funktioille, esim. kun $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ jollakin $1 \le p \le \infty$ [sillä $\widehat{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$]. Voisimme silloin ajatella, että yleiselle funktiolle $f \in L^\infty$ (tai $f \in L^p$) Fourier muunnos *on* vastaava lineaarinen kuvaus

$$\widehat{f} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}, \qquad < \widehat{f}, g > := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \widehat{g}(x)\, dx, \quad g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d). \tag{12.7}$$

3.) Mitkä ovat tuon lineaarikuvauksen (12.7) ominaisuudet ? Huomataan, että kaikilla $f \in L^\infty$,

$$
\begin{aligned}
| < \widehat{f}, g > | &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|(1+|x|^2)^d \, |\widehat{g}(x)| \, \frac{dx}{(1+|x|^2)^d} \\
&\leq \|f\|_\infty \, p_d(\,\widehat{g}\,) \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dx}{(1+|x|^2)^d} \leq C \, p_{3d}(\, g\,)
\end{aligned}
$$

kun käytetään arviota (12.5). Siis kun $f \in L^\infty$, on $\widehat{f} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ jatkuva; tai funktionaalianalyysin kielellä sanottuna, $\widehat{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \equiv$ avaruuden $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *duaali.* Vastaava päättely toimii myös kun $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ jollakin $1 \leq p \leq \infty$, vrt. alla.

Duaalin $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ alkioita kutsutaan (temperoiduiksi) distribuutioiksi. Näille *kaikille* voidaan määritellä hyvin toimiva ja luonnollinen Fourier muunnos. Siksi tarkastelemme seuraavaksi $\mathcal{S}'$:a yleisesti, ja palaamme L^p-funktioihin kun $\mathcal{S}'$:n Fourier teoriaa on enemmän selvitetty.

MÄÄRITELMÄ 12.6. *Jatkuva lineaarikuvaus $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ on* **temperoitu distribuutio** *(yleistetty funktio). Merkitään $T \in \mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.*

Käytämme rinnan merkintöjä $T(g) = < T, g >$, kun $T \in \mathcal{S}'$ ja $g \in \mathcal{S}$.

Lauseen 12.3 nojalla lineaarinen $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ on temperoitu distribuutio, mikäli jollekin $N \in \mathbb{N}$ ja $C < \infty$ pätee

$$
| < T, g > | \;\leq\; C \sup_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1+|x|^2)^N \, |\partial^\alpha g(x)| \qquad \text{kaikilla } g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d). \tag{12.8}
$$

HUOM: Jos $T, R \in \mathcal{S}'$, silloin $T + R \in \mathcal{S}'$, $\lambda T \in \mathcal{S}'$.

Esimerkki 12.7. *(i) Jos $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p \le \infty$, silloin*

$$T_f(g) \;:=\; \int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x)\,dx$$

on temperoitu distribuutio. Eli samaistuksen $f = T_f$ kautta, jokainen L^p-funktio $f \in \mathcal{S}'$.

Nimittäin Hölderin epäyhtälön avulla, kun $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$|T_f(g)| \;\le\; \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|(1+|x|^2)^d\,|g(x)|\,\frac{dx}{(1+|x|^2)^d} \;\le\; p_d(g)\,\|f\|_{L^p}\|(1+|x|^2)^{-d}\|_{L^q} \;=\; C\,p_d(g).$$

(ii) Sana "temperoitu" viittaa siihen, että distribuution $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ käytös äärettömyydessä on kontrollissa. Ja kontrolli saadaan sitä kautta, että testifunktioiden $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ äärettömyyskäytös on tarkasti säädelty. Niinpä (MIKSI ?) jokainen polynomi

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha x^\alpha \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), \qquad \alpha \in \mathbb{N}^d,$$

mutta funktio $f_0(x) = e^{|x|^2} \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ – siis $T_P \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, mutta $T_{f_0} \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

(iii) N.k. delta-funktio pisteessä $a \in \mathbb{R}^d$,

$$\delta_a(g) \;=\; g(a) \qquad (\; \le \|g\|_\infty \le p_0(g)\;) \quad g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),$$

on tyypillinen distribuutio; y.o. arvion nojalla $\delta_a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

(iv) Delta-funktio voidaan tulkita mittana – yleisemminkin, jokainen $\mathbb{R}^d$:n äärellinen Borel mitta $\mu \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, kun luonnollisesti $<\mu, g> := \int_{\mathbb{R}^d} g(x)d\mu(x)$.

(v) Kuten kaavan (12.7) jälkeen huomattiin, jokaisen L^p-funktion Fourier muunnos

$$\widehat{f} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}, \qquad <\widehat{f}, g> := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\widehat{g}(x)\,dx, \quad g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),$$

on temperoitu distribuutio, $\widehat{f} \in \mathcal{S}'$. Mutta tulemme pian näkemään, että jopa helpon L^p-funktion Fourier muunnnos voi olla aito distribuutio, ei siis edes mitta.

(vi) Jne., jne. ... Alla tulee vastaan monta muuta erilaista esimerkkiä !

XII.3. Distribuutioilla operoiminen; derivointi ja funktiolla kertominen. Distribuutioille voidaan määritellä lähes kaikki analyysin normaalit operaatiot, derivointi, funktiolla kertominen, konvoluutio, Fourier muunnos jne..

Idea kunkin käsitteen distribuutio-version määrittelyyn haetaan luonnollisen analogian kautta: Tehdään k.o. operaatio funktiolle f, katsotaan miten silloin muuttuu vastaava lineaarikuvaus T_f, ja määritellään muunnos yleiselle distribuutiolle täsmälleen samalla muunnoskaavalla.

Tyypillisenä ja ensimmäisenä esimerkkinä tarkastellaan distribuution kertomista sileällä funktiolla $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Jos esimerkiksi ϕ:n kaikki derivaatat ovat rajoitettuja, silloin

$$\phi(x)g(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \qquad \text{jokaisella} \quad g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Yleisemminkin, tämä pätee jos ϕ:n kaikki derivaatat ovat polynomisesti rajoitettuja:

Lemma 12.8. *Olkoon $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ sellainen, että jokaiselle multi-indeksille α löytyy $M = M_\alpha$ ja $C = C_\alpha$ niin että*

$$|\partial^\alpha \phi(x)| \leq C(1+|x|^2)^M \quad \textit{kaikilla} \;\; x \in \mathbb{R}^d. \tag{12.9}$$

Tällöin $\phi g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ kaikilla $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ja kuvaus $g \mapsto \phi g$ on jatkuva lineaarikuvaus avaruudella $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Todistus. Harjoitukset. □

Ja jos $f \in L^p$, silloin

$$T_{\phi f}(g) \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\, f(x)\, g(x)\, dx \;=\; T_f(\phi g).$$

Tällä analogialla, kun (12.9) pätee, voimme määritellä yleisen distribuution $T \in \mathcal{S}'$ ja funktion ϕ tulon

$$\phi T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}, \qquad <\phi T, g> := \; T(\,\phi\, g\,), \qquad g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d). \tag{12.10}$$

Se että $\phi T \in \mathcal{S}'$ seuraa lemmasta 12.8. Erityisesti, distribuution ja polynomin tulo on distribuutio.

HUOM. Jos distribuution kertominen C^∞-funktiolla onnistuikin helposti, yleensä distribuutioita **ei** voi kertoa keskenään.

Yksi distribuutioiden mielenkiintoisimpia ja hyödyllisimpiä ominaisuuksia on se, että niitä voi derivoida ja saatu tulos on yhä distribuutio – derivointia voi siis toistaa äärettömän monta kertaa ! Mutta kuinka tämä on mahdollista, jos jo epäjatkuvat L^p-funktiot ovat distribuutioita ?

Yo. filosofian mukaisesti, katsotaan ensin mitä derivointi tekee sileää funktiota $f(x)$ vastaavalle distribuutiolle $T_f \in \mathcal{S}'$. Jos $f \in C^1(\mathbb{R}^d)$ ja (esim.) $\partial_{x_j} f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, silloin kaikilla $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ tulo $g(x)\,\partial_{x_j} f(x)$ on integroituva, ja osittaisintegrointi antaa

$$\int_{\mathbb{R}^d} \partial_{x_j} f(x)\, g(x)\, dx \;=\; -\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \partial_{x_j} g(x)\, dx \;=\; -T_f(\,\partial_{x_j} g\,),$$

missä $\partial_{x_j} g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ Lauseen 9.13 mukaan. Tosin sanoen, f:n j:nnettä osittaisderivaattaa vastaa kuvaus $g \mapsto -T_f(\,\partial_{x_j} g\,)$.

Vastaava konstruktio voidaan tehdä kaikille temperoiduille distribuutioille.

MÄÄRITELMÄ 12.9. *Jos $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ on temperoitu distribuutio, määrittelemme sen (distribuutio)derivaatat $\partial_{x_j} T$ kaavoilla*

$$< \partial_{x_j} T,\, g > := \,-\, < T,\, \partial_{x_j} g >, \qquad j = 1, \ldots, d, \quad g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Erityisesti

$$< \partial^\alpha T,\, g > = \,(-1)^{|\alpha|} < T,\, \partial^\alpha g >, \qquad g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad \alpha \in \mathbb{N}^d. \tag{12.11}$$

Toisin sanoen, jokaisella distribuutiolla on kaikkien kertalukujen (distr.) derivaatat $\partial^\alpha T$, $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Lauseen 12.3 mukaan $\partial^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, sillä

$$|< \partial^\alpha T,\, g >| \;=\; |< T,\, \partial^\alpha g >| \le C\, p_N(\partial^\alpha g) \le C\, p_{N+|\alpha|}(\,g\,), \quad g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Niinpä jokaisella funktiolla $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ on kaikkien kertalukujen distribuutioderivaatat, mutta yleensä nämä eivät tietenkään enää ole funktioita.

ESIMERKKI 12.10. *(i) Jos* $f(x) = \frac{x}{|x|}$, $\quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *silloin* $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ *ja*

$$< f', g > := \; - < f, g' > = \; - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{|x|} g'(x)\,dx \; = \; \int_{-\infty}^{0} g'(x)\,dx - \int_{0}^{\infty} g'(x)\,dx$$

$$= \; g(0) + g(0) \; = \; 2 < \delta_0, g >, \qquad\qquad g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Siten $\frac{d}{dx} f \; = \; 2\delta_0$.

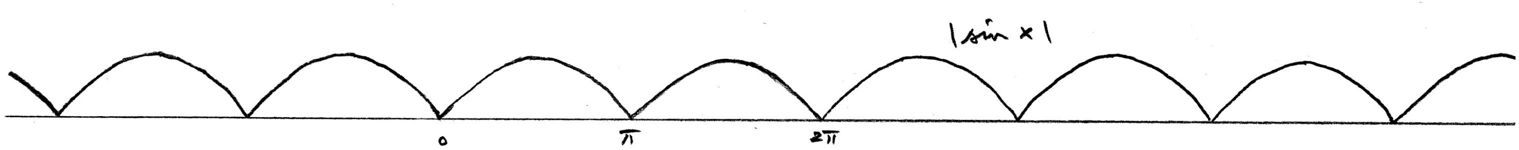
(ii) Mitä ovat derivaatat δ_0' *ja* $x\,\delta_0'$ *? Tiedetään että* $\delta_0' \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, *vrt.* (12.11), *ja että* $x\,\delta_0' \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, *vrt.* (12.10). *Lasketaan: Kun* $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$< \delta_0', g > = \; -\delta_0(g') \; = \; -g'(0) \qquad\qquad \textit{(eikä enempää voi sanoa);}$$

$$< x\,\delta_0', g > = < \delta_0', xg > = \; - < \delta_0, (xg)' > = \; - < \delta_0, xg'(x) + g(x) > = \; -g(0).$$

Siis $x\,\delta_0' = -\delta_0$.

(iii) Olkoon $f(x) = |\sin(x)|$, $x \in \mathbb{R}$.



Tämä $f \in L^\infty(\mathbb{R})$; *mitä ovat* f' *ja* f'' *? Lasketaan taas: Kun* $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$< f', g > = \; - < f, g' > = \; - \int_{-\infty}^{\infty} |\sin(x)|\, g'(x)\,dx \; = \; \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin(x)\,g'(x)\,dx$$

$$= \; \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+1} \Big|_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin(x) g(x) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \cos(x)\,g(x)\,dx$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \cos(x)\, g(x)\, dx$$

Laskun mukaan

$$f'(x) \;=\; \begin{cases} \quad \cos(x): \;\; 2n\pi < x < (2n+1)\pi, \\ - \;\; \cos(x): \;\; (2n+1)\pi < x < 2(n+1)\pi. \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

eli f:n distribuutioderivaatta $\equiv$ tavallinen derivaatta. Reaalianalyysin mukaan näin pitää ollakin, vrt. (A.1.8)*, sillä $f \in Lip_1(\mathbb{R})$ ja siten f abs. jatkuva sekä $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$.*

Entä toinen derivaatta ?

$$< f'', \, g > = \, - < f', \, g' > = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \cos(x)\, g'(x)\, dx \; =$$

$$= \quad - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big[(-1)^k \Big|_{k\pi}^{(k+1)\pi} \cos(x) g(x) + (-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin(x)\, g(x)\, dx \Big].$$

Siis

$$< f'', \, g > = \; 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k\pi) - \int_{-\infty}^{\infty} |\sin(x)|\, g(x)\, dx,$$

missä sarja suppenee itseisesti (vrt. Harjoitukset).

Edellisen esimerkin funktiolle $f(x) = |\sin(x)|$ näyttäisi siis pätevän

$$f'' \; = \; 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{k\pi} - |\sin x| \tag{12.12}$$

Mutta mitä tässä tarkoittaa distribuutioiden ääretön summa ? Eli missä mielessä sarja (12.12) suppenee ?!

Määritelmä 12.11. *Olkoot T, $T_j \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Sanomme, että*

$$T_j \; \to \; T \qquad\qquad \mathcal{S}' : ssa,$$

jos kaikilla $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\quad < T_j, \, g > \to < T, \, g > \quad$ kun $j \to \infty$.

Toisin sanoen jono distribuutioita suppenee mikäli kaikki vastaavat testitulokset $< T_j,\, g\ >$ suppenevat; Funktionaalianalyysin kielellä ilmaistuna tämä tarkoittaa että $T_j \to T$ avaruuden $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ w^*-topologiassa eli heikko* -topologiassa.

Kun vielä palataan Esimerkkiin 12.10 (iii), huomataan että summa $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{k\pi}$ suppenee $\mathcal{S}'$:ssa,

$$< \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{k\pi},\, g\ > = \lim_{M\to\infty} \sum_{k=-M}^{M} < \delta_{k\pi},\, g\ > = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k\pi), \qquad \forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

(MIKSI sarja $\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k\pi)$ suppenee ja MIKSI on $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{k\pi} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$?).

Yhteenvetona, funktiolle $f(x) = |\sin(x)|$, $x \in \mathbb{R}$, pätee $f'' = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{k\pi} - |\sin x|$, missä sarja suppenee $\mathcal{S}'$:ssa.

XII.4. Temperoitujen distribuutioiden Fourier muunnos. Palataan taas identiteettiin $\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\, g(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \widehat{g}(x)\, dx$ ja sen tulkintaan (12.7), jossa L^p-funktion Fourier muunnos ymmärrettiin temperoiduksi distribuutioksi,

$$\widehat{f} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}, \qquad < \widehat{f}, g > = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \widehat{g}(x)\, dx, \quad g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Distribuutio-filosofian mukaisesti tästä saadaan luonnollinen Fourier muunnos kaikille temperoiduille distribuutioille.

Määritelmä 12.12. *Temperoidun distribuution* $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ *Fourier muunnos* $\widehat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ *on distribuutio, joka saadaan kaavalla*

$$< \widehat{T},\, g\ > := < T,\, \widehat{g}\ >, \qquad g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d). \tag{12.13}$$

Koska $g \mapsto \widehat{g}$ jatkuva $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ja $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ jatkuva, tosiaankin $\widehat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

HUOM: (i) Koska $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on bijektio, Fourier muunnos on myös $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$:n bijektio. Erityisesti jokainen $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ on muotoa $T = \widehat{R}$ yksikäsitteisellä $R \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

(ii) Jos $T_j \to T$ avaruudessa $\mathcal{S}'$, silloin $\widehat{T_j} \to \widehat{T}$ samoin $\mathcal{S}'$:ssa, sillä

$$< \widehat{T_j},\, g\ > = < T_j,\, \widehat{g}\ > \to < T,\, \widehat{g}\ > = < \widehat{T},\, g\ >, \qquad \forall\, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Sama pätee tietysti toisinkin päin: Jos $\widehat{T_j} \to \widehat{T}$ avaruudessa $\mathcal{S}'$, niin tällöin $T_j \to T$ $\mathcal{S}'$:ssa.

(iii) Jos $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p \le \infty$, silloin $\widehat{f}$ olemassa $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$:n alkiona (sillä $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$). Mitä tästä distribuutiosta voi sanoa ?

Kun $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, saadaan

$$< f, g > - < f\chi_{B(0,M)}, g > = \int_{|x|\ge M} f(x)g(x)\,dx \to 0 \qquad \text{kun } M \to \infty.$$

Siis $f\chi_{B(0,M)} \to f$ $\mathcal{S}'$:ssa; kohdan (ii) nojalla $\mathcal{F}\big(\chi_{B(0,M)}f\big) \to \widehat{f}$ avaruudessa $\mathcal{S}'$, eli

$$\text{(12.14)} \qquad \int_{\mathbb{R}^d} \big(f\chi_{B(0,M)}\big)\widehat{\ }(\xi)\, g(\xi)\, d\xi \ \to < \widehat{f}, g > \qquad \forall\, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Lisäksi $f\chi_{B(0,M)} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, joten $\big(f\chi_{B(0,M)}\big)\widehat{\ }(\xi)$ on se vanha tuttu Fourier muunnos, jonka $\mathcal{S}'$-rajana $\widehat{f}$ saadaan. Näin luvun alussa esitetyt vaatimukset tulevat täytettyä.

ESIMERKKEJÄ. (i) Jos $a \in \mathbb{R}^d$,

$$< \widehat{\delta_a}\,,\, g\ > = < \delta_a, \widehat{g}\ > = \ \widehat{g}(a) \ = \ \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ia\cdot x} g(x)\,dx,$$

mistä huomataan:

$$\text{(12.15)} \qquad \widehat{\delta_a}(x) \ = \ e^{-ia\cdot x}, \qquad a \in \mathbb{R}^d.$$

Kun valitaan $a = 0$ saadaan

$$\text{(12.16)} \qquad \widehat{\delta_0}(x) \ = \ 1.$$

(ii) Eksponenttifunktion Fourier muunnos saadaan joko käänteismuunnoksen avulla, tai suoraan laskien: $< \widehat{e^{ia\cdot x}}\,,\, g\ > = < e^{ia\cdot x}, \widehat{g}\ > = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ia\cdot x}\, \widehat{g}(x)\,dx \ = \ (2\pi)^d g(a),$ Lauseen

9.8 mukaan. Siten

$$(12.17) \qquad \widehat{e^{ia\cdot x}} = (2\pi)^d\,\delta_a, \qquad a \in \mathbb{R}^d; \qquad \text{erityisesti} \quad \widehat{1} \;=\; (2\pi)^d\delta_0.$$

(iii) Koska jokainen testifunktio häviää äärettömyydessä, niin selvästikin $\delta_a \to 0$ distribuutiomielessä kun $|a| \to \infty$. Siispä samaa pätee Fouriermuunokselle, eli $e^{-ia\cdot x} \to 0$ distribuutiomielessä kun $|a| \to \infty$. Tämä on ensiajattelemalta hieman yllättävää! Tuloksen voi toki todistaa myös suoraan osittaisintegroinnilla (HT).

(iv) Kun $T \in \mathcal{S}'$, sekä $\partial_j T \in \mathcal{S}'$ että $x_j T \in \mathcal{S}'$. Mitkä ovat silloin Fourier muunnokset $\widehat{\partial_j T}$ ja $\widehat{x_j T}$, pätevätkö Lauseen 9.13 yhtälöt edelleen ? Lasketaan: kun $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$< \widehat{\partial_j T},\, g > = < \partial_j T,\, \widehat{g} > = \; - < T,\, \partial_j \widehat{g} > = < T,\; \widehat{(ix_j g)} \; > = < \widehat{T},\, ix_j g > = < ix_j \widehat{T},\, g >$$

Siis

$$(12.18) \qquad (\partial^\alpha T)^\frown \;=\; (i\,\xi)^\alpha\,\widehat{T}, \qquad T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), \quad \alpha \in \mathbb{N}^d.$$

Vastaavasti,

$$< \widehat{x_j T},\, g > = < x_j T,\, \widehat{g} > = < T,\, x_j \widehat{g} > = < T,\, -i\,\partial_j\,\widehat{g} \;> = < i\,\partial_j \widehat{T},\, g >$$

eli

$$(12.19) \qquad \partial^\alpha\,\widehat{T} \;=\; \mathcal{F}\big((-i\,x)^\alpha\,T\big), \qquad T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), \quad \alpha \in \mathbb{N}^d.$$

(v) Kun $P(x) = \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha x^\alpha$ on d:n muuttujan polynomi ja $T \in \mathcal{S}'$, silloin $P(x)T \in \mathcal{S}'$ ja ylläolevan mukaan $\big(P(x)T\big)^\frown = P(i\partial_\xi)\widehat{T}$, missä $P(i\partial_\xi) := \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha i^\alpha \partial^\alpha$. Kun tässä valitaan $T = 1 \in \mathcal{S}'$ ja yhdistetään laskuun (12.17), nähdään että

$$(12.20) \qquad \widehat{P}(\xi) \;=\; (2\pi)^d P(i\partial_\xi)\,\delta_0 \;=\; (2\pi)^d \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha\, i^\alpha\, \partial^\alpha \delta_0, \qquad \text{kun} \quad P \quad \text{m.v. polynomi.}$$

XII.5. Singulaarinen integraali. Edellisessä osaluvussa pääsimme laskemaan muutaman perusfunktion/distribuution Fourier muunnoksen, ja harjoituksissa selvitetään vielä lisää esimerkkeja, mm. monissa tilanteissa tarvittavat muunnokset funktioille

$$f(x) = \frac{1}{|x|^\gamma}, \qquad x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \qquad 0 < \gamma < d. \tag{12.21}$$

Huomaa että (12.21):n funktio $f = f\chi_{\{|x|<1\}} + f\chi_{\{|x|\geq 1\}} =: f_1 + f_2$ missä $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^d)$, sillä $\gamma < d$, ja jälkimmäinen tekijä $f_2 \in L^p(\mathbb{R}^d)$, kunhan valitaan $p < \infty$ riittävän suureksi. Esimerkin 12.7 (i) mukaan f siis määrittelee temperoidun distribuution.

Jo nyt olemme löytäneet funktioita (vakiot) joiden Fourier muunnokset eivät enää olleet funktioita. Delta-funktion voi kuitenkin tulkita mittana. Lasketaan siksi esimerkki funktiosta $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, jolle $\widehat{f}$ on aito distribuutio - ei edes mitta.

Esimerkissä 12.10 näytettiin, että jos $f(x) = \frac{x}{|x|}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, derivaatta $\frac{d}{dx} f = 2\delta_0$. Ottamalla tästä Fourier muunnos saadaan

$$i\xi \widehat{f}(\xi) = \widehat{(f')}(\xi) = 2\,\widehat{\delta_0} = 2.$$

Voisimme siis ajatella että

$$\widehat{f}(\xi) = -\frac{2i}{\xi} \qquad ?? \tag{12.22}$$

Pulmana on tässä kuitenkin että dimensiossa $d = 1$ funktio $h(\xi) = -\frac{2i}{\xi}$ ei ole integroituva missään origon ympäristössä, eikä se siksi ole sellaisenaan distribuutio – määritelmä $T_h(g) := \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)g(\xi)\, d\xi$ ei ole mielekäs useimmille $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Suureen $\frac{1}{\xi}$ operointi $\mathcal{S}(\mathbb{R})$:llä vaatiikin uuden tulkinnan. Idea on seuraava: Vaikka singulaarista integraalia $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x}\, g(x)\, dx$, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ei voikaan määritellä tavallisena Lebesgue integraalina, se voidaan ottaa n.k. pääarvointegraalina (engl. "principal value integral").

MÄÄRITELMÄ 12.13. *Olkoon $h \in L^1(\mathbb{R})$. Asetetaan*

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x}\, h(x)\, dx := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon < |x| < \frac{1}{\varepsilon}} \frac{1}{x}\, h(x)\, dx, \tag{12.23}$$

mikäli *k.o. raja-arvo on olemassa.*

Y.o. määritelmän idea on katkaista $1/x$:n singulariteetit symmetrisesti origon suhteen, jolloin esim. (hyvin määriteltyjen) integraalien summa

$$\int_{-M}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{M} \frac{1}{x}\, dx \ = \ 0, \qquad \forall \ 0 < \varepsilon < M < \infty. \tag{12.24}$$

Lähtien tästä liikkeelle pääsemme hyödyntämään sopivia kumoutumisilmiöitä.

Lause 12.14. *Pääarvointegraali*

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x}\, g(x)\, dx \tag{12.25}$$

on olemassa jokaisella $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. *Itse asiassa,* (12.25) *määrittelee temperoidun distribuution* $p.v.\frac{1}{x} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Todistus.

$$\int_{\varepsilon<|x|<\frac{1}{\varepsilon}} \frac{g(x)}{x}\, dx \ = \ \int_{\varepsilon<|x|<1} \frac{g(x)}{x}\, dx + \int_{1<|x|<\frac{1}{\varepsilon}} \frac{g(x)}{x}\, dx$$

Kun $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $|g(x)| \leq \frac{p_1(g)}{1+|x|^2}$ ja siten yo. integraaleista jälkimmäinen suppenee tavallisessa mielessä,

$$\int_{|x|>1} \frac{|g(x)|}{|x|}\, dx \ \leq \ \int_{1}^{\infty} \frac{p_1(g)}{x^3} \ \leq \ p_1(g).$$

Jäljelle jäävälle integraalille, kumoutumisen (12.24) nojalla

$$\int_{\varepsilon<|x|<1} \frac{g(x)}{x}\, dx \ = \ \int_{\varepsilon<|x|<1} \frac{g(x)-g(0)}{x}.$$

Väliarvolauseen mukaan $|g(x) - g(0)| \leq \max_{|\zeta|\leq 1} |g'(\zeta)|\, |x| \leq p_1(g)|x|$ aina kun $x \in [-1,1]$.

Siispä integraali $\int_{-1}^{1} \frac{|g(x)-g(0)|}{|x|}\, dx \leq 2p_1(g) < \infty$, ja kun $\varepsilon \to 0$

$$\int_{\varepsilon<|x|<1} \frac{g(x)}{x} \ \to \ \int_{|x|<1} \frac{g(x)-g(0)}{x}, \qquad \text{missä} \quad \left| \int_{|x|<1} \frac{g(x)-g(0)}{x} \right| \ \leq \ 2p_1(g)$$

Yhdistämällä arviot nähdään, että pääarvointegraali (12.25) suppenee ja että se määrittelee distribuution

$$p.v.\frac{1}{x} \ : \ g \ \mapsto \ p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x}\, g(x)\, dx, \qquad g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \quad \square$$

HUOM: Vastaavasti määritellään pääarvointegraalit

$$Hg(z) \;:=\; p.v.\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(x)}{z-x}\,dx := \langle\, \frac{1}{\pi}p.v.\frac{1}{x}\;,\; g(z-x)\,\rangle \qquad z\in\mathbb{R}, \tag{12.26}$$

ja samanlainen päättely antaa, että (12.26) suppenee jokaisella $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ja $z \in \mathbb{R}$.

KYSYMYS. Entä jos $g \in L^p(\mathbb{R})$? Suppeneeko (12.26) m.k. $z \in \mathbb{R}$. Entä onko *Hilbert muunnos* Hg jatkuva operaattori $L^p(\mathbb{R})$:ssä ??

Lopuksi, koska $p.v.\frac{1}{x} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, voimme miettiä sen Fourier muunnosta. Lauseen 12.14 voi tulkita muodossa

$$\frac{1}{x}\,\chi_{\{\varepsilon<|x|<\frac{1}{\varepsilon}\}} \;\to\; p.v.\frac{1}{x} \qquad \mathcal{S}' : \text{ssa}. \tag{12.27}$$

Niinpä

$$\mathcal{F}\left(p.v.\frac{1}{x}\right) \;=\; \lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{F}\left(\frac{1}{x}\,\chi_{\{\varepsilon<|x|<\frac{1}{\varepsilon}\}}\right) \qquad \mathcal{S}' : \text{ssa}.$$

Toisaalta kun $0 \neq \xi \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\varepsilon<|x|<\frac{1}{\varepsilon}} \frac{1}{x}\,e^{-i\xi x}\,dx \;=\; \int_{\varepsilon<|x|<\frac{1}{\varepsilon}} \frac{1}{x}\,(\cos(\xi x) - i\sin(\xi x))\,dx \;=\; -i\int_{\varepsilon<|x|<\frac{1}{\varepsilon}} \frac{1}{x}\,\sin(\xi x)\,dx$$

$$=\; -2i\frac{\xi}{|\xi|}\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{1}{x}\,\sin(|\xi|x)\,dx \;\to\; -2i\frac{\xi}{|\xi|}\int_0^{\infty}\frac{1}{x}\,\sin(x)\,dx = -\pi i\frac{\xi}{|\xi|}$$

kun $\varepsilon \to 0$, sillä $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ (Harjoitukset 4). Tässä perhe $\{\int_\varepsilon^{1/\varepsilon} \frac{1}{x}\,\sin(|\xi|x)\,dx : \varepsilon > 0\}$ on tasaisesti rajoitettu (MIKSI?), joten esim. Dominoidun Konvergenssin lauseen nojalla yo. raja-arvo suppenee myös $\mathcal{S}'$:ssa. Yhteenvetona, $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$: n alkioina

$$\mathcal{F}\left(p.v.\frac{1}{\xi}\right) \;=\; -\pi i\frac{x}{|x|}. \tag{12.28}$$

Otetaan tästä käänteis-Fourier muunnos: Lauseen 9.14 (i), tai Huomautuksen 9.15 mukaan $\big(\mathcal{F}^{-1}g\big)(x) \;=\; (2\pi)^{-1}\big(\mathcal{F}g\big)(-x)$ kun $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$; Harjoitustehtävistä taas tiedetään että

$< \mathcal{F}^{-1}T, g > = < T, \mathcal{F}^{-1}g >$ kun $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Siispä

$$\Big\langle \mathcal{F}^{-1}\left(-\pi i \frac{x}{|x|}\right), g\Big\rangle \;=\; -i\pi\Big\langle \frac{x}{|x|}, \mathcal{F}^{-1}g\Big\rangle = \frac{-i\pi}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{|x|}\,\widehat{g}(-x)\,dx =$$

$$= \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{|x|}\,\widehat{g}(x)\,dx \;=\; \frac{1}{-2i} < \mathcal{F}\left(\frac{x}{|x|}\right), g >,$$

missä toiseksi viimeinen yhtäsuuruus käytti muuttujan vaihtoa. Yhdistämällä tämä kaavaan (12.28) saamme ratkaisun dilemmaan (12.22),

$$\mathcal{F}\left(\frac{x}{|x|}\right) \;=\; -2i\; p.v.\frac{1}{\xi} \;\in \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

XII.6. Distribuutioiden konvoluutioista. Schwartzin funktioiden konvoluutiot toimivat hyvin yhteen Fourier muunnoksen kanssa; muistamme Lauseesta 9.3 että

$$(g * h)\widehat{\ }(\xi) = \widehat{g}(\xi)\,\widehat{h}(\xi) \quad \text{kaikilla} \quad g, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d). \tag{12.29}$$

Voisiko jotain vastaavaa päteä myös temperoiduille distribuutioille ?

Pulmana on jälleen kerran se ettei yleisten distribuutioiden tulo ole määritelty, eikä siksi kaava (12.29), tai konvoluutio $T * R$ ylipäätään, voi toimia kaikille distribuutiopareille $T, R \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Mutta joissakin (tärkeissä) erikoistapauksissa konvoluutio on hyvin määriteltävissä.

Aloitetaan seuraavalla havainnolla.

Lemma 12.15. *Jos $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ on kompaktikantajainen, s.o. $f(x) = 0$ jonkun rajoitetun joukon ulkopuolella, silloin*

$$\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \quad \text{ja} \quad \partial^\alpha \widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{N}^d.$$

Todistus. Jos f on kompaktikantajainen L^1-funktio, $\big\| |x|^{|\alpha|} f(x) \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \le R_0^{|\alpha|} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$, kun säde R_0 on valittu niin, että f häviää kuulan $B(0, R_0)$ ulkopuolella. Silloin Lauseesta 9.4 ja kaavasta (9.5) seuraa induktiolla, että Fourier muunnoksella $\widehat{f}(\xi)$ on kaikkien kertalukujen jatkuvat osittaisderivaatat, joille pätee $\partial^\alpha \widehat{f}(\xi) = \Big((-i\,x)^\alpha f(x) \Big)\widehat{\ }(\xi)$ kaikilla multi-indekseillä $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Jälkimmäinen väite seuraa perusarviosta $\|\widehat{g}\|_\infty \leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$. $\square$

Koska kompaktikantajaisille funktioille $L^p \subset L^1$, Lemma toimii yhtä hyvin kaikissa L^p-avaruuksissa, $1 \leq p \leq \infty$. Lemman avulla taas voimme määritellä kompaktikantajaisen funktion ja distribuution konvoluution, käyttäen kaavaa (12.29) esikuvana.

MÄÄRITELMÄ 12.16. *Jos $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ ja $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ on kompaktikantajainen, konvoluutio $f * T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ määritellään kaavalla* $\widehat{(f * T)} := \widehat{f}\,\widehat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Yllä Lemman 12.15 mukaan $\widehat{f}$ derivaattoineen on rajoitettu sileä funktio ja siksi tulo $\widehat{f}\,\widehat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, vrt. (12.10). Niinpä myös $f * T$ on hyvin määritelty $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$:n alkio. Edelleen, T:n ja funktion f distribuutioderivaattojen $\partial^\alpha f$ konvoluutiot $(\partial^\alpha f) * T$ ovat hyvin määriteltyjä, sillä $\mathcal{F}(\partial^\alpha f) = (i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)$ on korkeintaan polynomisesti kasvava C^∞-funktio, ja siksi $(i\xi)^\alpha \widehat{f}\,\widehat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, vrt. Määritelmä (12.10).

Distribuutioiden konvoluutio on erittäin hyödyllinen käsite ja työkalu, esimerkiksi sovelluksissa differentiaaliyhtälöihin, joita käsitellään lyhyesti luentojen viimeisissä osioissa. Voidaan osoittaa, että konvoluutio $f * T$ on hyvin määritelty silloinkin kun $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ ja f on *kompaktikantajainen distribuutio*. Kompaktikantajaisen distribuution Fourier muunnoksen lisäominaisuuksien ymmärtäminen vaatii kuitenkin teknisempiä tarkasteluja; asiaa luonnostellaan lyhyesti Appendixissä.

Konvoluutiota $f * T$ voidaan lähestyä myös toisella tavalla, joka muistuttaa enemmän konvoluution alkuperäistä määritelmää, kunhan funktio $f = \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on riittävän sileä, so. Schwartzin funktio. Jokaisella $h \in L^1(\mathbb{R}^d)$ voimme nimittäin tulkita

$$\phi * h(y) = \int_{\mathbb{R}^d} h(x)\phi(y-x)dx = \langle T_h, \phi(y - \cdot)\rangle, \qquad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \tag{12.30}$$

missä siis tulkitsemme h:n operaation distribuutioksi, missä viimeisessä merkinnässä se operoi pisteen $\cdot$ ilmaisemaan muuttujaan.

On luonnollista yrittää korvata tässä lähestymistavassa $h = T_h$ mielivaltaisella distribuutiolla T. Nimittäin selvästikin (MIKSI ?)

$$y \mapsto \phi(y - \cdot) \quad \text{on jatkuva kuvaus} \quad \mathbb{R}^d \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

ja lisäksi $p_N(\phi(y - \cdot)) \leq C_N(1 + |y|^2)^N$ kaikilla $N \geq 1$. Erityisesti, jos $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, niin funktio

$$y \mapsto \langle T, \phi(y - \cdot)\rangle \tag{12.31}$$

on jatkuva, kasvaa enintään polynomisesti (MIKSI?) ja siten määrittelee temperoidun distribuution. Kun muistetaan tulkinta (12.30), huomataan että yhtä lailla funktio (12.31) on tulkittavissa konvoluutioksi $\phi * T$! Jäljelle jää näyttää että tässä tilanteessa saadut kaksi eri tapaa tehdä konvoluutio antavat kuitenkin saman lopputuloksen.

Lause 12.17. *Kun $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ja $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, olkoon $R \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ yhtälön $\widehat{R} = \widehat{\phi}\,\widehat{T}$ määräämä distribuutio. Silloin R on jatkuva funktio, joka saadaan kaavasta*

$$R(y) := \langle T, \phi(y - \cdot)\rangle, \qquad y \in \mathbb{R}^d.$$

Lauseen 12.17 avulla taas osoitetaan mm. että reaalianalyysistä tuttu silotus toimii myös distribuutioille: konvolointi kompaktikantajaisella testifunktiolla antaa distribuutioillekin C^∞-approksimaation.

Lause 12.18. *Olkoon $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ testifunktio, jolle $\int_{\mathbb{R}^d} \phi = 1$. Jokaiselle distribuutiolle $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ pätee*

$$\phi * T \in C^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Lisäksi, jos merkitään $\phi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-d}\phi(x/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, silloin $\phi_\varepsilon * T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ ja

$$\phi_\varepsilon * T \to T \quad \textit{avaruudessa } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \quad \textit{kun} \quad \varepsilon \to 0^+.$$

Lauseiden 12.17 ja 12.18 todistukset vaativat jonkin verran teknisiä tarkasteluja, ja ne on siksi esitetty Appendix'ssä.

XIII. Jatkuvan Fourier muunnoksen sovelluksia

XIII.1. Poissonin summakaava. Seuraava lause kytkee yhteen jatkuvan ja periodisen Fourier muunnoksen. Sitä voi hyödyntää monissa eri yhteyksissä, tyypillisenä esimerkkinä signaalinkäsittely.

Lause 13.1. (Poissonin kaava) *Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ jatkuva funktio, jolle*

$$(i) \qquad |f(x)| \leq C(1+|x|)^{-1-\varepsilon}, \qquad x \in \mathbb{R} \quad ja$$

$$(ii) \qquad |\widehat{f}(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{-1-\varepsilon}, \qquad \xi \in \mathbb{R},$$

joillakin $\epsilon > 0$ ja $0 < C < \infty$. Silloin

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(2\pi n)\, e^{2\pi i n x}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{13.1}$$

Erityisesti, kun valitaan $x = 0$ saadaan

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(2\pi n). \tag{13.2}$$

HUOM. Lauseen oletukset eivät ole yleisimmät mahdolliset. Huomaa myös, että (i) & (ii) $\Rightarrow f$ jatkuva.

Todistus. Asetetaan

$$g(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k), \qquad x \in [0,1].$$

Ehdon (i) nojalla sarja suppenee itseisesti ja tasaisesti välillä $[0,1]$. Siispä $g(x)$ on jatkuva, $1-$periodinen ja sillä vastaavat Fourier kertoimet, vrt. (2.1),

$$\widehat{g}(n) = \int_0^1 g(x)\, e^{-2\pi i n x}\, dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(x+k)\, e^{-2\pi i n x}\, dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_k^{k+1} f(x)\, e^{-2\pi i n x}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2\pi i n x}\, dx = \widehat{f}(2\pi n), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Mutta ehdon (ii) mukaan $g(x)$:n Fourier sarja suppenee itseisesti. Siis Lause 2.8 $\Rightarrow$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k) \;=\; g(x) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{g}(n)\, e^{2\pi i n x} \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(2\pi n)\, e^{2\pi i n x}. \qquad \square$$

Jos Poissonin kaavassa halutaan sämplätä f:n arvoja muilla tasaväleillä, tehdään tarvittavat muuttujan vaihdot. Jos valitaan välin pituudeksi L, tarkastellaan Poissonin kaavaa pisteissä x/L funktiolle $x \mapsto f(L\,x)$. Silloin (2.1):n kautta päädymme muotoon

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+nL) \;=\; \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\frac{2\pi n}{L})\, e^{i\frac{2\pi n}{L}x}. \tag{13.3}$$

Kuten usein ennenkin, kaava on siisteimmillään kun valitaan $L = 2\pi$.

Tarkastelimme jo aiemmin distribuutiota $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n$. Sen Fourier-muunnos on helppo laskea Poissonin kaavan avulla. Määritellään tätä varten hieman yleisemmin kun $a > 0$:

$$\lambda_a \;:=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{an}$$

Tätä distribuutiota kutsutaan usein *Diracin kammaksi.* Olkoon $f \in S(\mathbb{R})$. Valitaan kaavassa (13.3) $L = a$ ja $x = 0$, jolloin se voidaan kirjoittaa yksinkertaiseen muotoon

$$\langle\, \lambda_a \,,\, f \,\rangle = \langle\, a^{-1}\lambda_{2\pi/a} \,,\, \widehat{f}\,\rangle.$$

Toisin sanoen, olemme näyttäneet että $\lambda_a = \mathcal{F}(a^{-1}\lambda_{2\pi/a})$, ja ottamalla vielä kerran Fourier-muunnos saamme huomioimalla kampojen parillisuuden

$$\widehat{\lambda}_a \;=\; \frac{2\pi}{a}\lambda_{2\pi/a}, \tag{13.4}$$

eli Diracin kamman Fourier-muunnos on myös Diracin kampa !

Tarkastellaan seuraavana Poissonin summakaavan sovelluksena lämpöyhtälöä; siinä valitsemme Lauseen 13.1 funktioksi gaussisen

$$f(x) \;=\; e^{-s|x|^2} \quad\Rightarrow\quad \widehat{f}(\xi) \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{s}}\, e^{-\frac{1}{4s}|\xi|^2}, \tag{13.5}$$

vrt. (9.11).

Kerrataan ensin mitä Luvussa VII.2 ja vastaavissa Harjoitustehtävissä osoitimme lämpöyhtälöstä; siellä tarkasteltiin ongelmaa

$$\partial_t u(x,t) = \partial_x^2 u(x,t), \qquad x \in [0,\pi],\ t > 0, \tag{13.6}$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad x \in [0,\pi], \tag{13.7}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) \equiv 0, \qquad t > 0. \tag{13.8}$$

Näytimme että (kun f laajennettiin parittomaksi funktioksi välille $[-\pi,\pi]$), ongelmalla on yksikäsitteinen ratkaisu

$$u(x,t) = (H_t * f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_t(x-y)\, f(y)\, dy, \tag{13.9}$$

missä (periodisella) lämpöytimellä on esitys

$$H_t(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 t}\, e^{inx}. \tag{13.10}$$

Lisäksi (13.7) tulkittiin L^2-mielessä, s.o. $\|u(x,t) - f(x)\|_{L^2(dx)} \to 0$, kun $t \to 0$.

Avoimeksi jäi, onko $u(x,t) \to f(x)$ pisteittäin alkuarvon $f(x)$ jatkuvuuspisteissä. Samoin avoimeksi jäivät useat lämpöytimen perusominaisuudet, kuten (fysikaalisesti järkevä) vaatimus H_t:n positiivisuudesta. Mutta Poissonin summakaavalla kaikki nämä ongelmat selviävät:

Kun verrataan edellisen sivun kaavoja (13.3) ja (13.10), ne ehdottavat että valitaan $L = 2\pi$ ja valitaan gaussinen $f(x)$ jolle $\widehat{f}(n) = e^{-tn^2}$, eli (13.5):ssä otetaan $s = 1/(4t)$. Silloin

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\, e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 t}\, e^{inx} \qquad \text{ja} \qquad 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+2\pi n) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x+2\pi n)^2}{4t}}$$

Poissonin summakaava antaa nyt lämpöytimelle esitykset

$$H_t(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 t}\, e^{inx} = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x+2\pi n)^2}{4t}}. \tag{13.11}$$

Tästä esityksestä $H_t(x)$:n positiivisuus on itsestään selvää ! Ratkaisun $u(x,t)$ pisteittäisen suppenemisen selvittämiseksi puolestaan tarkistamme onko $\{H_t\}_{t>0}$ perhe hyviä ytimiä. Koska $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_t(x)\,dx = 1$ ensimmäisen esityksen nojalla ja $H_t(x) \geq 0$ jälkimmäisen, hyvien perheiden vaatimuksista (3.4) - (3.6) kaksi ensimmäistä seuraa heti.

Jäljelle jää osoittaa, että $H_t(x)$:n massa keskittyy origoon, kun $t \to 0$. Kirjoitetaan tätä varten

$$H_t(x) \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{t}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x+2\pi n)^2}{4t}} \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}} + E_t(x),$$

missä $E_t(x) := \sqrt{\frac{\pi}{t}}\sum_{n\neq 0} e^{-\frac{(x+2\pi n)^2}{4t}}$. Ensinnäkin, integraali

$$\int_{\delta<|x|\leq\pi} \sqrt{\frac{\pi}{t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}\,dx \;\leq\; \sqrt{\frac{\pi}{t}}\, e^{-\frac{\delta^2}{4t}}\, 2\pi \to 0 \qquad \text{kun } t \to 0.$$

Jäännöstermin $E_t(x)$ arvioimiseksi,

$$\frac{n^2}{t} \;\geq\; \frac{1}{2t} + \frac{n^2}{2} \qquad \text{aina kun } \; n \geq 1,\; 0 < t < 1.$$

Kun $|x| \leq \pi$, saamme siten

$$E_t(x) \;\leq\; c\,t^{-1/2}\sum_{n\geq 1} e^{-\pi^2 n^2/t} \;\leq\; c\,t^{-1/2}\sum_{n\geq 1} e^{-\frac{\pi^2}{2}n^2} e^{-\frac{\pi^2}{2}\frac{1}{t}} \;\leq\; c_1 t^{-1/2} e^{-\frac{\pi^2}{2}\frac{1}{t}} \to 0$$

kun $t \to 0$, ja suppeneminen tasaista pisteen $x \in [-\pi,\pi]$ suhteen. Siksi $\int_{-\pi}^{\pi} E_t(x)\,dx \to 0$, ja myös kolmas hyvien perheiden vaatimuksista on todistettu.

SEURAUS 13.2. *Lämpöyhtälön* (13.6) - (13.8) *ratkaisulle* $u(x,t)$ *pätee*

$$u(x,t) \;\to\; f(x) \qquad \textit{kun} \;\; t \to 0,$$

jokaisessa alkuarvon $f(x)$ *jatkuvuuspisteessä* $x \in [0,\pi]$.

Todistus. Koska $\{H_t\}_{t>0}$ on perhe hyviä ytimiä, väite seuraa esityksestä (13.9) ja Lauseesta 3.7. $\square$

Lopuksi, entä jos alkuarvolla on epäjatkuvuuspisteitä ? Yo. argumenttien ja Lauseen A.1.3 avulla saadaan seuraava (alustava) tulos.

Lause 13.3. *Jos alkuarvo* $f \in L^2(-\pi,\pi)$ *ja* $u(x,t)$ *on lämpöyhtälön* (13.6) - (13.8) *ratkaisu, silloin löytyy jono* $\{t_j\}$, *jolle*

$$u(x,t_j) \to f(x) \quad \textit{melkein kaikilla } x \in [0,\pi], \quad \textit{kun} \quad t_j \to 0.$$

Voidaan osoittaa, että pätee tarkemmin: Melkein kaikilla $x \in [0,\pi]$ ratkaisujen arvot $u(x,t) \to f(x)$ kun $t \to 0$. Tämä tulos, tai yleisemminkin tieto mille hyville perheille $\{K_t\}_{t>0}$ avaruuden $\mathbb{R}^d$ ytimiä pätee

$$\lim_{t\to 0} (K_t * f)(x) \;=\; f(x) \qquad \text{m.k. } x \in \mathbb{R}^d, \qquad f \in L^p(\mathbb{R}^d),\ 1 \le p \le \infty, \tag{13.12}$$

vaatii lisämenetelmiä Reaalianalyysistä. Erityisesti tarvitaan nk. Hardy-Littlewoodin maksimaalifunktion apua.

HUOM: (13.12) ei päde kaikille hyville perheille, mutta toimii riittävän "säännöllisille" perheille, kts. esimerkiksi [Grafakos, Corollary 2.1.17]. Lämpöytimet $\{H_t\}_{t>0}$ toteuttavat nämä ehdot.

XIII.2. Differentiaaliyhtälön perusratkaisu. Kuten jo kurssin alkuosassa oli puhetta, Fourier muunnos muuntaa vakiokertoimiset differentiaalioperaattorit polynomilla kertomiseksi. Tämä antaa yleiset ja tehokkaat menetelmät yhtälöiden ratkaisemiseksi; käydään seuraavassa läpi vain muutama perusidea tai lähtökohta tästä teemasta.

Vakiokertoimisella lineaarisella differentiaaliyhtälöllä tarkoitetaan yhtälöä

$$\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha\, \partial^\alpha u \;=\; f, \tag{13.13}$$

missä f on annettu funktio (tai distribuutio) ja funktio (tai distribuutio) u on etsitty yhtälön ratkaisu; luvut a_α, $\alpha \in \mathbb{N}^d$, ovat vakioita. Tyypillisiä esimerkkejä ovat Laplace yhtälö

$$\Delta u \;=\; 0 \qquad \text{eli} \qquad \left(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \cdots + \partial_{x_d}^2\right) u \;=\; 0,$$

tai aikaisemmissa luvuissa tarkastellut lämpöyhtälö $\partial_t u = \Delta u$ ja aaltoyhtälö $\partial_t^2 u = \Delta u$.

Yhtälön (13.13) voi kirjoittaa muodossa

$$P(\partial)u \;=\; f, \qquad \text{missä } P(\xi) := \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \xi^\alpha$$

on d:n muuttujan polynomi. Etsitään myös ratkaisua mahdollisimman yleisellä f. Jos otetaan Fourier muunnos, saadaan $P(i\xi)\widehat{u} = \widehat{f}$. Halutaan nyt ratkaista u: Jos löytyisi (distribuutio) E, jolle

$$P(i\xi)\widehat{E} \;=\; 1 \tag{13.14}$$

silloin ehdosta $\widehat{u} = \widehat{E}\,\widehat{f}$ voitaisiin ratkaisu u (ainakin formaalisti) määrätä. Distribuutio E on kuitenkin mukavin määritellä ilman Fourier muunnosta; koska $\widehat{\delta}_0 = 1$, vaatimus (13.14) on yhtäpitävää ehdon $P(\partial)E = \delta_0$ kanssa.

MÄÄRITELMÄ 13.4. *Olkoon $P(\partial) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \partial^\alpha$ vakiokertoiminen lineaarinen differentiaalioperaattori. Distribuutio E on operaattorin $P(\partial)$* **perusratkaisu** *("fundamental solution"), mikäli*

$$P(\partial)E \;=\; \delta_0.$$

Tarkastellaan ensin muutamia esimerkkejä perusratkaisuista $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

ESIMERKKI 13.5. *(i) Laplace operaattorille $P(\partial) := \Delta$ on $P(i\xi) = -\sum_{j=1}^d \xi^2 = -|\xi|^2$. Jos $d > 2$, voimme hyödyntää Harjoitustehtävien tuloksia, joiden mukaan*

$$f(x) \;=\; \frac{1}{|x|^{d-2}} \quad\Rightarrow\quad \widehat{f}(\xi) \;=\; c_d^{-1}\frac{1}{|\xi|^2}$$

sopivalla vakiolla c_d. Vakion c_d arvon voi laskea samaan tapaan kuin alla kohdassa (ii). Lokaalisti integroituvana ja äärettömyydessä rajoitettuna funktiona $E := -\frac{c_d}{|x|^{d-2}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, ja sen (distribuutio)derivaatoille

$$(\Delta E)^\wedge(\xi) \;=\; -|\xi|^2\,\widehat{E} \;=\; |\xi|^2\frac{1}{|\xi|^2} \;=\; 1 \;=\; \widehat{\delta}_0.$$

Siis $\Delta E = \delta_0$, ja E on Laplace yhtälön perusratkaisu.

(ii) Kun $d = 2$, y.o. konsti ei toimi; väitämme, että tasossa Laplace yhtälön perusratkaisu on $E(x) := \frac{1}{2\pi} \log |x|$. Osoitetaan tämä suoraan laskulla: Olkoon $f(x) = \log |x|$. Koska $f(x)$ lokaalisti integroituva ja $\Delta f = 0$ joukossa $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, jokaisella $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$

$$< \Delta f, g > = < f, \Delta g > = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} f(x)\Delta g(x) - \Delta f(x) g(x)\, dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \operatorname{div}\Big[f(x)\nabla g(x) - \nabla f(x) g(x) \Big]\, dx.$$

Viimeiseen termiin sovelletaan divergenssilausetta ja päästään haluttuun tulokseen

$$< \Delta f, g > = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|=\varepsilon} (f(x)\nabla g(x) - g(x)\nabla f(x)) \cdot \frac{x}{|x|}\, ds \;=\; 2\pi g(0), \qquad g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2),$$

sillä $\nabla f(x) = \frac{x}{|x|^2}$ ja $\int_{|x|=\varepsilon} |\log|x|\, \nabla g(x)|\, ds = \mathcal{O}(\varepsilon \log \varepsilon) \to 0$ kun $\varepsilon \to 0$.

(iii) Vastaavalla päättelyllä kuin kohdassa (ii), tai ottamalla Fourier muunnos x-muuttujan suhteen, osoitetaan että $(\partial_t - \Delta)E = \delta_0(x,t) = \delta_0(x)\delta_0(t)$, kun

$$E(x,t) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-|x|^2/4t}, & t > 0, \qquad \textit{ja} \\ 0, & t \le 0. \end{cases}$$

KYSYMYS: Onko jokaisella operaattorilla $P(\partial)$ perusratkaisua $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$?

Formaalisti (13.14):sta saadaan

$$\widehat{E} \;=\; \frac{1}{P(i\xi)},$$

mutta pulma on tietysti, voiko suureelle $1/P(i\xi)$ aina antaa tulkinnan, joka tekisi siitä $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$:n alkion - muistammehan osaluvusta XII.5, että jos $d = 1$ ja $P(\xi) = \xi$, silloin $1/P(i\xi)$:lle tarvittiin tulkinta pääarvointegraalina,

$$p.v.\, \frac{1}{i\xi} \;=\; \frac{1}{2}\mathcal{F}\left(\frac{x}{|x|}\right)(\xi) \;\in\; \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

[TARKISTA: Jos $T := p.v.\, \frac{1}{i\xi}$, osoita että tosiaan $i\xi\, T = 1$, avaruuden $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ alkioina.]

Yleiseen tilanteeseen antaa vastauksen kuuluisa Ehrenpreis - Malgrangen lause: perusratkaisu löytyy jokaiselle lineaariselle vakiokertoimiselle operaattorille. Ehrenpreis ja Malgrange esittivät konstruktionsa avaruudessa $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) \equiv C_c^\infty(\mathbb{R}^d)'$ [Tässä kompaktikantajaisten C^∞-funktioiden avaruudelle on annettu sopiva topologia].

Distribuutioavaruuksista $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ on pienempi, so. $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Yleensä oppikirjoissa Ehrenpreis - Malgrangen lause esitetään alkuperäisessä muodossaan, ks. esimerkiksi [Rudin, Functional Analysis]. Lisävaivalla voi kuitenkin osoittaa, että aina löytyy perusratkaisu $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, ks. [Hörmander, Arkiv för Matematik 53 (1958), ss. 555 - 568].

Kun perusratkaisu E on käytössä, vakiokertoiminen yhtälö

$$\sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha \, \partial^\alpha u = f \tag{13.15}$$

ratkeaa varsin yleisissä tilanteissa; riittää esimerkiksi että f on kompaktikantajainen L^1-funktio. Appendix'ssä selvitetään kompaktikantajaisten distribuutioiden ominaisuuksia; noiden tietojen ja alla esitettävän avulla (13.15) ratkeaa myös kun f on kompaktikantajainen distribuutio.

Yhtälön (13.15) ratkaisumenetelmän kuvaamiseen tarvitaan ensin

LEMMA 13.6. *Olkoot $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ ja $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ kompaktikantajainen funktio. Silloin niiden (distribuutio-)derivaatoille pätee*

$$\partial^\alpha (f * T) \;=\; (\partial^\alpha f) * T \;=\; f * (\partial^\alpha T) \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^d.$$

Todistus. Identiteetit voi todistaa suoraan käyttäen distribuutioderivaattojen määritelmää, ks. [Rudin, Functional Analysis]. Helpoiten todistus sujuu kuitenkin Fourierpuolella: Koska (12.18):n mukaan

$$\mathcal{F}[\partial^\alpha (f * T)] \;=\; (i\xi)^\alpha \mathcal{F}[f * T] \;=\; [(i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)]\, \widehat{T}(\xi) \;=\; \widehat{f}(\xi)\, [(i\xi)^\alpha\, \widehat{T}(\xi)]$$

missä $(i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)$ on korkeintaan polynomisesti kasvava C^∞-funktio, distribuutioiden konvoluution eli Määritelmän 12.16 nojalla väite seuraa ottamalla käänteinen Fourier muunnos. $\square$

Seuraus 13.7. *Jos $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ on operaattorin $P(\partial) := \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \partial^\alpha$ perusratkaisu ja jos $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ kompaktikantajainen funktio, silloin*

$$u := f * E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$$

ratkaisee differentiaaliyhtälön $\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \partial^\alpha u = f$.

Todistus. Edellisen lauseen mukaan $P(\partial)(f * E) = f * \big(P(\partial)E\big) = f * \delta_0 = f$. Viimeinen yhtäsuuruus nähdään taas Fourier muunnoksen avulla; $\mathcal{F}(f * \delta_0) = \widehat{f}\,\widehat{\delta_0} = \widehat{f} \cdot 1 = \widehat{f}$. $\square$

HUOM: Sopivissa tilanteissa, kuten Esimerkin 13.5 Laplace yhtälön tapauksessa jossa perusratkaisu tunnetaan eksplisiittisesti, pystyy kompaktikantajaisuudenkin ehtoa usein vielä lieventämäään.

XIII.3. Keskeinen raja-arvolause. Gaussin käyrä nousee esiin monia eri satunnaisilmiöitä mallittaessa - mistä tämä johtuu ? Asian selittää keskeinen raja-arvolause, joka nimensä mukaisesti on yksi stokastiikan ja sen sovellusten kulmakiviä. Ja keskeisen raja-arvolauseen todistus taas perustuu Fourier muunnokseen !

Tuloksen tarkempaa selittämistä ja formulointia varten kerrataan aluksi muutama (aivan perus)käsite todennäköisyyslaskennasta.

• Tarkastelujen perustalla meillä on *todennäköisyysavaruus* $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, missä $\mathbb{P}$ on todennäköisyysmitta Ω:lla, s.o. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, ja Σ on $\mathbb{P}$-mitallisten Ω:n osajoukkojen kokoelma.

Voimme ajatella Ω:aa esim. kaikkien mahdollisten kokeiden tuloksina ja Σ:aa erilaisten tapahtumien joukkona. Esim. nopanheitossa, jos 0 vastaa kruunaa ja 1 vastaa klaavaa, voimme valita $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

• *Satunnaismuuttuja* on mitallinen funktio $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Esim. nopanheitossa $X = X_n$ voisi olla tulos n:nnellä heitolla, jolloin $X(w) = w_n \in \{0, 1\}$ jokaisella $w = (w_k)_{k=1}^{\infty}$.

• Satunnaismuuttujan X *jakauma* on (Borel-)mitta $\mu(A) := \mathbb{P}(\, X^{-1}A\,)$. Merkitään lyhyesti

$$\mathbb{P}(a \leq X < b) := \mathbb{P}(\{w \in \Omega : a \leq X(w) < b\}), \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Yllä (reilussa) kolikon heitossa $\mathbb{P}(X_n = 1) = 1/2$ ja $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1/2$ (n:s heitto).

Oletamme jatkossa, että satunnaismuuttujien X jakaumat ovat jatkuvia, s.o.

$$\mathbb{P}(a \leq X < b) \;=\; \int_a^b f(t)\, dt \tag{13.16}$$

jollekin $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f \geq 0$. Koska $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, on $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = 1$. Oletuksen (13.16) avulla pysymme funktioiden Fourier muunnosten piirissä, mutta y.o. oletus ei ole välttämätön; todistuksen lopussa kommentoidaan lyhyesti kuinka päättelyä pitää muuttaa yleisten jakaumien tapauksessa. (Huomaa myös, että yo. kolikon heitto *ei* toteuta oletusta (13.16).)

• Kuten stokastiikassa yleensäkin, tulkitaan satunnaismuuttujan integraali tai keskiarvo *odotusarvona*, ja merkitään

$$\mathbb{E}(X) \;:=\; \int_\Omega X(w)\, d\mathbb{P}(w) \tag{13.17}$$

Jos $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on Borel mitallinen, yhdiste $h \circ X$ on $\mathbb{P}$-mitallinen, so. satunnaismuuttuja. Tämän uuden satunnaismuuttujan odotusarvon voi helposti laskea X:n jakauman avulla,

$$\mathbb{E}\big(h(X)\big) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x)\, dx. \tag{13.18}$$

Kaavan (13.18) todistamista varten, olkoon ensin $h(t) = \chi_{[a,b)}$. Silloin (13.18) *on* sama kuin (13.16). Ottamalla näistä lineaarisia kombinaatioita saadaan (13.18) jokaiselle yksinkertaiselle funktiolle. Alhaalta päin approksimoinnilla ja monotonisen konvergenssin avulla saadaan sitten (13.18) jokaiselle Borel-mitalliselle h, jolle $h(x)f(x) \in L^1(\mathbb{R})$.

Erityisesti, X:n integroituvuusominaisuudet riippuvat vain funktiosta $f(x)$. Esimerkiksi,

$$\mathbb{E}(X^2) \;< \infty \;\Leftrightarrow\; (1 + x^2) f(x) \in L^1(\mathbb{R}).$$

Tässä tilanteessa $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ (Hölder) ja voimme normalisoida $X \to \frac{1}{\sigma}(X - a)$ missä

$$\text{odotusarvo} \quad a = \mathbb{E}(X) \quad \text{ja varianssi} \quad \sigma^2 = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}(X)\,)^2\big].$$

Yo. normalisoinnin jälkeen $\mathbb{E}(X) = 0$ ja $\mathbb{E}(X^2) = 1$.

• Viimeisenä tn-käsitteenä, sanotaan että satunnaismuuttujat X_1 ja X_2 ovat *riippumattomia*, jos

(13.19)

$$\mathbb{P}(a_1 \le X_1 < b_1,\, a_2 \le X_2 < b_2) \;=\; \mathbb{P}(a_1 \le X_1 < b_1)\mathbb{P}(a_2 \le X_2 < b_2), \quad \forall\, a_j, b_j \in \mathbb{R}.$$

Näillä neuvoin todistetaan

Teoreema 13.8. (Keskeinen raja-arvolause) *Olkoon $X_1, X_2, X_3, \ldots$ jono riippumattomia satunnaismuuttujia, jotka ovat samoin jakautuneita, so.* (13.16) *pätee samalla funktiolla f. Oletetaan myös että*

$$\mathbb{E}(X) = 0 \quad \textit{ja} \quad \mathbb{E}(X^2) = 1, \qquad X = X_j. \tag{13.20}$$

Jos $S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, $\quad n \in \mathbb{N}$, $\quad$ silloin kun $n \to \infty$,

$$\mathbb{P}\left(a \le \frac{S_n}{\sqrt{n}} < b\right) \;\to\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt, \qquad a, b \in \mathbb{R}. \tag{13.21}$$

Saadaan siis sama raja-arvo (13.21) täysin riippumatta alkuperäisestä jakaumasta f ! Kuten edellä oli puhetta, lause pätee myös diskreeteille jakaumille, olennaista on vain että $\mathbb{E}(X_j^2) < \infty$. Jos luovumme normalisaatiosta (13.20), ja merkitään $a = \mathbb{E}(X_j)$, $\quad \sigma^2 = \mathbb{E}\big[(X_j - \mathbb{E}(X_j)\,)^2\big]$, silloin (13.21) saa muodon

$$\mathbb{P}\left(a \le \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left[\frac{1}{n}S_n - a\right] < b\right) \;\to\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

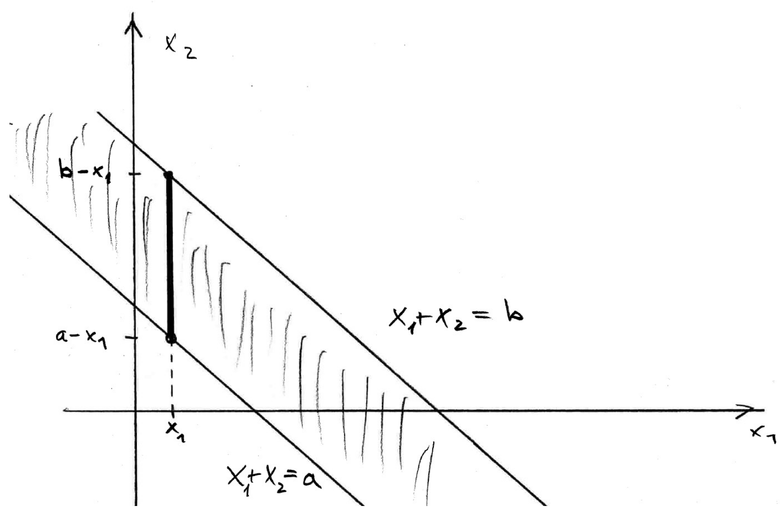
Esimerkiksi suurten lukujen laki "$\frac{1}{n}S_n \to a$ todennäköisyydellä 1" seuraa tästä heti.

Teoreeman 13.8 todistus. Tulkitaan ensin oletukset (13.20) jakauman $f(x)$ avulla; kaavan (13.18) mukaan nämä kertovat että

$$(13.22) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx = 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,f(x)\,dx = 1.$$

Seuraavaksi haetaan jakaumalle $\mathbb{P}(a \leq S_n < b)$ esitys funktion $f(x)$ avulla. Riippumattomuuden nojalla (MIKSI ?)

$$\mathbb{P}(a \leq X_1 + X_2 < b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) \int_{a-x_1}^{b-x_1} f(x_2)\,dx_2\,dx_1 = \int_{a \leq x_1+x_2<b} f(x_1)f(x_2)\,dx_1\,dx_2.$$



Yleisesti

$$\mathbb{P}(a \leq S_n < b) = \int_{a \leq x_1+x_2+\cdots+x_n<b} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n$$

Tehdään tähän esitykseen muuttujan vaihto $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = y_k$ ja merkitään $x = y_n$, jolloin

$$\mathbb{P}(a \leq S_n < b) = \int_a^b \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f(x-y_{n-1})f(y_{n-1}-y_{n-2})\cdots f(y_2-y_1)f(y_1)dy_1\,dy_2\cdots dy_{n-1}\,dx$$

$$= \int_a^b (f * f * \cdots * f)(x)\, dx$$

missä konvoluutio on otettu $n-1$ kertaa. Vielä yhdellä muuttujan vaihdolla

$$\mathbb{P}\left(a \le \frac{S_n}{\sqrt{n}} < b\right) \;=\; \sqrt{n}\int_a^b (f * f * \cdots * f)(\sqrt{n}\, x)\, dx. \tag{13.23}$$

Näin pääsemme käyttämään Fourier analyysiä. Koska $f \in L^1(\mathbb{R})$, Lauseen 9.3 mukaan $(f * f * \cdots * f)\widehat{\ }(\xi) = \big[\widehat{f}(\xi)\big]^n$. Siten Lauseesta 9.7 saadaan kaikille $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} \Big[\sqrt{n}\,(f * f * \cdots * f)(\sqrt{n}\, x)\Big]\, \widehat{g}(x)\, dx \;=\; \int_{\mathbb{R}} \left[\widehat{f}\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)\right]^n g(\xi)\, d\xi. \tag{13.24}$$

Näiden lausekkeiden analysoimiseksi tarkastellaan eksponenttifunktion sarjakehitelmää,

$$e^{ix} \;=\; 1 + ix - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x), \qquad \text{missä } \varepsilon(x) \in L^\infty(\mathbb{R}) \text{ ja } \varepsilon(x) \to 0 \text{ kun } x \to 0.$$

Siten

$$\widehat{f}\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right) \;=\; \int_{\mathbb{R}} e^{-i\frac{\xi}{\sqrt{n}}x} f(x)\, dx \;=\; \int_{\mathbb{R}} \left[1 - \frac{i\xi x}{\sqrt{n}} - \frac{\xi^2 x^2}{2n}\Big(1 - 2\varepsilon(\frac{\xi x}{\sqrt{n}})\Big)\right] f(x)\, dx,$$

mikä oletusten (13.22) mukaan antaa

$$\widehat{f}\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right) \;=\; 1 - 0 - \frac{\xi^2}{2n}\,(1 + \delta_n)$$

Tässä $\delta_n \;=\; -2\int_{\mathbb{R}} x^2\, \varepsilon(\frac{\xi x}{\sqrt{n}})\, f(x)\, dx \;\to\; 0$ kun $n \to \infty$, dominoidun konvergenssin avulla [Muista: $\varepsilon(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$].

Siispä jokaisella $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\left[\widehat{f}\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)\right]^n \;=\; \left[1 - \frac{\xi^2}{2n}\,(1 + \delta_n)\right]^n \to e^{-\frac{\xi^2}{2}} \qquad \text{kun } n \to \infty.$$

Sijoitetaan tämä kaavaan (13.24); nyt $|\widehat{f}(\xi)| \le \|f\|_{L^1} = 1$, ja taas dominoituun konvergenssiin sekä yhtälöön (9.11) ja Lauseeseen 9.7 vedoten,

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\widehat{f}\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)\right]^n g(\xi)\, d\xi \;\to\; \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\xi^2}{2}}\, g(\xi)\, d\xi \;=\; \int_{\mathbb{R}} \Big[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\Big]\widehat{\ }(\xi)\, g(\xi)\, d\xi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, \widehat{g}(x) \, dx$$

Olemme osoittaneet, että jokaisella $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\sqrt{n} \, (f * f * \cdots * f)(\sqrt{n} \, x) \right] \phi(x) \, dx \;\to\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, \phi(x) \, dx$$

kun $n \to \infty$. Lopuksi, aivan kuten Weylin kriteerin eli Lauseen 5.2 todistuksessa, arvioidaan karakteristista funktiota $\chi_{[a,b)}$ ylä- ja alapuolelta funktioilla $\phi_\varepsilon^{\pm}(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, niin että $\phi_\varepsilon^{-}(x) \le \chi_{[a,b)}(x) \le \phi_\varepsilon^{+}(x)$ ja yhtäsuuruus pätee molemmissa arvioissa, paitsi mahdollisesti kun $|x - a| < \varepsilon$ tai $|x - b| < \varepsilon$. Ja samalla tavalla kuten (5.5):ssä, saamme nyt

$$\mathbb{P}\left(a \le \frac{S_n}{\sqrt{n}} < b \right) \;=\; \int_a^b \sqrt{n}(f * f * \cdots * f)(\sqrt{n} \, x) \, dx \;\to\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx.$$

Keskeinen raja-arvolause on näin todistettu. $\square$

HUOM: Kaavan (13.18) mukaan, jos satunnaismuuttujalla X on jakauma (13.16), silloin

$$\widehat{f}(\xi) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) \, dx \;=\; \mathbb{E}(e^{-i\xi X}).$$

Niinpä yleisillä satunnaismuuttujilla (joilla ei jatkuvaa jakaumaa), keskeinen raja-arvolause tehdäänkin käyttäen funktiota $\mathbb{E}(e^{-i\xi X})$! Päättelyn pääpiirteet ovat seuraavat:

Ensinnäkin riippumattomuuden vuoksi

$$\mathbb{E}(e^{-i\xi S_n}) \;=\; \mathbb{E}(e^{-i\xi X_1})\mathbb{E}(e^{-i\xi X_2}) \cdots \mathbb{E}(e^{-i\xi X_n}) \;=\; \left[\mathbb{E}(e^{-i\xi X}) \right]^n,$$

missä viimeinen yhtäsuuruus saadaan siitä, että X_j:t ovat samoin jakautuneita. Kun tämä yhdistetään Fubinin lauseeseen, saadaan

$$\mathbb{E}(\, \widehat{g} \circ S_n) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \mathbb{E}(e^{-i\xi S_n}) \, d\xi \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \left[\mathbb{E}(e^{-i\xi X}) \right]^n d\xi, \qquad g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Kuten jatkuvien jakaumienkin tilanteessa, saamme nyt

$$\mathbb{E}(\, \widehat{g} \circ S_n) \;\to\; \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \, g(\xi) \, d\xi \;=\; = \; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, \widehat{g}(x) \, dx.$$

Kun vielä arvioidaan karakteristista funktiota $\chi_{[a,b)}$ ylä- ja alapuolelta funktioilla $\phi_\varepsilon^\pm(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, saadaan keskeiselle raja-arvolauseelle todistus kaikkien riippumattomien, (13.20):lla normalisoitujen ja samoin jakautuneiden satunnaismuuttujien tapauksessa.

LOPPU

APPENDIX:.

Oletamme tunnetuksi mittateorian perusteet, siinä laajuudessa kuin ne on esitetty kurssilla "Mitta ja Integraali". Lisäksi tarvitsemme muutamia asioita mm. kurssilta "Reaalianalyysi I".

Alla esitetään tarvittavista Reaalianalyysin kurssin asioista lyhyt yhteenveto; tarkemmat yksityiskohdat ja todistukset sekä selitystä yhteyksistä muihin matematiikan kysymyksiin löytyy esim. Ilkka Holopaisen luentomuistiinpanoista "Reaalianalyysi I". Holopaisen muistiinpanoihin [H] löytyy linkki tämän kurssin kotisivulta.

Vastaavat tarvittavat mittateorian ja reaalianalyysin tiedot on esitetty esimerkiksi myös etusivulla mainitussa W. Rudin kirjassa "Real and Complex Analysis".

A.1. L^p-AVARUUDET

Olkoon (X, σ, μ) mitta-avaruus; tällä kurssilla yleensä joko $X = [-\pi, \pi]$ ja $d\mu = dx/(2\pi)$, eli μ on Lebesguen mitta jaettuna 2π:llä, tai sitten $X = \mathbb{R}^d$ (dimensio $d \geq 1$) ja μ on Lebesguen mitta $\mathbb{R}^d$:llä. Kun f mitallinen funktio, merkitään

$$\|f\|_{L^p(\mu)} = \|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Samaistetaan funktiot f ja g, jos $\mu-$melkein kaikkialla $f(x) = g(x)$; silloin $\|f\|_{L^p(\mu)} = 0$ jos ja vain jos $f = 0$.

A.1.1. Hölderin ja Minkowskin epäyhtälöt. Kun $1 \leq p < \infty$, $\|f\|_{L^p(\mu)}$ toteuttaa Minkowskin epäyhtälön [H, Lause 1.39],

$$\|f + g\|_{L^p(\mu)} \leq \|f\|_{L^p(\mu)} + \|g\|_{L^p(\mu)}. \tag{A.1.1}$$

Lisäksi $\|af\|_{L^p(\mu)} = |a|\|f\|_{L^p(\mu)}$ vakioilla a. Siis yo. samaistuksella, $\|f\|_{L^p(\mu)}$ on normi avaruudessa

$$L^p(X) = \{f : X \to \mathbb{C} \text{ mitallinen, } \|f\|_{L^p(\mu)} < \infty\}.$$

Avaruus $L^p(X)$ on täydellinen norminsa suhteen, eli $L^p(X)$ on Banach avaruus [H, Lause 1.45].

L^p-avaruuksien keskeinen työkalu on Hölderin epäyhtälö [H, Lause 1.35]: jos

$$1 < p < \infty, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

ja $f \in L^p(X)$, $g \in L^q(X)$, silloin

$$\int_X |f\,g|\,d\mu \le \left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X |g|^q\,d\mu\right)^{1/q} \tag{A.1.2}$$

Kun $p = \infty$, avaruus $L^\infty(X)$ koostuu funktiosta f, jotka ovat rajoitettuja nollamittaisen joukon ulkopuolella [eli funktioista, jotka ovat rajoitettuja modulo yo. samaistus: "$f \simeq g$ jos $\mu-$melkein kaikkialla $f(x) = g(x)$"].

Avaruuden $L^\infty(X)$ normiksi otetaan funktion *oleellinen supremum*,

$$\|f\|_{L^\infty} \;:=\; \operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} |f(x)| \;=\; \inf\{M :\ \text{osajoukko } \{x \in X, |f(x)| > M\} \text{ on nollamittainen}\}$$

Yo. samaistuksella $\|f\|_{L^\infty}$ on normi, ja L^∞ varustettuna tällä normilla on täydellinen [H, Lause 1.45].

Käytämme myös merkintää $\|f\|_{L^p} = \|f\|_p$, kun $1 \le p \le \infty$.

A.1.2. Konvoluutio $\mathbb{R}^d$:ssä. Jos $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, funktioiden konvoluutio $h := f * g$ määritellään kaavalla

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\,g(y)\,dy. \tag{A.1.3}$$

Fubinin lauseen avulla voidaan osoittaa [H, Lause 2.17], että melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^d$ pätee $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy < \infty$; erityisesti kaavan (A.1.3) integraali on olemassa melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^d$.

Fubinin lause taas on todistettu Mitta-ja integraali -kurssilla, vrt I. Holopaisen luentomuistiinpanot tuolta kurssilta, s. 68. [http://www.helsinki.fi/~iholopai/MitInt02.pdf].

Muista konvoluution perusominaisuuksista mainittakoon tässä arvio

$$\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \tag{A.1.4}$$

Konvoluutio tekee mahdolliseksi L^p-funktioiden approksimoinnin C^∞-funktioilla: Olkoon

$$K \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d),$$

eli K äärettömästi derivoituva kompaktikantajainen funktio [Funktioiden $K \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ konstruointi : kts. [H], s. 30.]. Tällöin konvoluutiota $K * f$ on helppo derivoida ja saadaan ([H], Lause 2.26)

$$K * f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \qquad \text{kaikilla } f \in L^p(\mathbb{R}^d), \quad 1 \leq p \leq \infty. \tag{A.1.5}$$

Oletetaan, lisäksi että $K(x) \geq 0$ ja että $\int_{\mathbb{R}^d} K(x)dx = 1$, sekä merkitään $K_t(x) = \frac{1}{t^d} K(\frac{x}{t})$. Silloin ([H], Lause 2.34)

$$\|K_t * f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \to 0, \qquad \text{kaikilla } f \in L^p(\mathbb{R}^d),\ 1 \leq p < \infty. \tag{A.1.6}$$

Samaan aihepiiriin kuuluu [H, Lause 2.29]:

Lause A.1.1. *Jokaiselle $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p < \infty$, pätee*

$$\lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x+h) - f(x)|^p dx = 0. \tag{A.1.7}$$

Konvoluutiolla ja Fourier-muunnoksella on läheinen yhteys, jota selvitellään ja hyödynnetään kurssin jälkimmäisellä puoliskolla.

A.1.3. Absoluuttinen jatkuvuus. Funktio $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ on *absoluuttisesti jatkuva*, jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on $\delta > 0$, niin että

$$\sum_{j=1}^{k} |f(x_j) - f(y_j)| < \varepsilon$$

aina kun $(x_j, y_j) \subset [a, b], j = 1, \ldots k$, ovat sellaisia erillisiä välejä että $\sum_{j=1}^k |y_j - x_j| < \delta$. Kurssin kannalta keskeinen on seuraava abs. jatkuvuuden karakterisointi [H, Lause 3.78].

Lause A.1.2. *Jos $f : [a,b] \to \mathbb{C}$, seuraavat ehdot yhtäpitäviä.*

1. *f absoluuttisesti jatkuva.*
2. *Derivaatta $f'(x)$ olemassa m.k. $x \in [a,b]$, $\quad f' \in L^1(a,b) \quad$ ja*
$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt, \qquad x \in [a,b].$$
3. *On olemassa $g \in L^1(a,b)$ s.e.*
$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt, \qquad x \in [a,b].$$

Lauseen nojalla voimme käyttää vaikkapa osittaisintegrointia, kun f on absoluuttisesti jatkuva. Eli jos esimerkiksi $g \in C^1(a,b)$, pätee

$$\int_a^b g'(t)\,f(t)\,dt = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t)\,g(t)\,dt, \tag{A.1.8}$$

missä $f'(t)g(t) \in L^1(a,b)$ ja integraalit siis hyvin määriteltyjä.

A.1.4. Pisteittäinen konvergenssi. Tarvitsemme muutamia tuloksia pistettäisestä konvergenssista L^p-funktioiden konvoluutioapproksimaatioissa Seuraava tulos seuraa yleisistä L^p-periaatteista, mutta esitämme sen tämän kurssin tarvitsemassa muodossa.

Lause A.1.3. *Jos $\{K_t\}_{t>0}$ on hyvä perhe $\mathbb{R}^d$:n ytimiä (kuten Luvussa III, Määritelmä 3.5) ja $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p < \infty$. Silloin löytyy jono $\{t_j\}$ parametreja, jolle $t_j \to 0$ kun $j \to \infty$ ja*

$$(K_{t_j} * f)(x) \;\to\; f(x) \qquad \text{melkein kaikilla } x \in \mathbb{R}^d, \qquad \text{kun } j \to \infty.$$

Todistus. (Vrt. [H], Lauseen 1.43 todistus) Koska $\|K_t * f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \to 0$ kun $t \to 0$, voimme valita vähenevän jonon lukuja $t_j > 0$ niin että $\|K_t * f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \;\le\; 2^{-j}$ kun $0 < t < t_j, \quad j \;=\; 1, 2, \ldots$.

Silloin Minkowskin epäyhtälön mukaan $\|K_{t_{j+1}} * f - K_{t_j} * f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le 2^{-j}$, $j \;=\; 1, 2, \ldots$ ja samoin

$$\|\sum_{j=1}^{\infty} |K_{t_{j+1}} * f - K_{t_j} * f|\,\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \;\le\; \sum_{j=1}^{\infty} \|K_{t_{j+1}} * f - K_{t_j} * f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \;\le\; \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \;=\; 1.$$

Niinpä $\sum_{j=1}^{\infty} |K_{t_{j+1}} * f - K_{t_j} * f| < \infty$ melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^d$ joten

$$\lim_{n\to\infty} K_{t_n} * f \;=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n-1} \Big(K_{t_{j+1}} * f - K_{t_j} * f \Big) + K_{t_1} * f$$

suppenee m. k. $x \in \mathbb{R}^d$. Koska sarja suppenee myös L^p-normissa, näemme että raja-arvo $\lim_{n\to\infty} K_{t_n} * f \;=\; f(x)$ m.k. $x \in \mathbb{R}^d$. $\square$

Huomaa, että riittävän säännöllisille hyville perheille $\{K_t\}_{t>0}$ pätee kyllä

(A.1.9) $$(K_t * f)(x) \;\to\; f(x) \qquad \text{melkein kaikilla } x \in \mathbb{R}^d, \text{ kun } t \to 0,$$

aina kun $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ja $1 \le p \le \infty$. Tämän todistaminen vaatii kuitenkin lisätarkasteluja Reaalianalyysistä, ja erityisesti nk. Hardy-Littlewoodin maksimaalifunktion hyödyntämistä, kts. esimerkiksi [Garfakos, Corollary 2.1.17]. Toisaalta (A.1.9) **ei** toimi kaikille hyville perheille.

A.2. Banach avaruuksista ja lineaarisista operaattoreista

Banach avaruuksien teoriaa ja funktionaalianalyysiä yleensäkin voi käyttää Fourier analyysissä monella eri tavalla ja monessa eri tilanteessa. Kerrataan tähän kuitenkin vain muutama aivan perusasia.

Jos vektoriavaruudessa E on annettu normi $\|x\|$ ja jos E on k.o. normin antamassa metriikassa täydellinen, E:tä kutsutaan Banach avaruudeksi. Tällä kurssilla Banach avaruuksista tarvitaan lähinnä erilaisia L^p-avaruuksia sekä jatkuvien funktioiden muodostamia avaruuksia, kuten avaruus

$$C_0(\mathbb{R}^d) := \{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \;\; \text{jatkuva}, \quad \text{ja} \quad f(y) \to 0 \;\text{ kun }\; |y| \to \infty \}$$

varustettuna sup-normilla $\|f\|_\infty = \sup_{y\in\mathbb{R}^d} |f(y)|$.

Tarvitsemme myös muutaman peruskäsitteen lineaarisista operaattoreista $T : E \to F$, kun E, F Banach avaruuksia.

LAUSE A.2.1. *Jos E ja F normiavaruuksia ja $T : E \to F$ lineaarinen,*

$$T \ \textit{jatkuva} \ \Leftrightarrow \ \|T\| := \sup\{\|Tx\| \ : \ \|x\| \le 1\} < \infty \tag{A.2.1}$$

Todistus. " $\Rightarrow$ " Jos T jatkuva origossa, $\|Ty\| \le 1$ kun $\|y\| \le \delta$. Siis $\|x\| \le 1 \ \Rightarrow \|Tx\| = \frac{1}{\delta}\|T(\delta x)\| \le \frac{1}{\delta}$, josta saamme $\|T\| \le \frac{1}{\delta}$.

" $\Leftarrow$ " Jos $x \ne 0$, $\|Tx\| = \|T(\frac{x}{\|x\|})\| \, \|x\| \le \|T\| \, \|x\|$. Niinpä $\|Tx - Tx_0\| = \|T(x-x_0)\| \le \|T\| \, \|x - x_0\| \to 0$ kun $x \to x_0$ E:n normitopologiassa. $\square$

Ehdossa (A.2.1) määriteltyä suuretta kutsutaan lineaarisen operaattorin T *normiksi* (ja $\|T\|$ on tosiaan normi jatkuvien lineaarikuvausten avaruudessa).

MÄÄRITELMÄ A.2.2. *Olkoot E, F normiavaruuksia ja $T : E \to F$ lineaarinen bijektio. Sanomme, että T on* **isomorfismi** *jos on olemassa sellaiset vakiot $\alpha, \beta > 0$, että*

$$\alpha\|x\| \le \|Tx\| \le \beta\|x\| \quad \textit{kaikilla } x \in E. \tag{A.2.2}$$

Kuten Lauseesta A.2.1 nähdään, jokainen lineaarinen isomorfismi on homeomorfismi $E \to F$; myös käänteinen pätee. Koska isomorfismi säilyttää Cauchy jonot, täydellisyys säilyy lineaarisissa isomorfismeissa.

LAUSE A.2.3. *Olkoot E ja F normiavaruuksia sekä $T : E \to F$ lineaarinen isomorfismi. Silloin E on täydellinen jos ja vain jos F on täydellinen.*

A.3. LISÄTIETOJA DISTRIBUUTIOISTA.

A.3.1. Distribuution ja testifunktion konvoluutio. Luvussa XII.6 annettiin kätevä tapa määritellä kompaktikantajaisen L^1-funktion f ja distribuution $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ konvoluutio. Jos kompaktikantajaisten funktioiden sijaan tarkastellaan testifunktioita, eli jos

$f = \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, silloin konvoluutio voidaan määritellä myös toisella tavalla, joka muistuttaa enemmän konvoluution alkuperäistä määritelmää. Nimittäin funktion $h \in L^1(\mathbb{R}^d)$ konvoluutio $\phi * h$ testifunktion $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ kanssa voi tulkita muodossa

$$\phi * h(y) = \int_{\mathbb{R}^d} h(x)\phi(y-x)dx = \langle T_h, \phi(y-\cdot)\rangle, \tag{A.3.1}$$

eli siis tulkitsemme h:n operaation distribuutioksi, missä viimeisessä merkinnässä se operoi pisteen $\cdot$ ilmaisemaan muuttujaan.

Osoitamme seuraavaksi, että tämä vaihtoehtoinen lähestymistapa on järkevä vaikka $h = T_h$ korvattaisiin mielivaltaisella distribuutiolla T. Todetaan tätä varten aluksi, että selvästikin

$$y \mapsto \phi(y-\cdot) \quad \text{on jatkuva kuvaus} \quad \mathbb{R}^d \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Koska kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^d$ on

$$(1+|x-y|^2) \leq 2(1+|x|^2)(1+|y|^2),$$

pätee $p_N(\phi(y-\cdot)) \leq C_N(1+|y|^2)^N$ kaikilla $N \geq 1$. Toisaalta, jos $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, silloin

$$|\langle T, \phi(y-\cdot)\rangle| \leq C\, p_N(\phi(y-\cdot)), \qquad \text{joillakin } N \in \mathbb{N},\ C < \infty.$$

Siten funktio

$$y \mapsto \langle T, \phi(y-\cdot)\rangle \tag{A.3.2}$$

on jatkuva, kasvaa enintään polynomisesti ja näin määrittelee temperoidun distribuution. Kun muistetaan tulkinta (A.3.1), huomataan että yhtä lailla funktio (A.3.2) on tulkittavissa konvoluutioksi $\phi * T$!

Jäljelle jää siis näyttää että Määritelmän 12.16 lähestymistapa ja (A.3.2) antavat saman lopputuloksen.

Lause A.3.1. *Kun $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ja $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, olkoon $R \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ yhtälön $\widehat{R} = \widehat{\phi}\,\widehat{T}$ määräämä distribuutio. Silloin R on jatkuva funktio, joka saadaan kaavasta*

$$R(y) := \langle T, \phi(y-\cdot)\rangle, \qquad y \in \mathbb{R}^d.$$

Huomataan aluksi että ehto $\widehat{R} = \widehat{\phi}\widehat{T}$ määrää temperoidun distribuution, sillä distribuution kertominen testifunktiolla on hyvin määritelty operaatio.

Lauseen A.3.1 todistus vaatii muutaman aputuloksen. Ensimmäinen niistä osoittaa, että kompaktikantajaiset testifunktiot ovat tiheässä kaikkien Schwartzin funktioiden joukossa:

LEMMA A.3.2. *$C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ on tiheässä avaruudessa $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*

Todistus. Valitaan aluksi kompaktikantajainen testifunktio $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ jolle $\operatorname{supp}(\psi) \subset B(0,2)$ ja $\psi = 1$ pallossa $B(0,1)$. Olkoon $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ mielivaltainen. Helposti tarkistetaan (HT), että $\psi(x/k)g(x) \to g(x)$ avaruudessa $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ kun $k \to \infty$. $\square$

Toinen tarvittava aputulos on eräänlainen Fubinin lauseen vastine distribuutioille:

LEMMA A.3.3. *Olkoon $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ ja $h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{d+d'})$ kompaktikantajainen testifunktio $(d+d')$-ulotteisessa avaruudessa (jos $z \in \mathbb{R}^{d+d'}$ kirjoitetaan $z = (x,\xi)$, missä $x \in \mathbb{R}^d$ ja $\xi \in \mathbb{R}^{d'}$, vastaavasti $h(z) = h(x,\xi)$). Silloin*

$$\langle T, \int_{\mathbb{R}^{d'}} h(\cdot,\xi)d\xi\rangle \;=\; \int_{\mathbb{R}^{d'}} \langle T, h(\cdot,\xi)\rangle d\xi.$$

Todistus. Oletetaan notaation yksinkertaistamiseksi, että $d' = 1$, yleisen tapauksen todistus on täysin samanlainen. Lisäksi skaalaamalla ja translatoimalla voimme olettaa, että h:n kantaja $\operatorname{supp}(h) \subset [0,1]^{d+d'}$.

Merkitään

$$H(x) := \int_{\mathbb{R}^{d'}} h(x,\xi)d\xi = \int_{[0,1]^{d'}} h(x,\xi)d\xi$$

Tarkastellaan tämän integraalin diskreettejä approksimaatioita

$$H_K(x) := \frac{1}{K}\sum_{j=1}^{K} h(x, j/K) \qquad K = 1, 2, \ldots$$

Väliarvolauseen nojalla $|h(x,\xi) - h(x,j/K)| \le K^{-1}\sup_{\xi\in[(j-1)/K,j/K]} |\frac{d}{d\xi}h(x,\xi)|$ kun $\xi \in [(j-1)/K, j/K]$, joten

$$|H_K(x) - H(x)| \le K^{-1}\sup_{\xi\in[0,1]} |\frac{d}{d\xi}h(x,\xi)|,$$

ja derivoimalla H:n määritelmässä integraalin alla näemme vastaavasti mielivaltaiselle derivaatalle ∂^α muuttujan x suhteen

$$|\partial^\alpha H_K(x) - \partial^\alpha H(x)| \le K^{-1} \sup_{\xi\in[0,1]} |\frac{d}{d\xi}\partial^\alpha h(x,\xi)|.$$

Ottamalla tässä supremum yli pisteiden $x \in [0,1]^d$ ja indeksien $|\alpha| \le N$ ja huomioimalla, että h:n kantaja on joukossa $[0,1]^{d+1}$ saamme

$$p_N(H_K - H) \ \le\ K^{-1} C_N \sup_{|\alpha|\le N} \|\partial^\alpha \frac{d}{d\xi} h\|_{L^\infty([0,1]^{d+1})} \ \longrightarrow 0 \quad \text{kun} \quad K \to \infty.$$

Erityisesti siis $H_K \to H$ avaruudessa $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ja voimme laskea

$$\langle T, H\rangle = \lim_{K\to\infty}\langle T, H_K\rangle = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{K}\sum_{j=1}^{K} \langle T, h(\cdot, j/K)\rangle = \int_0^1 \langle T, h(\cdot,\xi)\rangle d\xi,$$

mikä onkin juuri todistettava väite. Päättelyn viimeinen askel käytti hyväkseen kuvauksen $\xi \mapsto \langle T, h(\cdot,\xi)\rangle$ jatkuvuutta, mikä seuraa siitä että kuvaus $[0,1] \ni \xi \mapsto h(\cdot,\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on selvästikin jatkuva (HT). $\square$

Lauseen A.3.1 Todistus. Oletetaan ensin, että $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Jos $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, tarkastellaan funktiota $R_0(y) := \langle T, \phi(y - \cdot)\rangle$; edellä kaavan (A.3.2) yhteydessä osoitimme, että $R_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \cap C(\mathbb{R}^d)$. Meidän tulee nyt näyttää, että sen Fourier muunnos $\widehat{R_0} = \widehat{\phi}\,\widehat{T}$.

Jos $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, silloin

$$\text{(A.3.3)} \qquad \langle R_0, \widehat{\psi}\,\rangle = \int_{R^d} \langle T\ ,\ \phi(y-\cdot)\rangle\, \widehat{\psi}(y) dy = \int_{R^d} \langle T\ ,\ \widehat{\psi}(y)\, \phi(y-\cdot)\,\rangle\, dy$$

Toisaalta Lauseen 9.17 avulla saadaan

$$\begin{aligned} \langle\, \widehat{\phi}\,\widehat{T}\,,\, \psi\,\rangle \ &=\ \langle\, \widehat{T}\,,\, \widehat{\phi}\,\psi\,\rangle = \langle\, T\,,\, \mathcal{F}(\widehat{\phi}\,\psi)\,\rangle = \langle\, T\,,\, (2\pi)^{-d} (\mathcal{F}^2\phi) * \widehat{\psi}\,\rangle \\ \text{(A.3.4)} \qquad &=\ \langle\, T\ ,\ \int_{R^d} \widehat{\psi}(y)\, \phi(y-\cdot) dy\,\rangle \end{aligned}$$

sillä $(\mathcal{F}^2\phi)\,(x) \ =\ (2\pi)^d\, \phi(-x)$, vrt Lause 9.14 (i).

Kun verrataan kaavoja (A.3.3), (A.3.4) ja hyödynnetään Lemmaa A.3.3, nähdään että $\langle R_0, \widehat{\psi} \rangle = \langle \widehat{\phi}\,\widehat{T}\,,\, \psi \rangle = \langle \widehat{R}, \psi \rangle = \langle R, \widehat{\psi} \rangle$ aina kun $\widehat{\psi} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Koska kompaktikantajaiset testifunktiot ovat tiheässä avaruudessa $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ Lemman A.3.2 mukaan ja $R_0,\ R : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ ovat jatkuvia, tuo identiteetti pätee kaikilla $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Olemme siis osoittaneet, että $\widehat{R_0} = \widehat{\phi}\,\widehat{T}$, kun $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Yleinen tapaus $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ seuraa tästä (TARKISTA), sillä $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ on tiheä Schwartzin avaruudessa $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Lause A.3.1 on näin todistettu. $\square$

Lauseen A.3.1 avulla osoitetaan mm. että reaalianalyysistä tuttu silotus toimii myös distribuutioille: konvolointi kompaktikantajaisella testifunktiolla antaa distribuutioillekin C^∞-approksimaation.

Lause A.3.4. *Olkoon $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ testifunktio, jolle $\int_{\mathbb{R}^d} \phi = 1$. Jokaiselle distribuutiolle $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ pätee*

$$\phi * T \in C^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Lisäksi, jos merkitään $\phi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-d}\phi(x/\varepsilon),\ \varepsilon > 0$, silloin $\phi_\varepsilon * T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ ja

$$\phi_\varepsilon * T \to T \quad \textit{avaruudessa } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \quad \textit{kun} \quad \varepsilon \to 0^+.$$

Todistus. Kuten edellä, olkoon $R(y) := \langle T, \phi(y - \cdot)\rangle = (\phi * T)(y),\ y \in \mathbb{R}^d$, jolloin $R \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \cap C(\mathbb{R}^d)$. Harjoituksissa osoitetaan, että $\frac{1}{\varepsilon}\big[\phi(x + \varepsilon e_j) - \phi(x)\big] \to \partial_j \phi(x)$ avaruuden $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ metriikan suhteen, kun $\varepsilon \to 0^+$. Siispä

$$\frac{1}{\varepsilon}\big[R(y + \varepsilon e_j) - R(y)\big] \to \langle\, T\,,\, \partial_j \phi(y - \cdot)\,\rangle.$$

Koska yhä $\partial_j \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, huomataan että R:llä on jatkuvat osittaisderivaatat, ja iteroimalla tätä päättelyä saadaan $R = \phi * T \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Konvergenssiväite puolestaan tulee todistetuksi esimerkiksi kun näytämme, että $\widehat{\phi_\varepsilon}\,\widehat{T} \to \widehat{T}$ avaruudessa $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, eli että jokaisella $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on $\langle\, \widehat{\phi_\varepsilon}\,\widehat{T}\,,\, g\,\rangle = \langle\, \widehat{T}\,,\, \widehat{\phi_\varepsilon}\, g\,\rangle \to \langle\, \widehat{T}\,,\, g\,\rangle$.

Mutta on helppo näyttää että $\widehat{\phi}_\varepsilon(\xi)g(\xi) = \widehat{\phi}(\varepsilon\xi)g(\xi) \to \widehat{\phi}(0)g(\xi) = g(\xi)$ avaruudessa $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ kun $\varepsilon \to 0^+$, käyttäen Leibnitzin sääntöä sekä arvioita

$$|\widehat{\phi}(\varepsilon\xi) - 1| \le \int_{\mathbb{R}^d} |\phi(x)||e^{-i\varepsilon\xi\cdot x} - 1|dx \le \varepsilon|\xi| \int_{\mathbb{R}^d} |x|\,|\phi(x)|\,dx \quad \text{ja} \quad \big|\partial^\alpha\big[\,\widehat{\phi}(\varepsilon\xi)\big]\big| \le \varepsilon^{|\alpha|} \|\,\partial^\alpha\widehat{\phi}\,\|_\infty.$$

Lause A.3.4 on näin tullut todistetuksi. $\square$

Yhteenvetona, $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ on tiheä $\mathcal{S}'$:ssa !

Tämän osion päätteeksi palaamme Hilbert-muunnokseen reaaliakselilla,

$$Hg(z) \;:=\; p.v.\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)}{z - x}$$

jonka jo määrittelimme osiossa XII.5. Määrittelemme tätä varten merkinvaihtofunkion $\mathrm{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ asettamalla $\mathrm{sgn}\,(x) = 1$ kun $x > 0$, $\mathrm{sgn}\,(0) = 0$ ja $\mathrm{sgn}\,(x) = -1$ kun $x < 0$.

Lause A.3.5. *Hilbert-muunnokselle H pätee: (i) Jos $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, niin*

$$\mathcal{F}(H\phi) = -i\,\mathrm{sgn}(\xi)\phi(\xi).$$

(ii) Hilbert-muunnos laajenee bijektiiviseksi isometriaksi $H : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$.

Todistus. Olkoon $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Silloin Hilbert muunnoksen määritelmä, kts. (12.26), yhdistettynä lauseeseen A.3.1 näyttää, että

$$H\phi = \frac{1}{\pi}\big(p.v.\frac{1}{x}\big) * \phi.$$

Väite (i) seuraa ottamalla Fourier-muunnos puolittain ja muistamalla, että kaavan (12.28) mukaan $\mathcal{F}(p.v.\frac{1}{x}) = -i\pi\,\mathrm{sgn}$; erityisesti siis $\mathcal{F}(H\phi) = -i\,\mathrm{sgn}\,(\xi)\widehat{\phi}(\xi)$ kun $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

Koska Fourier-muunnos on isometria avaruudessa $L^2(\mathbb{R})$ (vakiota 2π vaille), voimme laskea suoraan kun $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |H\phi(x)|^2 dx \;&=\; \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(H\phi)(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |-i\,\mathrm{sgn}(\xi)\widehat{\phi}(\xi)|^2 d\xi \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\widehat{\phi}(\xi)|^2 d\xi \\ &=\; \int_{\mathbb{R}} |\phi(x)|^2 dx.\end{aligned}$$

Täten H on isometria määrittelyjoukossaan $C_c^\infty(\mathbb{R})$, joka on $L^2(\mathbb{R})$:n tiheä aliavaruus, ja siispä se laajenee isometriaksi koko avaruuteen $L^2(\mathbb{R})$, vrt. Lause 11.1. Vihdoin bijektiivisyys seuraa, kun havaitsemme (i)-kohdan avulla, että $H^2\phi = -\phi$. $\square$

A.3.2. Kompaktikantajaisen distribuution Fourier muunnos. Kompaktikantajaisilla distribuutioilla ja niiden Fourier muunnoksilla on erinomaisia lisäominaisuuksia, joista on paljon hyötyä esim. differentiaaliyhtälöitä ratkottaessa. Mm. kompaktikantajaisen distribuution ja yleisen distribuution konvoluutio on mahdollista määritellä.

Jos $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ ja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ on avoin, sanomme että rajoittuma $T\big|_\Omega = 0$, mikäli

$$< T, g > = 0 \qquad \text{aina kun } \; g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \quad \text{ja} \quad \mathrm{supp}(g) := \overline{\{x : g(x) \neq 0\}} \subset \Omega.$$

Distribuution T **kantaja**, merkitään $\mathrm{supp}(T)$, on suljettu joukko joka määräytyy ehdosta

$$\mathbb{R}^d \setminus \mathrm{supp}(T) := \bigcup \{\Omega \subset \mathbb{R}^d \text{ avoin } : T\big|_\Omega = 0\}. \tag{A.3.5}$$

On helppo nähdä, että T häviää kahden avoimen joukon yhdisteessä, jos se häviää kummassakin joukossa erikseen (HT), ja tämän nojalla nähdään että kantaja on hyvin määritelty. Lisäksi se on epätyhjä jos $T \not\equiv 0$ (HT).

MÄÄRITELMÄ A.3.6. $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) := \{T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) :$ *T:n kantaja on kompakti* $\}$.

Ensimmäinen esimerkki kompaktikantajaisesta distribuutiosta on tietysti δ_0. Yleisemmin, $\delta_a \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ jokaisella $a \in \mathbb{R}^d$.

Jos $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, silloin T voidaan laajentaa lineaariseksi kuvaukseksi $T : C^\infty(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ seuraavasti: Valitaan ensin pallo $B(0, M) \subset \mathbb{R}^d$, joka sisältää distribuution T kantajan, siis

$$< T, g > = 0$$

aina kun $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on sellainen että $\operatorname{supp}(g) \subset \mathbb{R}^d \setminus B(0, M)$. Seuraavaksi valitaan funktio $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, jolle

$$\text{(A.3.6)} \qquad \psi(x) \equiv 1, \quad \text{kun } |x| \leq 2M, \qquad \psi(x) \equiv 0, \quad \text{kun } |x| \geq 3M.$$

Lopuksi asetetaan

$$\text{(A.3.7)} \qquad < T, h > := < T, \psi h >, \qquad h \in C^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Suureen $< T, h >$ määritelmä ei riipu ψ:n valinnasta: jos ψ_1 on toinen vastaava funktio jolle $\psi_1(x) \equiv 1$ jossakin distribuution T kantajan ympäristössä, silloin $h\psi - h\psi_1 = 0$ T:n kantajassa ja $< T, h\psi - h\psi_1 > = 0$.

Edelleen, näin asetettu lineaarikuvaus $T : C^\infty(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ toteuttaa arvion

$$\text{(A.3.8)} \qquad | < T, h > | \leq C \sup_{x \in K} \sup_{|\alpha| \leq N} |\partial^\alpha h(x)|, \qquad h \in C^\infty(\mathbb{R}^d),$$

jollekin kompaktille joukolle $K \subset \mathbb{R}^d$ ja joillekin $C < \infty$, $N \in \mathbb{N}$. Nimittäin, jos $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ toteuttaa ehdot (A.3.6), niin

$$\begin{aligned} | < T, h > | \;\leq\; C\, p_N(\psi h) \;&=\; \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \sup_{|\alpha| \leq N} (1 + |y|^2)^N |\partial^\alpha (\psi h)(y)| \\ &\leq\; C_1 \sup_{y \in B(0,3M)} \sup_{|\alpha| \leq N} (1 + |y|^2)^N |\partial^\alpha h(y)| \end{aligned}$$

sopivilla $N \in \mathbb{N}$ ja $C < \infty$. Tässä viimeinen arvio käyttää Leibnitzin tulon derivoimissääntöä ja tietoa että $\psi(y) = 0$ pallon $B(0, 3M)$ ulkopuolella.

Kääntäen, jos lineaarinen $T : C^\infty(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ toteuttaa epäyhtälöt (A.3.8) joillakin $C < \infty$, $N \in \mathbb{N}$ ja kompaktilla $K \subset \mathbb{R}^d$, silloin $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ (MIKSI ?).

Ylläolevan tarkastelun mukaan kompaktikantajaisilla distribuutioilla voi operoida suoraan esim. eksponenttifunktioihin $e_\xi(x) := e^{i\xi \cdot x}$. Voisiko silloin Fourier muunnostakin lähestyä tällä tavalla kun $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$?

Lause A.3.7. *Olkoon $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Silloin Fourier muunnos $\widehat{T} \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, ja se voidaan (yhtäpitävästi) määritellä kaavalla*

$$\widehat{T}(\xi) \; = < T, \, e_{-\xi} \; >, \qquad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Lisäksi, $\widehat{T}(\xi)$ ja sen kaikki derivaatat kasvavat korkeintaan polynomisesti, kun $\xi \in \mathbb{R}^d$ ja $|\xi| \to \infty$.

Todistus. Olkoon $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ kompaktikantajainen funktio, jolle $\psi \equiv 1$ distribuution T kantajassa, ja valitaan $M < \infty$ niin että $\psi(x) = 0$ pallon $B(0, M)$ ulkopuolella.

Ehdon $\widehat{T} \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ todistamiseksi on oikeastaan kaksikin eri tapaa. Ensimmäisessä osoitetaan suoraan että

$$\frac{e^{-i(\xi + h e_j)\cdot x} - e^{-i\xi \cdot x}}{h} \, \psi(x) \to -i x_j \, e^{-i\xi\cdot x} \, \psi(x) \qquad \text{avaruuden } \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \text{ topologiasssa}$$

ja siten $\frac{1}{h}\big(< T, \, e_{-(\xi + h e_j)} > - < T, \, e_{-\xi} >\big) \to < T, \, -i \, x_j \, e_{-\xi} \; >$ kun $h \to 0$. Vastaavalla tavalla saadaan muutkin osittaisderivaatat ja $\partial_\xi^\alpha < T, \, e_{-\xi} \; > = < T, (-i \, x)^\alpha \, e_{-\xi} \; >$ jokaisella $\alpha \in \mathbb{N}^d$.

Toinen tapa osoittaa, että itse asiassa $\widehat{T}(\xi)$ on (muuttujan $\xi \in \mathbb{C}^d$) analyyttinen funktio, ja tästä sileyskin heti seuraa. Nimittäin, sarja $e_{-\xi}(x) = \sum_n \frac{(-i)^n}{n!} (\xi \cdot x)^n$ suppenee derivaattoineen tasaisesti, kun $|x| \le M$ ja $\xi \in \mathbb{C}^d$. Siksi, vrt. (A.3.7),

$$< T, \, e_{-\xi} \; > \equiv < T, \, \psi \, e_{-\xi} \; > = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-i)^n}{n!} < T, \, (\xi \cdot x)^n \, \psi \; >,$$

ja suppenevana potenssisarjana se on analyyttinen kaikilla $\xi \in \mathbb{C}^d$.

Koska $\partial_\xi^\alpha \widehat{T}(\xi) \; = < T, (-i \, x)^\alpha \, e_{-\xi} \; >$, ehto (A.3.8) näyttää myös, että

$$\text{(A.3.9)} \qquad |\partial_\xi^\alpha \widehat{T}(\xi)| \; \le \; C \, M^{|\alpha|} (1 + |\xi|)^N \, e^{M |\operatorname{Im} \xi|}, \qquad \xi \in \mathbb{C}^d,$$

missä $|\operatorname{Im} \xi| = (|\operatorname{Im} \xi_1| + \cdots + |\operatorname{Im} \xi_d|)^{1/2}$, $\xi \in \mathbb{C}^d$. Erityisesti, kun $\xi \in \mathbb{R}^d$, kaikki $\widehat{T}(\xi)$:n derivaatat kasvavat korkeintaan polynomisesti.

Jää siis jäljelle osoittaa, että "uusi" $\widehat{T}(\xi) =$ "vanha" $\widehat{T}(\xi)$, eli että

$$\text{(A.3.10)} \qquad \int_{\mathbb{R}^d} < T,\, e_{-\xi} > g(\xi)\, d\xi \; = < T,\, \widehat{g} >, \qquad g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Tätä varten, Lemman A.3.2 nojalla voimme ensiksi olettaa, että g on kompaktikantajainen. Oletetaan että distribuution T kantaja sisältyy palloon $B(0, R) \subset \mathbb{R}^d$. Valitaan $\psi \in C_0(\mathbb{R}^d)$, jolle pätee $\psi = 1$ pallossa $B(0, 2R)$. Todistettava väite voidaan kirjoittaa muotoon

$$\int_{\mathbb{R}^d} < \psi T,\, e_{-\xi} > g(\xi)\, d\xi \; = < \psi T,\, \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} g(\xi) >,$$

missä T operoi muuttujaan x. Yhtäpitävästi

$$\int_{\mathbb{R}^d} < T,\, g(\xi)\psi(x)e^{-i\xi\cdot x} > d\xi \; = < T,\, \int_{\mathbb{R}^d} g(\xi)\psi(x)e^{-i\xi\cdot x} d\xi >,$$

Väite seuraa nyt soveltamalla lemmaa A.3.3 distribuutioon T ja kompaktikantajaiseen testifunktioon $(x, \xi) \mapsto g(\xi)\psi(x)e^{-i\xi\cdot x}$ tapauksessa $d = d'$. Lause A.3.7 on näin kokonaisuudessaan tullut todistetuksi. $\square$

HUOM: Fourier muunnoksen analyyttisyys ja ehto (A.3.9) karakterisoivat kompaktikantajaiset distribuutiot: Kuuluisan Paley-Wienerin lauseen eräs versio kertoo, kts. [Rudin, Functional Analysis], että jos $f(\xi)$ on analyyttinen koko avaruudessa $\mathbb{C}^d$ ja jos joillekin N, C on $|f(\xi)| \le C(1+|\xi|)^N e^{M|\mathrm{Im}\,\xi|}$, $\xi \in \mathbb{C}^d$, silloin löytyy $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ jonka kantaja kuuluu palloon $B(0, M)$ ja jolle pätee

$$< T,\, e_{-\xi} > = \; f(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{C}^d.$$

Lopuksi, muistetaan että osaluvussa XII.6 onnistuimme määrittelemään kompaktikantajaisen funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ja distribuution $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ konvoluution. Nyt huomaamme, että kahden distribuution konvoluutio onnistuu, jos niistä toisella on kompakti kantaja (mutta kahden yleisen distribuution konvoluutiota ei pysty ottamaan).

Määritelmä A.3.8. *Jos $R \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ ja $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, konvoluutio $R * T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ määritellään kaavalla $(R * T)^\wedge := \widehat{T}\,\widehat{R} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.*

Yllä $\widehat{T}$ derivaattoineen kasvaa korkeintaan polynomisesti, ja siksi tulo $\widehat{T}\widehat{R} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, vrt. (12.10). Niinpä myös $R * T$ on hyvin määritelty $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$:n alkio.

Esimerkkinä, $R * \delta_0 = R$ jokaisella $R \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ (MIKSI ?) ja $\delta_0 * T = T$ jokaisella $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$.