Tilastollisen päättelyn jatkokurssi
2. harjoitus (10. 11. 2014)

1. Jatkoa harjoituksen 1 tehtävään 5 (delta-menetelmän todistus). Päättele "standardoidun" satunnaismuuttujan
$$\frac{\sqrt{n}(h(\hat{\theta}_n) - h(\theta_0))}{h'(\hat{\theta}_n)\sigma(\hat{\theta}_n)}$$
asymptoottinen jakauma, kun oletetaan, että funktio $\theta \mapsto \sigma(\theta)$ on jatkuva θ_0:ssa.

   Tämä tehtävä osoittaa, että delta-menetelmän alun perin tuottaman asymptoottisen jakauman varianssi (joka riippui tuntemattomasta parametriarvosta θ_0) voidaan estimoida.

2. Oletetaan, että mallin parametrivektorille θ (d-ulotteinen) on käytettävissä asymptoottisesti normaalinen estimaattori $\hat{\theta}_n$, jolle
$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} \mathsf{N}_d(0, \Sigma(\theta_0)),$$
jossa $\Sigma(\theta_0)$ on positiivisesti definiitti (erityisesti kääntyvä) ja θ_0 on parametrin "todellinen" arvo. Osoita yksityiskohtaisesti, että jos funktio $\theta \mapsto \Sigma(\theta)$ on jatkuva pisteessä θ_0, niin
$$n(\hat{\theta}_n - \theta_0)'\Sigma(\hat{\theta}_n)^{-1}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} \chi^2_d.$$
Miten tämän avulla voisi johtaa approksimatiivisen testin nollahypoteesille $\theta = 0$?

3. Havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat $Y_1, \ldots, Y_n$ ovat riippumattomia ja noudattavat kukin eksponenttijakaumaa $\mathrm{Exp}(1/\mu)$, jonka odotusarvo $\mu > 0$ on tuntematon parametri. Tunnetusti μ:n su-estimaattori on $\hat{\mu}_n = \overline{Y}_n = (Y_1 + \cdots + Y_n)/n$.

   a) Mihin muuttuja $\sqrt{n}(\hat{\mu}_n - \mu)$ suppenee jakaumaltaan? Miten ilmaiset tämän käyttäen merkintää $\hat{\mu}_n \underset{as}{\sim}$?

   b) Mihin muuttuja $\sqrt{n}[\log \hat{\mu}_n - \log \mu]$ suppenee jakaumaltaan? Miten ilmaiset tämän käyttäen merkintää $\log \hat{\mu}_n \underset{as}{\sim}$?

4. Näytä, että luentomuistiinpanojen esimerkin 1.1 (sivulla 12) kohtien (ii) ja (iii) jonot ovat todella MD-jonoja. Perustele huolellisesti ehdollisen odotusarvon ominaisuuksien EO1–4 avulla. Huom: jonoja $\{X_i\}$ ja $\{Z_i\}$ koskeva riippumattomuusoletus on ymmärrettävä siten, että kumpikin jonoista koostuu riippumattomista satunnaismuuttujista ja lisäksi jonot ovat riippumattomat toisistaan.

5. Olkoon $X_1, \ldots, X_n$ riippumaton otos jakaumasta, jolla on äärellinen neljäs momentti. Merkitään $\mu = \mathsf{E}(X_1)$, $\sigma^2 = \mathsf{Var}(X_1)$ ja $\mu_4 = \mathsf{E}[(X_1 - \mu)^4]$ (neljäs keskusmomentti) sekä
$$\tilde{S}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2, \quad \hat{S}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2, \quad S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2,$$
jossa $\overline{X}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

   a) Osoita, että $\tilde{S}_n^2 \xrightarrow{p} \sigma^2$ ja $\sqrt{n}(\tilde{S}_n^2 - \sigma^2) \xrightarrow{d} \mathsf{N}(0, \nu)$, jossa $\nu = \mathsf{Var}[(X_1 - \mu)^2] = \mu_4 - \sigma^4$.

   b) Osoita, että $\sqrt{n}(\tilde{S}_n^2 - \hat{S}_n^2) \xrightarrow{p} 0$, ja päättele, että a-kohdan tulokset pätevät myös $\hat{S}_n^2$:lle.

   c) Totea, että a-kohdan tulokset pätevät niin ikään S_n^2:lle.

Huom: Harjoitukset ovat jatkossa salissa CK111 (K-kerros). Ne alkavat tasan 10.00.

Vihjeitä kääntöpuolella!

Vihjeitä:

1. Lause 1.1 ja seuraus 1.1.

2. Lause 1.1 ja seuraus 1.2. Tarvinnet myös harjoituksen 1 tehtävän 4 tulosta. Lineaaristen mallien kurssilla on osoitettu, että $Z'\Sigma^{-1}Z \sim \chi^2_k$, jos $Z \sim \mathsf{N}_k(0, \Sigma)$.

3. Keskeinen raja-arvolause ja delta-menetelmä.

5. a) Keskeinen raja-arvolause ja harj. 1, teht. 4 (tai SLL). b) Identiteetti $\sum_i (X_i - \mu)^2 = \sum_i (X_i - \overline{X}_n)^2 + n(\overline{X}_n - \mu)^2$, joka on mainittu myös aineopintojen päättelyn kurssilla. Muista stokastisen suppenemisen ja jakaumasuppenemisen väliset implikaatiot.