Tilastollisen päättelyn jatkokurssi
3. harjoitus (17. 11. 2014)

1. Olkoon $X_1, X_2, \ldots$ k-ulotteisista satunnaisvektoreista koostuva MD-jono jonkin informaation $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots$ suhteen ja $M_n = X_1 + \cdots + X_n$ kaikilla $n \geq 1$. Osoita muistiinpanojen sivulla 12 mainittu tulos, jonka mukaan kovarianssimatriiseille pätee

$$\mathsf{Cov}(M_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{Cov}(X_i).$$

   Voit olettaa, että $\mathsf{E}(X_1) = 0$.

2. Tarkastellaan muistiinpanojen sivuilla 13–14 ja 18 käsiteltyä autoregressiivistä mallia. Johda tarkasti perustellen tämän mallin yhteistiheysfunktion lauseke

$$f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y};\theta) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \phi y_{i-1})^2\right\}$$

   jossa $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ ja parametri on $\theta = (\phi, \sigma^2)$.

3. Jatkoa edelliseen tehtävään. Muodosta log-uskottavuusfunktio, pistemääräfunktio ja havaittu informaatiomatriisi. Tutki, ovatko parametrin komponentit ϕ ja σ^2 ortogonaaliset.

   Palauta tässä esiintyvät käsitteet mieleen aineopintojen päättelyn kurssilta tai katso monisteen sivuja 22 ja 24.

4. Tarkastellaan muistiinpanojen sivujen 14–16 mallin yleistystä

$$Y_j = Z_j\beta_j + \varepsilon_j, \qquad j = 1, \ldots, N,$$

   jossa Z_j on kiinteä (selittävistä muuttujista koostuva) $n_j \times p$ -matriisi ja $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N \perp\!\!\!\perp$ sekä $\varepsilon_j \sim \mathsf{N}_{n_j}(0, \sigma^2 I_{n_j})$. Oletetaan, että tässä kerroinvektorit β_j $(p \times 1)$ ovat satunnaisia ja toteuttavat

$$\beta_j \sim \mathsf{N}_p(\beta, \Omega), \qquad \beta_1, \ldots, \beta_N \perp\!\!\!\perp, \qquad (\beta_1, \ldots, \beta_N) \perp\!\!\!\perp (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N).$$

   Johda tilastollisen mallin lauseke eli koko satunnaisvektorin $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_N)$ yhteistiheysfunktio.

Huom: Harjoitukset ovat salissa CK111 (K-kerros) ja alkavat tasan 10.00.

Vihjeitä kääntöpuolella!

Vihjeitä:

1. Muista, että k-ulotteisen satunaisvektorin X kovarianssimatriisi on $k \times k$ -matriisi

$$\mathsf{Cov}(X) = \mathsf{E}\big[(X - \mathsf{E}(X))(X - \mathsf{E}(X))'\big].$$

2. Merkitään $\boldsymbol{Y}_n = (Y_1, \ldots, Y_n)$. Etene induktiolla n:n suhteen. Jos $f_{\boldsymbol{Y}_{n-1}}$ on jo löydetty, esitä $\boldsymbol{Y}_n = (\boldsymbol{Y}_{n-1}, Y_n)$ lineaarisena muunnoksena sv:sta $(\boldsymbol{Y}_{n-1}, \varepsilon_n)$, jossa $\boldsymbol{Y}_{n-1} \perp\!\!\!\perp \varepsilon_n$ (tämän muunnoksen Jacobin determinantti on 1). Palauta mieleen todennäköisyyslaskennasta ytf:n muunnoskaava.

4. Selvitä aluksi sv:n $Z_j\beta_j$ jakauma ja sitten Y_j:n jakauma.