Tilastollisen päättelyn jatkokurssi
5. harjoitus (1. 12. 2014)

1. Tarkastellaan muistiinpanojen sivuilla 21–22 esitettyä lineaarista mallia $Y_i = Z_i'\beta + \varepsilon_i$, $i = 1, \dots, n$, ja sen su-estimaattoreita $\hat{\beta} = \hat{\beta}_n$ sekä $\hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}_n^2$ yhtälössä (2.18). Oletetaan, että satunnaisvektorit Z_i ja virheet ε_i toteuttavat sivulla 28 mainitut ehdot: $\frac{1}{n}\sum_i Z_i Z_i' \xrightarrow{p} Q$ (jossa Q on kiinteä ja positiivisesti definiitti) ja $\frac{1}{n}\sum_i Z_i\varepsilon_i \xrightarrow{p} 0$, kun $n \to \infty$. Sivulla 28 on todettu, että tällöin $\hat{\beta}$ on tarkentuva. Osoita, että myös $\hat{\sigma}^2$ on tarkentuva eli $\hat{\sigma}^2 \xrightarrow{p} \sigma^2$.

2. Satunnaismuuttujan (tai -vektorin) Y ptf/tf $f(y;\theta)$ riippuu parametrista $\theta \in \Theta$ ja mitkään kaksi eri θ:n arvoa eivät vastaa samaa jakaumaa. Olkoon $l(\theta; y) = \log f(y;\theta)$, ja oletetaan, että odotusarvo $l^*(\theta) = \mathsf{E}_{\theta_0}[l(\theta;Y)]$ on olemassa kaikilla $\theta \in \Theta$, kun θ_0 on todellinen parametriarvo. Todista, että $l^*(\theta)$ saa suurimman arvonsa täsmälleen pisteessä $\theta = \theta_0$.

3. Oletetaan, että havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat $Y_1, \dots, Y_n$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita (iid-tapaus). Todista, että jos muistiinpanojen sivun 30 alussa mainitut ehdot ovat voimassa, niin lauseen 3.1 oletukset (i) ja (ii) toteutuvat ja siten mallin parametrin su-estimaattori on tarkentuva. Pidetään tunnettuna alla esitetty SLL:n tasainen versio sekä edellisen tehtävän tulos.

   Tasainen SLL. Olkoot $X_1, X_2, \dots$ riippumattomia ja samoin jakautuneita, ja olkoon $h(x,\theta)$ funktio, joka on jatkuva θ:n suhteen kompaktissa joukossa Θ jokaisella x. Oletetaan, että on olemassa funktio $k(x)$ siten, että $|h(x,\theta)| \le k(x)$ kaikilla x ja $\theta \in \Theta$ sekä $\mathsf{E}[k(X_1)] < \infty$. Tällöin
   $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(X_i,\theta) \xrightarrow{p} \mu(\theta) \quad \text{tasaisesti } \Theta\text{:ssa},$$
   kun $\mu(\theta) = \mathsf{E}[h(X_1,\theta)]$. Lisäksi funktio μ on jatkuva Θ:ssa.

4. Tarkastellaan mallia $Y_1, \dots, Y_n \sim \mathrm{Tas}(0,\theta) \perp\!\!\!\perp$, jossa $\theta > 0$. Palauta mieleen, että θ:n su-estimaattori on $\hat{\theta}_n = Y_{(n)} = \max(Y_1, \dots, Y_n)$. Osoita, että
   $$n(\theta - \hat{\theta}_n) \xrightarrow{d} \mathrm{Exp}(1/\theta),$$
   eli symbolisesti
   $$\hat{\theta}_n \underset{as}{\sim} \theta - \tfrac{1}{n}\mathrm{Exp}(1/\theta),$$
   jossa $\mathrm{Exp}(1/\theta)$ viittaa eksponenttijakaumaan, odotusarvona θ.

   Opetus. Kyseessä on klassinen esimerkki epäsäännöllisestä mallista (miksi?). Tavanomainen asymptotiikka (esim. lauseen 3.2 tulos) ei siinä toteudu. Huomionarvoista on sekin, että $\hat{\theta}_n$:n varianssi lähestyy nollaa samaa vauhtia kuin $1/n^2$, kun $n \to \infty$. Säännöllisissä iid-malleissa vauhti on vain $1/n$. Estimaattori $\hat{\theta}_n$ on siis "ylitehokas".

Huom: Harjoitukset ovat salissa CK111 (K-kerros) ja alkavat tasan 10.00.

Vihjeitä kääntöpuolella!

Vihjeitä:

1. Aloita kirjoittamalla $\hat{\sigma}^2$:n lausekkeessa $Y_i - Z_i'\hat{\beta} = (Y_i - Z_i'\beta) - Z_i'(\hat{\beta} - \beta) = \varepsilon_i - Z_i'(\hat{\beta} - \beta)$ ja korottamalla neliöön. Tarvitset oletusten lisäksi suurten lukujen lakia ja lausetta 1.1.

2. Todennäköisyyslaskennan Jensenin epäyhtälö sanoo, että jos g on aidosti ylöspäin kupera (eli aidosti konkaavi) funktio ja X on satunnaismuuttuja, niin $\mathsf{E}[g(X)] \leq g(\mathsf{E}(X))$ ja yhtäsuuruus pätee vain jos X on vakio (tn:llä 1). Sovella tätä logaritmifunktioon ja muuttujaan $X = f(Y;\theta)/f(Y;\theta_0)$. Voit olettaa, että kyseessä on jatkuva tapaus eli tf.

3. Muista, että $l_n(\theta; \boldsymbol{y}_n) = \sum_{i=1}^{n} l_1(\theta; y_i)$, jossa l_1 on yhden havainnon log-uskottavuus.

4. Käytä jakaumasuppenemisen määritelmää. Totea aluksi, että jos F on $\mathrm{Tas}(0, \theta)$-jakauman kertymäfunktio, niin F^n on $\hat{\theta}_n$:n kertymäfunktio. Muista, että $\lim_{n\to\infty}(1 + x/n)^n = e^x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. (Asiaan liittyviä tarkasteluja on tehty myös aineopintojen päättelyn kurssin monisteen harjoitustehtävässä 3.10.)