Stationaariset aikasarjat sl 2014, HT 1, viikko 37

1. Tarkastellaan monisteen Esimerkin 2.1(ii) prosessia

$$y_t = A\cos(\lambda t) + B\sin(\lambda t),$$

jossa $\lambda \in [0,\pi)$ on vakio ja satunnaismuuttujat A ja B totetuttavat ehdot $\mathsf{E}(A) = \mathsf{E}(B) = 0$, $\mathsf{Var}(A) = \mathsf{Var}(B) = \sigma^2$ ja $\mathsf{Cov}(A,B) = 0$. Osoita, että $\mathsf{E}(y_t) = 0$ ja $\mathsf{Cov}(y_t, y_{t+h}) = \sigma^2 \cos(\lambda h)$, joten y_t on heikosti stationaarinen.

Vihje: $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.

2. Olkoon $\varepsilon_t \sim \mathsf{nid}(0,1)$. Määritellään prosessi

$$y_t = \begin{cases} \varepsilon_t, & \text{kun } t \text{ on parillinen} \\ (\varepsilon_t^2 - 1)/\sqrt{2}, & \text{kun } t \text{ on pariton.} \end{cases}$$

Osoita, että $y_t \sim \mathsf{wn}(0,1)$, mutta $y_t \sim \mathsf{iid}(0,1)$ ei päde.

Vihje: $\varepsilon_t \sim \mathsf{nid}(0,1) \Rightarrow \mathsf{E}(\varepsilon_t^4) = 3$ tai $\varepsilon_t \sim \mathsf{nid}(0,1) \Rightarrow \varepsilon_t^2 \sim \chi_1^2$ ja $\mathsf{Var}(\varepsilon_t^2) = 2$.

3. Tarkastellaan monisteen Esimerkin 2.2(ii) prosessia $y_t = \varepsilon_t \sqrt{\omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2}$, jossa $\omega > 0$, $\alpha \geq 0$ ja $\varepsilon_t \sim \mathsf{iid}\left(0, \sigma^2\right)$. Osoita, että y_t on heikko valkoinen kohina.

4. Tarkastellaan MA(1)-prosessin $y_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$, $\varepsilon_t \sim \mathsf{iid}\left(0,\sigma^2\right)$, ensimmäistä autokorrelaatiokerrointa $\rho_1 = \theta / \left(1+\theta^2\right)$ (ks. monisteen s. 11). Osoita, että $-1/2 \leq \rho_1 \leq 1/2$ ja että $\rho_1 = 1/2$ (vastaavasti $\rho_1 = -1/2$), kun $\theta = 1$ (vastaavasti $\theta = -1$).

Vihje: Johda ρ_1:n lausekkeesta toisen asteen yhtälö ja ratkaise se.