Stationaariset aikasarjat sl 2014, HT 3, viikko 39

1. Tarkastellaan AR(1)-prosessista $y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t, \;\; \varepsilon_t \sim \mathsf{iid}\left(0, \sigma^2\right), \; |\phi| < 1$, saatua aikasarjaa $y_1, ..., y_T$. Millaiseksi monisteen s. 21 esitetty otoskeskiarvon $\bar{y} = T^{-1} \sum_{t=1}^{T} y_t$ asymptoottinen jakauma sievenee tässä tapauksessa? (Mainittu asymptoottinen tulos voidaan todistaa tehdyillä oletuksilla.)

Vihje: AR(1)-prosessin autokovarianssifunktio monisteen s. 14.

2. Oletetaan, että edellisessä tehtävässä $\phi = 0.6$, $\sigma^2 = 1$, $T = 100$ ja $\bar{y} = 0.3$.

(a) Muodosta likimääräinen 95%:n luottamusväli odotusarvolle $\mu = \mathsf{E}(y_t)$ käyttäen edellä mainittuja parametriarvoja. Tukeeko aineisto väitettä $\mu = 0$?

(b) Oletetaan nyt havainnot virheellisesti riippumattomiksi eli toimitaan olettaen ikään kuin $y_t \sim \mathsf{iid}(0, 1.56)$ pätisi (tässä 1.56 saadaan y_t:n oikeasta varianssin kaavasta $\mathsf{Var}(y_t) = \sigma^2 / \left(1 - \phi^2\right)$ oletetuilla parametrien ϕ ja σ^2 arvoilla). Muodosta likimääräinen 95%:n luottamusväli odotusarvolle μ käyttäen tätä virheellistä oletusta ja vertaa tulosta edellisen kohdan oikeaan tulokseen. Mitä havaitset?

Vihje: Luottamusväli muodostetaan käyttäen samaa periaatetta kuin tilastollisen päättelyn kurssin normaalimallia koskevassa esimerkissä (ks. Nieminen & Saikkonen: "Tilastollisen päättelyn kurssi", esimerkki 6.1.3).

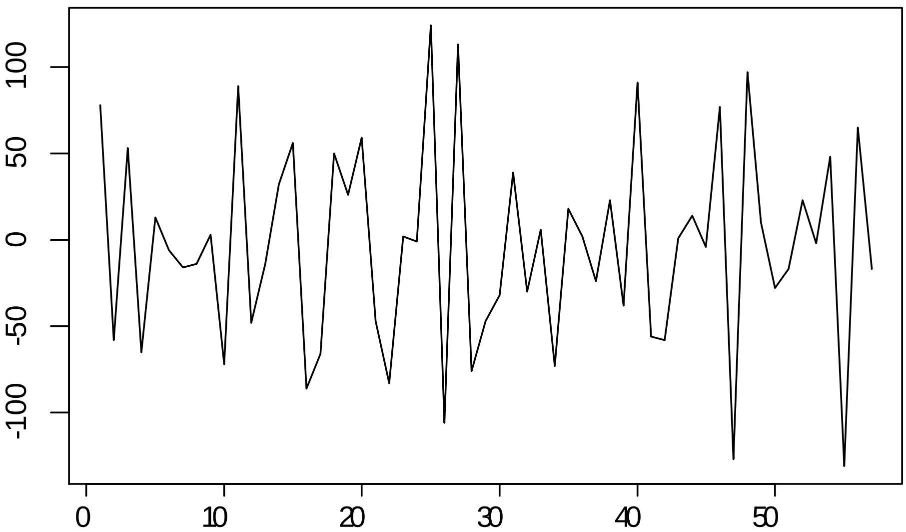
3. Tarkastellaan monisteen Kuvion 1.5 oikeassa alakulmassa esitettyä Australian tavaroiden ja palvelusten neljännesvuosittaisen tuonnin logaritmisia differenssejä, jotka näyttävät stationaarisilta. Alla on alkuperäisestä ja neliöidystä sarjasta lasketut 10 ensimmäistä autokorrelaatiokerrointa (edelliset $\mathsf{r}_y(h)$ ja jälkimmäiset $\mathsf{r}_{y^2}(h)$).

h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathsf{r}_y(h)$	-0.10	-0.05	-0.09	0.07	-0.23	-0.11	-0.09	0.08	-0.09	0.12
$\mathsf{r}_{y^2}(h)$	0.28	-0.04	-0.06	-0.02	-0.02	0.01	-0.06	-0.04	-0.01	0.08

Tutki voidaanko havaittu sarja tulkita vahvasta valkoisesta kohinasta (tai iid-prosessista) saaduksi realisaatioksi. Havaintojen lukumäärä $T = 125$.

4. Tarkastellaan tilannetta, jossa suuri maanalainen bensiinisäiliö täytetään päivittäin lisäämällä illalla päivän aikana myydyn bensiinin määrä. Olkoon x_t säiliössä mittauksen mukaan illalla oleva bensiinin määrä päivänä t ja a_t päivän t aikana myydyn bensiinin määrän ja säiliöön lisätyn bensiinin määrän erotus. Määritellään $y_t = x_t - x_{t-1} + a_t$. Koska säiliössä olevaa bensiinin määrää ja sieltä myynnin seurauksena poistuneen ja sinne illalla lisätyn bensiinin määrää ei kyetä mittaamaan tarkasti, tulkitaan mittaustuloksista saadut havainnot satunnaisiksi (ilman mittausvirheitä ja säiliön mahdollista vuotamista pätisi $y_t = 0$).

Alla olevassa kuvassa on 57 päivittäisen havainnon (stationaariselta näyttävä) aikasarja edellä kuvatusta tilanteesta ja sen alla sarjasta lasketut 10 ensimmäistä autokorrelaatiokerrointa, joista ensimmäinen $\mathsf{r}_y(1)$ näyttäisi viittaavan nollasta poikkea-



h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathsf{r}_y(h)$	-0.50	0.12	-0.21	0.08	0.02	0.12	-0.22	0.25	-0.19	0.06

vaan korrelaatioon. Loput estimoiduista autokorrelaatiokertoimista ovat selvästi ensimmäistä pienempiä. Autokorrelaatiofunktiossa näyttäisi siten olevan katkos viipymällä yksi, mikä viittaa MA(1)-prosessiin (ks. monisteen s. 11).

Perustele ensin, että ensimmäinen estimoiduista autokorrelaatiokertoimista on kohtuullista tulkita nollasta poikkeavaksi, jolloin monisteen sivulla 21 olevaa tulosta (2.8) ja sen jälkeen esitettyä menettelyä ei voida soveltaa estimoituihin autokorrelaatiokertoimiin $\mathsf{r}_y(2), ..., \mathsf{r}_y(10)$. Voidaan kuitenkin osoittaa, että MA(1)-prosessin tapauksessa pätee asymptoottinen tulos

$$\frac{\mathsf{r}_y(h)}{\sqrt{1+2\mathsf{r}_y(1)^2}} \underset{as}{\sim} \mathsf{N}(0,1), \quad h>1.$$

Arvioi tämän perusteella olisiko MA(1)-prosessi sopiva malli tälle sarjalle (huomaa, että nyt estimaattorien $\mathsf{r}_y(2), ..., \mathsf{r}_y(10)$ asymptoottinen riippumattomuus ei päde).