Stationaariset aikasarjat sl 2014, HT 8, viikko 47

1. Tarkastellaan ARCH(1)-mallia $y_t = h_t^{1/2}\varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim \mathsf{iid}(0,1)$, $h_t = \omega + \alpha y_{t-1}^2$, $\omega > 0$, $0 \leq \alpha < 1$. Kuten monisteessa on todettu, pätee tällöin $\mathsf{E}_{t-1}(y_t) = 0$ ja $\mathsf{Var}_{t-1}(y_t) = \mathsf{E}_{t-1}(y_t^2) = h_t$. Oletetaan nyt, että prosessista y_t havaitaan vain joka toinen arvo ja määritellään edellä mainitut ehdolliset momentit ehdollistaen muuttujien $y_{t-2}, y_{t-4}, ...$ eikä muuttujien $y_{t-1}, y_{t-2}, ...$ suhteen. Osoita, että (i) $\mathsf{E}(y_t | y_{t-2}, y_{t-4}, ...) = 0$ ja (ii) $\mathsf{Var}(y_t | y_{t-2}, y_{t-4}, ...) = \omega(1+\alpha) + \alpha^2 y_{t-2}^2$.

Vihje: Kohdassa (i) voit käyttää monisteen s. 34 esitetyn iteroidun odotusarvon lain (EO3) yleistystä, jonka mukaan $\mathsf{E}(Y | X_2) = \mathsf{E}[\mathsf{E}(Y | X_1) | X_2]$, kun (mahdollisesti ääretönulotteisen) vektorin X_2 komponentit muodostavat X_1:n komponenttien osajoukon (tai yleisemmin X_2 on X_1:n funktio). Kohdan (ii) voi ratkaista muokkaamalla ensin yhtälöä $y_t = h_t^{1/2}\varepsilon_t$ niin, että y_t:n riippuvuus y_{t-2}:sta tulee eksplisiittiseksi ja laskemalla tämän jälkeen ehdollinen varianssi.

Huom.: Tulos yleistyy siten, että jos prosessista y_t havaitaan joka m. arvo, niin $\mathsf{Var}(y_t | y_{t-m}, y_{t-2m}, ...) = \omega(1-\alpha^m)/(1-\alpha) + \alpha^m y_{t-m}^2$, joten ehdollinen heteroskedastisuus heikkenee, kun havainnointitiheys harvenee.

2. Jatkoa edelliselle. (i) Oletetaan, että y_t:stä havaitaan vain joka toinen arvo. Osoita, että $\mathsf{Var}(y_t) = \mathsf{E}(y_t^2) = \omega/(1-\alpha)$ eli y_t:n ehdoton varianssi on sama kuin tilanteessa, jossa kaikki y_t:n arvot havaitaan. (ii) Oletetaan nyt, että $\varepsilon_t \sim \mathsf{nid}(0,1)$ ja että $\alpha = 0.5$. Laske monisteen s. 60 esitettyä ARCH(1)-malliin liittyvää huipukkuuden kaavaa käyttäen y_t:n huipukkuus, kun y_t:stä havaitaan (a) jokainen arvo ja (b) vain joka toinen arvo.

Vihje: Kohdassa (b) voit käyttää tehtävän tulosta, jonka mukaan y_t on tässäkin tapauksessa ARCH(1)-prosessi, mutta ”muunnetuilla parametriarvoilla”.

3. Oletetaan, että ARCH(s)-mallissa (ks. monisteen jakso 5.3) pätee $\mathsf{E}(y_t^4) < \infty$ ja merkitään $\rho_{y^2}(k) = \mathsf{Cor}(y_t^2, y_{t-k}^2)$. Osoita, että

$$\rho_{y^2}(k) = \alpha_1\rho_{y^2}(k-1) + \cdots + \alpha_q\rho_{y^2}(k-s), \ k > 0.$$

Tapauksessa $s = 1$ tuloksesta seuraa monisteen s. 60 mainittu tulos $\rho_{y^2}(k) = \alpha_1^k$ (vrt. vastaava AR(1)-prosessia koskeva tulos monisteen s. 14).

Vihje: Monisteen yhtälö (5.6), jota kannattaa muokata ensin niin, että y_{t-i}^2:n ($i = 0, ..., s$) paikalle tulee $y_{t-i}^2 - \sigma_y^2$ ja ω:n paikalle tulee ... (vrt. AR(p)-prosessin autokorrelaatiofunktion johto).

4. Oletetaan, että GARCH(1,1)-mallissa (ks. monisteen jakso 5.4) pätee $\alpha + \beta < 1$ ja $\mathsf{E}(y_t^4) < \infty$. Osoita, että edellisen tehtävän merkinnöin $\rho_{y^2}(k) = (\alpha+\beta)^{k-1}\rho_{y^2}(1)$, $k = 2, 3, ...$ Tulos osoittaa, että $\rho_{y^2}(k) \to 0$ geometrisesti, kun $k \to \infty$.

Vihje: Monisteen yhtälö (5.8), jota kannattaa edellisen tehtävän tapaan muokata ensin ”sopivasti”.