

Stationaariset aikasarjat

Pentti Saikkonen

sl 2014

Korjattu versio: 3.12.2014

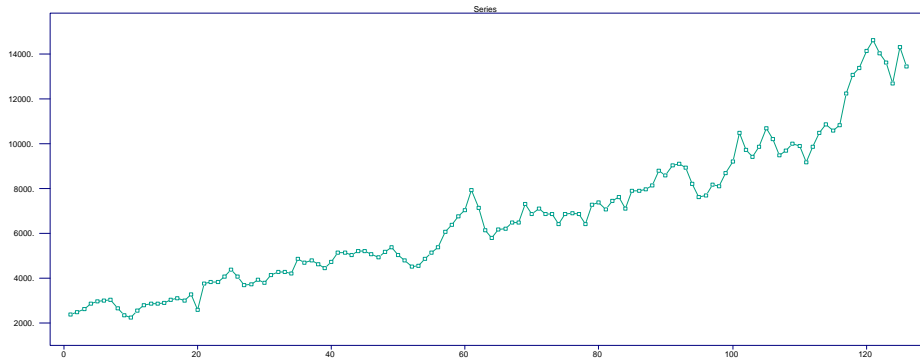
Sisältö

1.	Johdanto	1
2.	Stationaariset prosessit	5
2.1	Peruskäsitteitä	5
2.2.	Lineaarinen prosessi	10
2.2.1.	Yksinkertainen erikoistapaus: MA(1)-prosessi	10
2.2.2.	Yleinen tapaus	12
2.2.3.	Toinen yksinkertainen erikoistapaus: AR(1)-prosessi	14
2.2.4.	Viivästysoperaattorin käyttö ja ARMA(1,1)-prosessi	17
2.3.	Woldin hajotelma	18
2.4.	Otoskeskiarvon ja otosautokorrelaatiofunktion ominaisuuksia	20
3.	ARMA(p,q)-prosessit ja ARIMA(p,d,q)-prosessit	22
3.1.	AR(p)-prosessi	22
3.2.	MA(q)-prosessi	27
3.3.	ARMA(p,q)-prosessi	30
3.4.	ARMA(p,q)-prosessin ennustaminen	34
3.5.	ARIMA(p,d,q)-prosessi	38
4.	ARMA-mallien rakentaminen	39
4.1.	Autokorrelaatio- ja osittaisautokorrelaatiofunktion käyttäminen mallin valinnassa	40
4.2.	Parametrien alustava estimointi	41
4.3.	Hannanin ja Rissanen mallinvalintamenetelmä	43
4.4.	Parametrien tehokas estimointi	45
4.5.	Mallin riittävyyden tarkistaminen	49
4.6.	Kausivaihtelumallit	53
5.	Ehdollisen varianssin mallintaminen	55
5.1.	Mallin yleinen rakenne	57
5.2.	ARCH(1)-malli	58
5.3.	ARCH(s)-malli	61
5.4.	GARCH(1,1)-malli	62
5.5.	GARCH(r,s)-malli	63
5.6.	Muita malleja	64
5.7.	Ehdollisen varianssin ennustaminen	65
5.8.	GARCH-mallien parametrien estimointi	66
5.9.	Mallin riittävyyden tarkistaminen	70
5.10.	Empiirinen esimerkki	71
6.	AR-GARCH-malli	72
6.1.	Mallin määrittely	73
6.2.	Ennustaminen	74
6.3.	Parametrien estimointi	75
6.4.	Empiirinen esimerkki	76

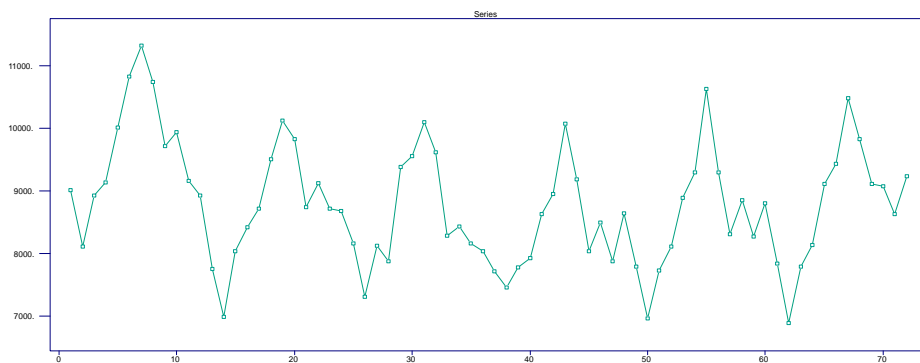
1 Johdanto

Aikasarja on havaintoaineisto, jossa havainnot on saatu peräkkäisinä ajankohtina eli y_t , $t = 1, \dots, T$, jossa t on ajankohta ja T havaintojen lukumäärä. Konkreettisissa tilanteissa ajankohdat voidaan tietysti nimetä havainnollisesti eli esimerkiksi vuosi-aineistossa voi olla $t = 1970, \dots, 2005$ tai kuukausiaineistossa $t = 1970I, 1970II, \dots, 2005XII$. Tällä kurssilla oletetaan, että peräkkäiset ajankohdat ovat ajallisesti yhtä kaukana toisistaan tai niitä voidaan käsitellä sellaisina. Jos edellä y_t on skalaari, puhutaan *yksiulotteisesta tai reaaliarvoisesta aikasarjasta*, ja jos y_t on vektori, puhutaan *moniulotteisesta tai vektoriarvoisesta aikasarjasta*.

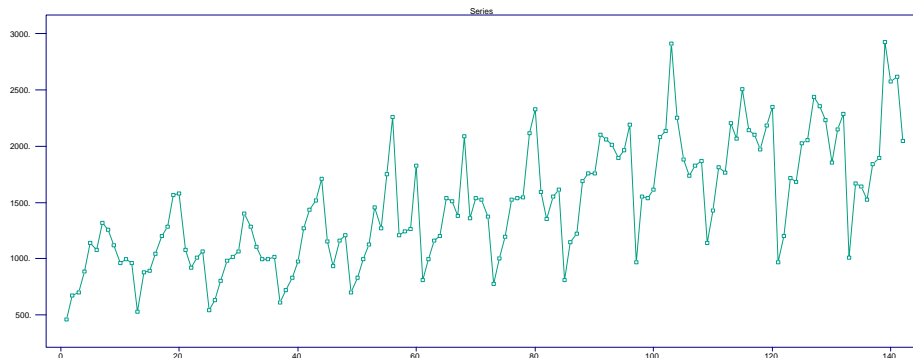
Aikasarja-aineistoja analysoidaan useilla sovellusalueilla kuten taloustieteissä ja muissa yhteiskuntatieteissä, luonnontieteissä, insinööritieteissä ja lääketieteessä. Kuviossa 1.1 on esitetty Australian tavaroiden ja palvelusten neljännesvuosittaisen tuonnin arvo ajanjaksolta 1959III - 1990IV. Tälle aikasarjalle on ominaista nouseva *trendi*.



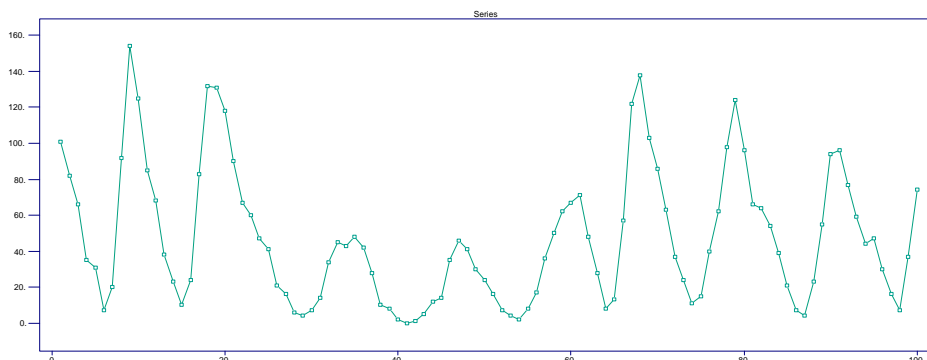
Kuvio 1.1. Australian tavaroiden ja palvelusten neljännesvuosittainen tuonti ajanjaksolta 1959III - 1990IV (miljoonaa Australian dollaria).



Kuvio 1.2. USA:ssa auto-onnettomuuksissa kuukausittain kuolleiden lukumäärä ajanjaksolta 1973I - 1978XII.



Kuvio 1.3. Australialaisen punaviinin kuukausittaisen myynnin volyymi (tuhansina litroina) ajanjaksolta 1980I - 1991X.



Kuvio 1.4. Vuotuisten auringonpilkkujen lukumäärä vuosilta 1770 - 1870.

Kuvio 1.2 esittää USA:ssa auto-onnettomuuksissa kuukausittain kuolleiden lukumäärää ajanjaksolta 1973I - 1978XII. Tässä aikasarjassa ei näy selvää nousevaa tai laskevaa trendiä. Sen sijaan selvä *kausivaihtelu* voidaan havaita, sillä vuotuinen maksimi esiintyy aina heinäkuussa ja minimi helmikuussa.

Kuvion 1.3 aikasarja kuvaa australialaisen punaviinin kuukausittaisen myynnin volyymia tammikuusta 1980 lokakuuhun 1991. Tässä aikasarjassa esiintyy sekä nouseva trendi että selvää kausivaihtelua. Vuotuinen huippu saavutetaan yleensä heinäkuussa, kun taas tammikussa myynti on alhaisimmillaan. Myynnin vaihtelu näyttää lisäksi kasvavan myynnin määrän kasvaessa (tai ajan kuluessa).

Kuviossa 1.4 nähdään auringonpilkkujen vuotuinen vaihtelu vuosilta 1770 - 1870. Tässä aikasarjassa ei ole trendiä eikä kausivaihtelua, joskin sarjan *syklinen* vaihtelu saattaa nopeasti katsoen näyttää kausivaihtelulta. Kysymyksessä ei kuitenkaan ole kausivaihtelu, sillä syklin luonne vaihtelee eri aikoina. Erityisesti peräkkäisten

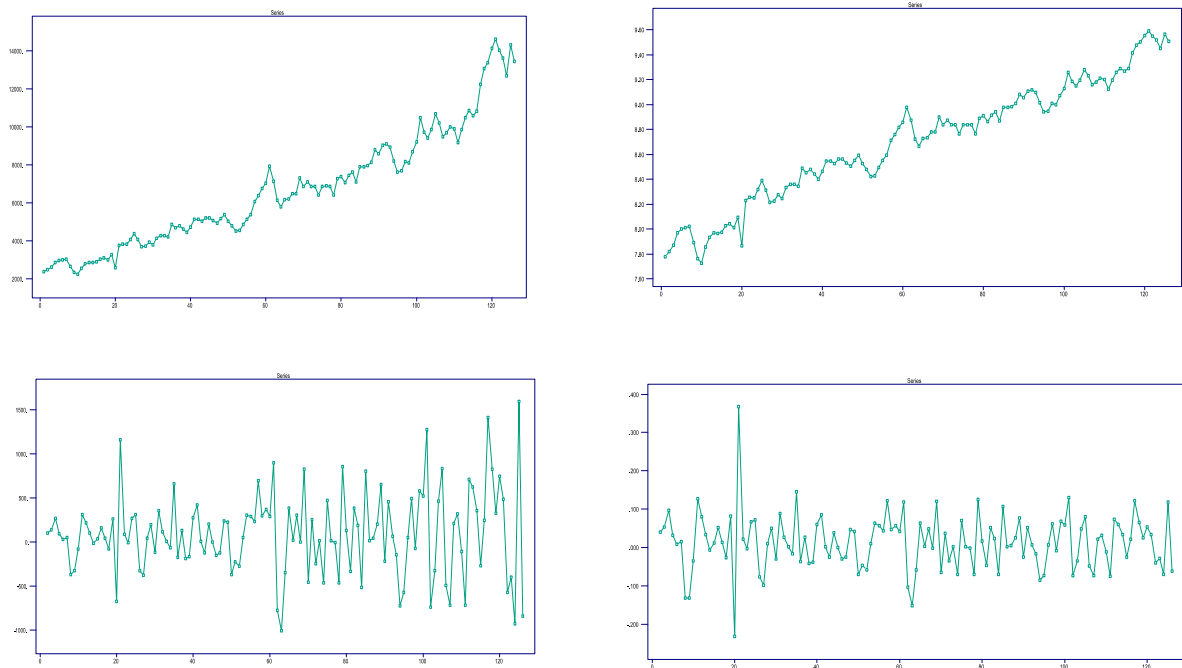
huippujen välinen etäisyys ei ole vakio kuten kausivaihtelussa. Peräkkäisten havaintojen välillä näyttää olevan positiivinen korrelaatio, sillä suuret havaintoarvot esiintyvät yleensä peräkkäin ja samoin pienet.

Usein aikasarja-analyysin tavoitteena on rakentaa *tilastollinen malli*, jolla kuvataan havaittua aikasarjaa (aikasarjoja) ja sen (niiden) vaihtelua sekä peräkkäisten havaintojen välistä riippuvuutta, jonka olemassaolo on yleensä ilmeinen (esimerkiksi kuvan tai mallinnettavan ilmiön taustateorian perusteella). Sen jälkeen kun malli on valittu, voidaan estimoida sen parametrit, tarkistaa estimoidun mallin ja havaintojen yhteensopivuus, testata parametreja koskevia hypoteeseja ja käyttää mallia ajateltuun tarkoitukseen.

Mallin käyttötarkoitukset voivat vaihdella tilanteen ja sovellusalueen mukaan. Mallia voidaan käyttää esimerkiksi antamaan havaintoaineistosta *tiivistetty kuvaus*, joka auttaa ymmärtämään aineiston taustalla olevaa ilmiötä. Toinen keskeinen aikasarjamallin käyttötarkoitus on *ennustaminen*. Moniulotteisessa tapauksessa tämä voi tarkoittaa yhden aikasarjan ennustamista muiden (selittävien) aikasarjojen avulla. Moniulotteisessa tapauksessa ollaan ennustamisen lisäksi usein myös kiinnostuneita aikasarjojen välisten ajallisten *riippuvuuksien tutkimisesta*. Jos esimerkiksi australialaisen punaviinin myynnin lisäksi tarkastellaan valkoviinin myyntiä, voidaan olla kiinnostuneita tietämään kasvaako valkoviinin myynti, kun punaviinin myynti vähenee ja päinvastoin. (Tällöin olisi todennäköisesti syytä ottaa huomioon myös myyntiin vaikuttavat ulkoiset tekijät kuten viinien hinnat ja kuluttajien tulot.)

Seuraavassa esitetään lyhyesti joitakin aikasarja-aineistojen mallintamiseen liittyviä seikkoja keskittyen yksiulotteiseen tapaukseen. Aikasarjamallin rakentaminen on aina syytä aloittaa piirtämällä tarkasteltava aikasarja. Kuvan avulla saadaan käsitys aikasarjan pääpiirteistä kuten trendin ja/tai kausivaihtelun olemassaolosta. Näiden piirteiden lisäksi kannattaa tutkia onko aikasarjassa ilmeisiä äkillisiä muutoksia tai poikkeavia havaintoja, joita ei seuraavassa oleteta olevan.

Monissa aikasarjamalleissa trendiä ja/tai säännöllistä kausivaihtelua ei oleteta olevan. Jos tällaisia malleja halutaan kuitenkin soveltaa aikasarjaan, jossa on trendi ja/tai säännöllinen kausivaihtelu, käytetään muunnettua aikasarjaa, jossa valitulla muunnoksella eliminoidaan nämä aikasarjan piirteet. Alkuperäisen aikasarjan kannalta katsoen trendi ja/tai kausivaihtelu mallinnetaan tällöin muunnoksella, joka voi vaatia parametrien estimointia. Esimerkiksi lineaarisen trendin tapauksessa voidaan havaittuun aikasarjaan sovittaa pienimmän neliösumman (PNS) menetelmällä trendisuora ja siirtyä tarkastelemaan residuaalisarjaa. Havaitun aikasarjan y_t asemesta käytetään tällöin aikasarjaa $\hat{x}_t = y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta}t$ ($t = 1, \dots, T$), jossa estimaatit $\hat{\alpha}$ ja $\hat{\beta}$ on laskettu PNS-menetelmällä. Lineaarisen funktion asemesta voidaan käyttää muitakin ajan funktioita kuten polynomeja tai trigonometrisia funktioita. Näistä jälkimmäisillä voidaan mallintaa edellä mainittua säännöllistä kausivaihtelua, joka voidaan tulkita yhdeksi trendityypiksi. Usein kausivaihtelu eliminoidaan ns. kausi-indikaattoreita käyttäen. Esimerkiksi neljännesvuosiaineistossa havaitun aikasarjan asemesta käytetään tällöin



Kuvio 1.5. Australian tavaroiden ja palvelusten neljännesvuosittainen tuonti 1959III - 1990IV (miljoonaa Australian dollaria). Alkuperäinen sarja (vas. ylh.), sama logaritmoituna (oik. ylh.) ja näiden differenssit (alh.).

PNS:llä muodostettua residuaaliaikasarjaa $\hat{x}_t = y_t - \hat{\beta}_1 d_{1t} - \dots - \hat{\beta}_4 d_{4t}$ ($t = 1, \dots, T$), jossa i . kausi-indikaattori d_{it} saa arvon yksi, kun kysymyksessä on neljänneksen i havainto ja nolla muulloin ($i = 1, \dots, 4$).

Muunnoksista käytetään ehkä eniten aikasarjan muutoksia eli differenssejä $y_t - y_{t-s}$ ($s \geq 1$). Tapaus $s = 1$ on tavallisin, joskin kausivaihtelun yhteydessä s :n arvoksi voidaan valita myös kausivaihtelujakson pituus (esim. kuukausiaineistossa $s = 12$). Monesti differensointiin yhdistetään alkuperäisen aikasarjan logaritointi (olettaen $y_t > 0 \forall t$). Logaritmointia suositaan erityisesti, kun aikasarjassa on eksponentiaalinen trendi tai kun aikasarjan vaihtelu kasvaa tason kasvaessa. Logaritmisilla differensseillä on myös tulkinnallinen motivaatio, sillä ne voidaan tulkita suhteellisten muutosten indikaattoreiksi ($\log y_t - \log y_{t-1} \approx (y_t - y_{t-1})/y_{t-1}$, kun muutos on pieni).

Tarkastellaan esimerkkinä Kuviossa 1.1 esitettyä Australian tavaroiden ja palvelusten tuontisarjaa. Kuviossa 1.5 on ylhäällä esitetty alkuperäinen sarja (vasemmalla) ja sen logaritmoitu versio (oikealla). Logaritointi on muuntanut trendin lähemmäs lineaarista. Kuvion 1.5 alhaalla olevissa vastaavissa differensoiduissa sarjoissa nouseva trendi on saatu eliminoitua. Logaritmoimattoman sarjan differensseissä (alhaalla vasemmalla) on vaihtelu sarjan loppuosassa kuitenkin paljon suurempaa kuin logaritmoimattoman sarjan differensseissä (alhaalla oikealla). Edellistä voidaan pitää trendinä

aikasarjan vaihtelussa (varianssissa).

Tällä kurssilla tarkastellaan malleja, jotka olettavat, että havaitussa aikasarjassa ei ole trendiä tai että trendi on eliminoitu muunnoksella. Kurssilla ei tarkastella moniulotteisia aikasarjamalleja eikä malleja, joissa trendin mallinnus olisi varsinaisen mielenkiinnon kohteena.

2 Stationaariset prosessit

2.1 Peruskäsitteitä

Oletetaan, että tarkoituksena on rakentaa tilastollinen malli havaitulle yksiulotteiselle aikasarjalle y_1, \dots, y_T , jossa ei ole trendiä. Hyvin yleisellä tasolla havaittu aikasarja tulkitaan tällöin satunnaisvektorin $y = (y_1, \dots, y_T)$ havaituksi arvoksi eli *realisatioksi*.¹ Mallinnuksessa spesifioidaan tämän T -ulotteisen satunnaisvektorin todennäköisyysjakauma. Koska havaintojen ei voida olettaa olevan riippumattomia, ei komponenttien y_t ($t = 1, \dots, T$) reunajakaumien spesifiointi riitä, vaan vaaditaan nimenomaan T -ulotteisen yhteisjakauman spesifiointi. Konkreettisissa tilanteissa tämän yhteisjakauman spesifiointi tapahtuu yleensä spesifioimalla peräkkäisten havaintojen riippuvuutta kuvaava malliyhtälö, johon liitetään ”sopiva” jakaumaoletus. Ennen tällaisten konkreettisten mallien tarkastelua on kuitenkin syytä tarkastella lyhyesti taustalla olevaa yleistä todennäköisyyslaskennan teoriaa ja siinä käytettäviä käsitteitä.

Stokastinen prosessi. Vaikka tilastollisessa mallinnuksessa tarkastellaan satunnaismuuttujia y_1, \dots, y_T , on matemaattisissa tarkasteluissa usein kätevää laajentaa aikaindeksin t arvojoukkoa. Tämä johtaa yleisen diskreettiaikaisen stokastisen prosessin käsitteeseen. Tässä yhteydessä *stokastinen prosessi* (myöhemmin usein lyhyesti prosessi) on joukko satunnaismuuttujia $\{y_t; t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Toisinaan voidaan tarkastella myös tapausta, jossa $t = 0, 1, \dots$ tai $t = 1, 2, \dots$. Koska aikaindeksin arvojoukko on yleensä tiedossa, voidaan merkitä lyhyesti y_t tai $\{y_t\}$, jos halutaan korostaa eroa prosessin yksittäiseen komponenttiin. Käytännön kannalta on merkityksellistä, että tarkasteltavasta prosessista on käytettävissä vain yksi havaittu realisaatio (eli yksi havainto) ja sekin havaitaan vain osittain (eli ajankohtina $t = 1, \dots, T$). Näin ollen on selvää, ettei tarkasteltavan prosessin ominaisuuksia voida selvittää käytettävissä olevan havaintoaineiston avulla ilman prosessia koskevia rajoittavia oletuksia.

Heikosti stationaarinen stokastinen prosessi. Edellä mainitun seikan havainnollistamiseksi tarkastellaan prosessin y_t *odotusarvofunktiota* (olettaen $E(y_t^2) < \infty$

¹Tällä kurssilla käytetään samaa merkintää satunnaismuuttujista ja niiden havaituista arvoista. Ero on ymmärrettävä asiayhteydestä. Vektorit tulkitaan matriisilaskuissa aina pystyvektoreiksi ja niistä voidaan käyttää myös matriisilaskennan merkintää eli esimerkiksi $y = [y_1 \ \dots \ y_T]'$, jossa pilkku osoittaa vektorin (samoin kuin matriisin) transponointia.

kaikilla t)

$$\mu_t = \mathbf{E}(y_t), \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ja kovarianssifunktiota

$$\gamma_{s,t} = \mathbf{Cov}(y_s, y_t) = \mathbf{E}[(y_s - \mu_s)(y_t - \mu_t)], \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Ellei näiden funktioiden riippuvuutta ajasta rajoiteta mitenkään, on niiden estimointi havaitun aikasarjan y_1, \dots, y_T avulla tietenkin täysin mahdotonta. Tilanne yksinkertaistuu, jos voidaan olettaa, ettei tällaista ajallista riippuvuutta ole. Tähän liittyen sanotaan, että prosessi y_t on *heikosti stationaarinen tai kovarianssistationaarinen*, jos

$$\mathbf{E}(y_t) = \mu \quad \text{kaikilla } t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ja

$$\mathbf{Cov}(y_t, y_{t+h}) = \gamma_{t,t+h} = \gamma_{0,h} \quad \text{kaikilla } h, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Toisin sanoen, odotusarvofunktio μ_t on ajassa vakio ja kovarianssifunktio $\gamma_{s,t}$ ei riipu ajankohdista s ja t , vaan pelkästään niiden välisestä etäisyydestä $t-s$. Jatkossa merkitään lyhyesti $\gamma_{0,h} = \gamma_h$ ja tätä h :n funktiota kutsutaan prosessin y_t *autokovarianssifunktioksi*. Kun h :n arvo on kiinnitetty, sanotaan γ_h :ta *autokovarianssikertoimeksi* viipymällä h . Odotusarvofunktiota tullaan nimittämään lyhyesti odotusarvoksi.

Heikolle stationaarisuudelle on siis ominaista, että prosessin ensimmäiset ja toiset momentit ovat äärellisiä ja aikainvariantteja. Ellei toisin mainita, oletetaan heikko stationaarisuus seuraavassa.

Koska $\gamma_0 = \mathbf{Var}(y_t)$, pätee $\gamma_0 \geq 0$ ja kovarianssin tunnettujen ominaisuuksien nojalla $|\gamma_h| \leq \gamma_0$. Yhtälöstä $\mathbf{Cov}(y_t, y_{t+h}) = \mathbf{Cov}(y_{t-h}, y_t)$ seuraa lisäksi autokovarianssifunktion parillisuus eli $\gamma_h = \gamma_{-h}$. Autokovarianssifunktiolla on siten ominaisuudet

$$\gamma_0 \geq 0, \quad |\gamma_h| \leq \gamma_0 \quad \text{ja} \quad \gamma_h = \gamma_{-h}.$$

Koska tapaus $\gamma_0 = 0$ on mielenkiinnoton, oletetaan jatkossa $\gamma_0 > 0$.

Käytännössä autokovarianssifunktion asemesta käytetään yleensä *autokorrelaatiofunktiota*

$$\rho_h = \mathbf{Cor}(y_t, y_{t+h}) = \gamma_h / \gamma_0.$$

Autokorrelaatiokertoimilla ρ_h on ilmeiset ominaisuudet

$$\rho_0 = 1, \quad |\rho_h| \leq 1 \quad \text{ja} \quad \rho_h = \rho_{-h}.$$

Sekä autokovarianssifunktiota että autokorrelaatiofunktiota riittää siis tarkastella vain viipymillä $h \geq 0$ (jälkimmäistä viipymillä $h > 0$).

Vaikka edellä tarkasteltujen teoreettisten momenttien estimointi onkin niiden aikainvarianttiuden perusteella ilmeisesti mahdollista, on periaatteellisena ongelmana se, että autokovarianssifunktiossa ja autokorrelaatiofunktiossa on yleisesti ottaen ääretön

määrä estimoitavia suureita, joita kaikkia ei voida käytännössä estimoida. Yleensä voidaan kuitenkin olettaa, että

$$\gamma_h \rightarrow 0, \quad \text{kun } h \rightarrow \infty. \quad (2.1)$$

Tällöin satunnaismuuttujat y_t ja y_{t+h} ovat lähes korreloimattomia, kun h on ”suuri” eli kun y_t ja y_{t+h} ovat ajallisesti ”kaukana” toisistaan. Käytännössä riittää siten estimoida autokorrelaatiofunktio ρ_h , kun $h = 1, \dots, H$ ja H on niin suuri, että $\rho_h \approx 0$, kun $h > H$.

Heikosti stationaarisen prosessin y_t odotusarvo on luontevaa estimoida otoskeskiarvolla

$$\bar{y} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t.$$

Koska $\text{Cov}(y_1, y_{1+h}) = \dots = \text{Cov}(y_{T-h}, y_T)$ ($h \geq 0$), tuntuu luontevalta estimoida autokovarianssikerroin γ_h havaintojen $(y_1, y_{1+h}), \dots, (y_{T-h}, y_T)$ otoskovarianssia käyttäen. Koska $E(y_t) = E(y_{t+h})$, käytetään tavallisesti estimaattia

$$c_h = \frac{1}{T-h} \sum_{t=1}^{T-h} (y_t - \bar{y})(y_{t+h} - \bar{y}), \quad 0 \leq h < T,$$

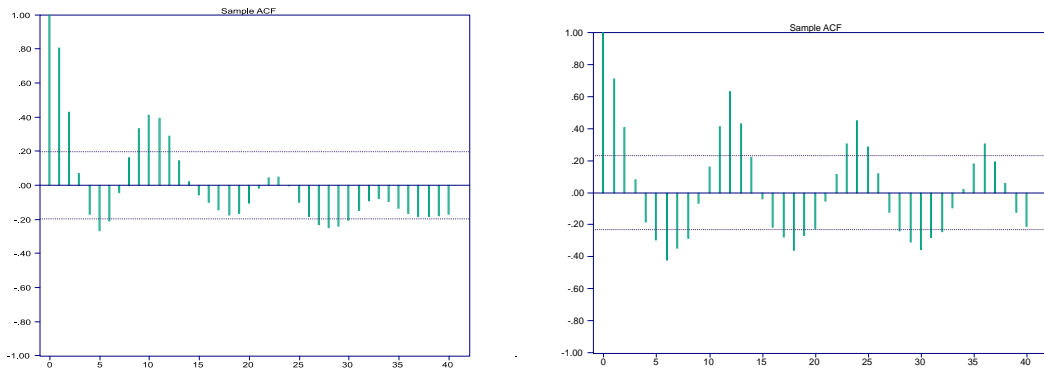
jota kutsutaan otosautokovarianssikerroimeksi ja tulkittuna viipymän h funktiona otosautokovarianssifunktioksi. Jakajan $T-h$ paikalla näkee käytettävän myös T :tä. Luonteva autokorrelaatiofunktion estimaatti on siten

$$r_h = c_h/c_0, \quad 0 \leq h < T,$$

jota sanotaan otosautokorrelaatiofunktioiksi. Huomaa, ettei ehto $|r_h| \leq 1$ välttämättä päde, koska r_h :tä ei lasketa tavanomaista otoskorrelaatiokerroimen kaavaa käyttäen.

Tarkastellaan esimerkkinä Kuvion 1.2 onnettomussarjan ja Kuvion 1.4 auringonpilkkusarjan otosautokorrelaatiofunktioita, jotka on esitetty Kuviossa 2.1, kun $h = 0, \dots, 40$. Kummankaan sarjan realisaatiot eivät viittaa selvään epästationaarisuuteen. Kuvioon 2.1 piirretyt kaksi vaakasuoraa viivaa ($\pm 1.96/\sqrt{T}$) määrittävät kriittiset rajat, joiden väliin yksittäinen estimaattori r_h kuuluu likimain 95%:n todennäköisyydellä, kun $\rho_h = 0$ kaikilla $h > 0$ (näitä rajoja tarkastellaan lähemmin jaksossa 2.4). Kummassakin aikasarjassa on selvää autokorrelaatiota, joka vaimenee h :n arvon kasvaessa. Vaimeneminen on hitaampaa onnettomussarjan tapauksessa, mikä johtuu kausivaihtelusta, joka aiheuttaa varsin voimakasta autokorrelaatiota viipymillä $h = 12, 24$ ja 36 . Auringonpilkkusarjassa tällaista kausivaihtelua ei ole, joskin otosautokorrelaatiofunktiossa on syklistä värähtelyä, joka aiheutuu sarjan vastaavasta ominaisuudesta.

Heikko stationaarisuus on sikäli havainnollinen käsite, että sen realistisuutta voidaan arvioida katsomalla havaitun aikasarjan kuvaa. Jos havainnot vaihtelevat vakiovari-



Kuvio 2.1. Kuvion 1.4 auringonpilkkusarjan otosautokorrelaatiofunktio (vasemmalla) ja Kuvion 1.2 onnettomuussarjan otosautokorrelaatiofunktio (oikealla) viipymillä $h = 0, \dots, 40$.

anssilla kiinteän tason ympärillä, voidaan heikkoa stationaarisuutta pitää kohtuullisena oletuksena. Heikko stationaarisuus ei kuitenkaan riitä aikasarjamallien tilastolliseen analysointiin, sillä se ei yksistään mahdollista uskottavuusfunktion muodostamista eikä estimaattorien ja testisuureiden jakaumien tutkimista. Tästä syystä määritellään heikkoa stationaarisuutta vahvempi stationaarisuuden muoto. Tarkastellaan ensin kuitenkin esimerkkiä, jonka ensimmäisen kohdan prosessi on yksinkertaisin mahdollinen esimerkki heikosti stationaarisesta prosessista. Esimerkin toisen kohdan prosessi osoittaa, että heikon stationaarisuuden matemaattinen määritelmä sallii prosesseja, jotka voivat tuntua yllättäviltä.

Esimerkki 2.1.(i) Olkoon ε_t prosessi, jolle pätee $\mathbf{E}(\varepsilon_t) = \mu$, $\mathbf{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2 < \infty$ ja $\mathbf{Cov}(\varepsilon_s, \varepsilon_t) = 0$, kun $s \neq t$. Määritelmän nojalla on selvää, että ε_t on heikosti stationaarinen. Tällaista prosessia sanotaan usein (*heikoksi*) *valkoiseksi kohinaksi*. Se on yksinkertaisuudestaan huolimatta tärkeä, sillä sen avulla voidaan määritellä monimutkaisempia prosesseja kuten myöhemmin nähdään.

(ii) Määritellään prosessi

$$y_t = A \cos(\lambda t) + B \sin(\lambda t),$$

jossa $\lambda \in [0, \pi)$ on vakio ja satunnaismuuttujat A ja B toteuttavat ehdot $\mathbf{E}(A) = \mathbf{E}(B) = 0$, $\mathbf{Var}(A) = \mathbf{Var}(B) = \sigma^2$ ja $\mathbf{Cov}(A, B) = 0$. Tulos $\mathbf{E}(y_t) = 0$ pätee ilmeisesti ja käyttäen trigonometristen funktioiden ominaisuuksia voidaan suoralla laskulla todeta, että $\mathbf{Cov}(y_t, y_{t+h}) = \sigma^2 \cos(\lambda h)$, joten y_t on heikosti stationaarinen (yksityiskohdat jätetään tehtäväksi). Tämä prosessi on sikäli merkillinen, että sen realisaatiot ovat täysin säännöllisiä ajan funktioita ($\cos(\lambda t)$:n ja $\sin(\lambda t)$:n lineaarikombinaatioita). Huomaa myös, että tällä prosessilla ehto (2.1) ei päde. \square

Vahvasti stationaarinen stokastinen prosessi. Määritellään nyt edellä mainittu vahvempi stationaarisuuden muoto. Prosessin y_t ($t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) sanotaan olevan *vahvasti stationaarinen*, jos satunnaismuuttujilla y_{t_1}, \dots, y_{t_m} ja $y_{t_1+h}, \dots, y_{t_m+h}$ on sama m -ulotteinen yhteisjakauma kaikilla kokonaisluvulla t_1, \dots, t_m , h ja m ($m > 0$). Toisin sanoen, prosessin y_t koko todennäköisyysstrukturi (ei vain ensimmäiset ja toiset momentit) on aikainvariantti.

Vahvasti stationaarisella prosessilla y_t on seuraavat ominaisuudet, jotka ovat määritelmän nojalla ilmeisiä.

VS1 Satunnaismuuttujat y_t ovat samoin jakautuneita kaikilla t .

VS2 Satunnaisvektorit (y_t, y_{t+h}) ja (y_s, y_{s+h}) ovat samoin jakautuneita kaikilla t ja s ja jokaisella (kiinteällä) h .

VS3 y_t on heikosti stationaarinen, jos $E(y_t^2) < \infty$.

On selvää, ettei heikosta stationaarisuudesta yleensä seuraa vahva stationaarisuus. Ns. normaalisten prosessien tapauksessa näin kuitenkin käy. Prosessi y_t (ei välttämättä missään mielessä stationaarinen) on *normaalinen*, jos satunnaismuuttujien y_{t_1}, \dots, y_{t_m} m -ulotteinen todennäköisyysjakauma on normaalin kaikilla kokonaisluvuilla t_1, \dots, t_m ja m ($m > 0$).² Koska ensimmäiset ja toiset momentit määräävät normaalijakauman täysin, seuraa heikosta stationaarisuudesta ja prosessin normaalisuudesta vahva stationaarisuus.

Toisin kuin heikosti stationaarisilla prosesseilla on vahvasti stationaarisilla prosesseilla edellä mainittujen ominaisuuksien lisäksi myös se hyödyllinen ominaisuus, että se säilyttää luonteensa funktiomuunnoksissa. Toisin sanoen, seuraava ominaisuus pätee.

VS4 Jos z_t on vahvasti stationaarinen prosessi, niin samoin on $y_t = g(z_{t+m}, \dots, z_{t-n})$ ($m, n \geq 0$) millä tahansa ”siistillä” (eli esim. jatkuvalla tai yleisemmin ns. mitallisella) funktiolla g . Lisäksi m :n tai n :n tai molempien paikalla voi olla ∞ .

Kun m ja n ovat äärellisiä seuraa ominaisuus VS4 jokseenkin suoraan vahvan stationaarisuuden määritelmästä. Tapaukset, joissa ainakin toinen näistä suureista (yleensä n) on ääretön, on kuitenkin hyödyllinen, kuten myöhemmin nähdään. Ellei stationaarisuuden luonnetta täsmennetä, tulkitaan stationaarisuus jatkossa vahvaksi stationaarisuudeksi.

Esimerkki 2.2. (i) Olkoon ε_t jono riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia kertymäfunktiona $F(\cdot)$. Tämän prosessin vahva stationaarisuus on helppo todeta, sillä satunnaisvektorin $(\varepsilon_{t_1}, \dots, \varepsilon_{t_m})$ kertymäfunktio pisteessä (x_1, \dots, x_m)

²Yksinkertaisuuden vuoksi käytetään nimitystä normaalijakauma myös moniulotteisessa tapauksessa pidemmän multinormaalijakauman asemesta.

on $F(x_1) \cdots F(x_m)$, joka on selvästi myös satunnaisvektorin $(\varepsilon_{t_1+h}, \dots, \varepsilon_{t_m+h})$ ker-
tymäfunktio pisteessä (x_1, \dots, x_m) . Jos $\mathbf{E}(\varepsilon_t^2) < \infty$, on ε_t myös heikosti stationaari-
nen ja sillä on samat momenttiominaisuudet kuin Esimerkin 2.1(i) prosessilla. Myös
tämän prosessin yhteydessä puhutaan valkoisesta kohinasta tai *vahvasta valkoisesta*
kohinasta.

(ii) Määritellään prosessi $y_t = \varepsilon_t \sqrt{\omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2}$, jossa $\omega > 0$, $\alpha \geq 0$ ja ε_t on kuten
edellisessä kohdassa ja toteuttaa $\mathbf{E}(\varepsilon_t) = 0$ ja $\mathbf{E}(\varepsilon_t^2) < \infty$. On helppo nähdä,
että y_t on heikko valkoinen kohina (perustelu jätetään tehtäväksi). Koska $y_{t-1} =$
 $\varepsilon_{t-1} \sqrt{\omega + \alpha \varepsilon_{t-2}^2}$, on selvää, ettei y_t ole vahva valkoinen kohina (ellei $\alpha = 0$). \square

Esimerkin 2.2(i) prosessista käytetään lyhennystä $\varepsilon_t \sim \text{iid}(\mu, \sigma^2)$ ($\text{iid} \leftrightarrow$ 'independ-
ently and identically distributed'), jossa $\mu = \mathbf{E}(\varepsilon_t)$ ja $\sigma^2 = \mathbf{Var}(\varepsilon_t)$ (jatkossa yleensä
 $\mu = 0$). Jos oletetaan lisäksi $\varepsilon_t \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$, merkitään $\varepsilon_t \sim \text{nid}(\mu, \sigma^2)$ ($\text{nid} \leftrightarrow$ 'nor-
mally and independently distributed'). Esimerkin 2.1(i) (heikosti stationaarista)
prosessista käytetään merkintää $\varepsilon_t \sim \text{wn}(\mu, \sigma^2)$ ($\text{wn} \leftrightarrow$ 'white noise').

2.2 Lineaarinen prosessi

2.2.1 Yksinkertainen erikoistapaus: MA(1)-prosessi

Kuten Esimerkissä 2.1 mainittiin, voidaan valkoisen kohinan avulla määritellä moni-
mutkaisempia prosesseja. Yksinkertainen esimerkki on

$$y_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2), \quad (2.2)$$

jota kutsutaan *ensimmäisen asteen liukuvan keskiarvon prosessiksi* eli MA(1)-proses-
siksi (MA tulee englannin kielen sanoista 'moving average'). Prosessin arvojen oleteta-
taan siis syntyvän kahden riippumattoman ja ei-havaittavan satunnaissokin painotet-
tuna summana. MA(1)-prosessi on vahvasti stationaarinen (ks. Esimerkki 2.2(i) ja
ominaisuus VS4) ja myös heikko stationaarisuus pätee. Laskemalla nähdään, että

$$\mathbf{E}(y_t) = \mathbf{E}(\varepsilon_t) + \theta \mathbf{E}(\varepsilon_{t-1}) = 0,$$

$$\mathbf{Var}(y_t) = \mathbf{Var}(\varepsilon_t) + \theta^2 \mathbf{Var}(\varepsilon_{t-1}) = \sigma^2 (1 + \theta^2)$$

ja, kun $h > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{Cov}(y_t, y_{t+h}) &= \mathbf{E}[(\varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t+h} + \theta \varepsilon_{t+h-1})] \\ &= \mathbf{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t+h}) + \theta \mathbf{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t+h-1}) + \theta \mathbf{E}(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t+h}) + \theta^2 \mathbf{E}(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t+h-1}) \\ &= \begin{cases} \theta \sigma^2, & h = 1 \\ 0, & h > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

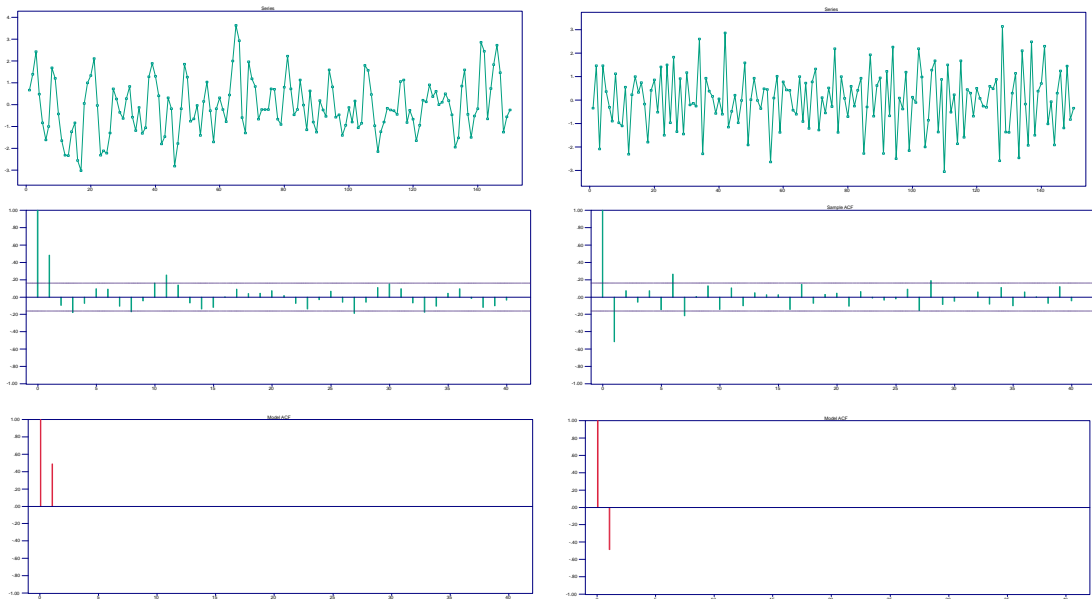
Kahdessa viimeisessä laskelmassa on käytetty prosessin ε_t riippumattomuutta. Samat
momenttitulokset saadaan silloinkin, kun oletuksen $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$ asemesta oletetaan

lievemmin $\varepsilon_t \sim \text{wn}(0, \sigma^2)$, mutta y_t :n vahvasta stationaarisuudesta ei voida tällöin päätellä mitään (tämä pätee myös seuraavassa jaksossa esitettäviin yleisempiin tuloksiin). MA(1)-prosessin autokorrelaatiofunktio on edellä todetun nojalla

$$\rho_h = \begin{cases} 1, & h = 0 \\ \theta / (1 + \theta^2), & h = 1 \\ 0, & h > 0. \end{cases}$$

MA(1)-prosessille on siis ominaista, että autokorrelaatiofunktiossa on katkos viipymällä yksi, jolloin yhtä periodia kauempana toisistaan olevat havainnot ovat korreloimattomia ja oletuksen $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$ voimassa ollessa riippumattomia. Viimeksi mainittu ominaisuus on ilmeinen yhtälön (2.2) perusteella.

Kuviossa 2.2 on esitetty kaksi 150:n havainnon simuloitua realisaatiota MA(1)-prosessista, kun $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, 1)$. Kuviossa esitetään myös havainnoista lasketut otosautokorrelaatiofunktiot ja vastaavat teoreettiset autokorrelaatiofunktiot. Molemmissa tapauksissa havainnot vaihtelevat odotusarvonsa (nolla) ympärillä teoreettisen hajontansa (≈ 1.28) mukaisella tavalla. Vasemmalla autokorrelaatio on positiivista, mikä ilmenee siten, että positiivista havaintoa seuraa useimmiten positiivinen havainto. Oikealla negatiivinen autokorrelaatio saa puolestaan positiiviset ja negatiiviset havainnot seuraamaan tyypillisesti toisiaan. Estimoidut autokorrelaatiofunktiot noudattavat varsin hyvin teoreettisia vastineitaan. Erityisesti r_1 ylittää molemmissa tapauk-



Kuvio 2.2. Kaksi MA(1)-prosessista $y_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$, $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, 1)$, simuloitua aikasarjaa ($T = 150$), niiden otosautokorrelaatiofunktiot (keskellä) ja teoreettiset autokorrelaatiofunktiot (alinna) viipymillä $h = 0, \dots, 40$. Vasemmalla $\theta = 0.8$ ja oikealla $\theta = -0.8$.

sisä selvästi oletukseen $\rho_h = 0$ ($\forall h > 0$) perustuvan likimääräisen 95%:n kriittisen rajan, kun taas loput estimoiduista autokorrelaatiokertoimista jäävät useimmiten tämän rajan alapuolelle. Joitakin ”ylimääräisiä” ylityksiä voi 39:n estimaatin joukossa tietysti esiintyä satunnaisvaihtelusta johtuen ja myöhemmin todetaan lisäksi, että MA(1)-prosessin tapauksessa Kuviossa 2.2 käytetyt rajat ovat liian kapeita.

MA(1)-prosessi voidaan yleistää ilmeisellä tavalla lisäämällä muuttujien $\varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-q}$ ($q < \infty$) lineaarikombinaatio yhtälön (2.2) oikealle puolelle. Näin saadaan MA(q)-prosessi, johon palataan myöhemmin.

2.2.2 Yleinen tapaus

Edellisen jakson MA(1)-prosessi ja sen yleistys MA(q)-prosessi ($q < \infty$) ovat erikoistapauksia lineaarisesta prosessista, joka määritellään (tällä kurssilla) yhtälöllä

$$y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2). \quad (2.3)$$

On selvää, että oikean puolen ääretön summalauseke vaatii lisätarkasteluja eikä se voi olla mielekäs, elleivät kertoimet ψ_j toteuta sopivia rajoituksia. Kertoimilta ψ_j vaaditaan ehto

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j^2 < \infty. \quad (2.4)$$

Tällöin yhtälön (2.3) oikealla puolella oleva ääretön summalauseke on hyvin määritelty äärellisen summan $\sum_{j=-n}^n \psi_j \varepsilon_{t-j}$ kvadraattisena raja-arvona ($n \rightarrow \infty$).³ Lisäksi prosessin y_t odotusarvon ja autokovarianssifunktion laskeminen samaan tapaan kuin MA(1)-prosessilla edellisessä jaksossa voidaan perustella huolimatta äärettömästä summasta (matemaattisesti tämä ei ole ilmeistä). Toisin sanoen, oikea tulos saadaan laskemalla formaalisti

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(y_t) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\psi_j \varepsilon_{t-j}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \mathbf{E}(\varepsilon_{t-j}) = 0, \\ \mathbf{Var}(y_t) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{Var}(\psi_j \varepsilon_{t-j}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j^2 \mathbf{Var}(\varepsilon_{t-j}) = \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j^2 \end{aligned}$$

³Määritelmän mukaan satunnaismuuttujajono $\{x_n\}$ konvergoi kvadraattisesti kohti satunnaismuuttujaa x , jos $\mathbf{E}(x^2) < \infty$, $\mathbf{E}(x_n^2) < \infty$, $\forall n$, ja $\mathbf{E}(x_n - x)^2 \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$. Hieman matemaattisemmin ilmaistuna prosessin (2.3) määrittely tarkoittaa, että ehdon (2.4) voimassa ollessa äärellinen summa $\sum_{j=-n}^n \psi_j \varepsilon_{t-j}$ konvergoi kvadraattisesti ($n \rightarrow \infty$) kohti jotain satunnaismuuttujaa, jota on luonteva merkitä symbolilla $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$. Raja-arvon toisen momentin äärellisyys seuraa myös ehdosta (2.4) (perustelut vaativat aineopintotasoa pidemmälle meneviä tietoja kvadraattisesta konvergenssista).

ja, kun $h > 0$,

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(y_t, y_{t+h}) &= \mathbf{E} \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t+h-i} \right) \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathbf{E} (\psi_j \psi_i \varepsilon_{t-j} \varepsilon_{t+h-i}) \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_i \mathbf{E} (\varepsilon_{t-j} \varepsilon_{t+h-i}) \\
&= \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_{j+h},
\end{aligned}$$

jossa on käytetty prosessin ε_t ominaisuuksia (ks. Esimerkki 2.1(i)). Nämä laskelmat osoittavat, että y_t on heikosti stationaarinen. Vahva stationaarisuus seuraa ε_t :n vahvasta stationaarisuudesta (ks. Esimerkki 2.2(i)) ja ominaisuudesta VS4.

Huomaa, että edellä kuten usein myöhemminkin voidaan nollasta poikkeava odotusarvo ottaa huomioon tarkastelemalla prosessia $y_t - \mu$, jossa $\mu = \mathbf{E}(y_t)$.

Mainittakoon, että edellä kuvattu lineaarisen prosessin (2.3) määrittely on mahdollista yleistää tapaukseen, jossa ε_t on mielivaltainen stationaarinen prosessi, jolla on äärelliset toiset momentit. Prosessin ε_t autokorreloituneisuus aiheuttaa kuitenkin sen, että varianssin $\text{Var}(y_t)$ ja autokovarianssien $\text{Cov}(y_t, y_{t+h})$ lausekkeista tulee edellä saatuja monimutkaisempia. Toisaalta, joissakin teoreettisissa tarkasteluissa on kätevää vahvistaa kertoimia ψ_j koskevaa ehtoa (2.4) ja vaatia $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$. Tämä vahvempi ehto pätee myöhemmin tarkasteltavilla samoin kuin useilla muilla (ei kuitenkaan kaikilla) käytännössä paljon sovellettavilla prosesseilla.

Koska edellä määritellyssä lineaarisessa prosessissa on ääretön määrä parametreja, ei siitä saada hyödyllistä tilastollista mallia, ellei kertoimia ψ_j rajoiteta jotenkin. Lineaarinen prosessi on kuitenkin hyödyllinen teoreettinen apuväline, sillä useat käytännössä sovellettavat prosessit ovat sen erikoistapauksia. MA(1)-esimerkin tapaan pätee yleensä $\psi_j = 0$, kun $j < 0$, jolloin yleinen lineaarinen prosessi (2.3) supistuu muotoon

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2). \quad (2.5)$$

Koska nyt y_t ei riipu tulevista ε_t -muuttujista, puhutaan tässä yhteydessä usein *kausaalisesta lineaarisesta prosessista tai kausaalista MA(∞)-prosessista*. Prosessin saamien arvojen oletetaan syntyvän (mahdollisesti) äärettömän monen riippumattoman ja ei-havaittavan satunnaissokin painottuna summana. Erona *ei-kausaaliseen tapaukseen* (2.3) on, että tulevat sokit ε_{t+j} ($j > 0$) eivät vaikuta prosessin nykyiseen arvoon. Oletuksesta (2.4) seuraa, että molemmissa tapauksissa kaukana nykyisyydestä olevien sokkien vaikutus on mitättömän pieni (koska $\psi_j \rightarrow 0$, kun $|j| \rightarrow \infty$).

2.2.3 Toinen yksinkertainen erikoistapaus: AR(1)-prosessi

Yksinkertainen yhden parametrin esimerkki kausaalista lineaarisesta prosessista (2.5) saadaan olettamalla $\psi_j = \phi^j$, jossa ehdon (2.4) täytyminen vaatii rajoituksen $|\phi| < 1$. Koska tällöin $y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}$ ja $\phi y_{t-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{j+1} \varepsilon_{t-1-j}$, toteuttaa näin määritelty prosessi differenssiyhtälön

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2), \quad (2.6)$$

johon prosessin määritelmä tavallisesti perustetaan. Tätä prosessia kutsutaan *ensimmäisen asteen autoregressiiviseksi prosessiksi* eli AR(1) prosessiksi (AR tulee englannin kielen sanoista 'autoregressive'). Tulkinallisena ideana on, että prosessin nykyinen arvo riippuu lineaarisesti edellisen periodin arvosta ja ei-havaittavasta satunnais-sokista tai virhetermistä aivan kuten lineaarisessa mallissa.

Koska AR(1)-prosessi on erikoistapaus lineaarisesta prosessista (2.3), se on vahvasti ja heikosti stationaarinen. Ensimmäiset ja toiset momentit voidaan päätellä edellisessä jaksossa johdetuista yleisistä tuloksista. Odotusarvo on nolla ja varianssille ja kovarianssifunktiolle saadaan lausekkeet

$$\text{Var}(y_t) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{2j} = \sigma^2 / (1 - \phi^2)$$

ja, kun $h > 0$,

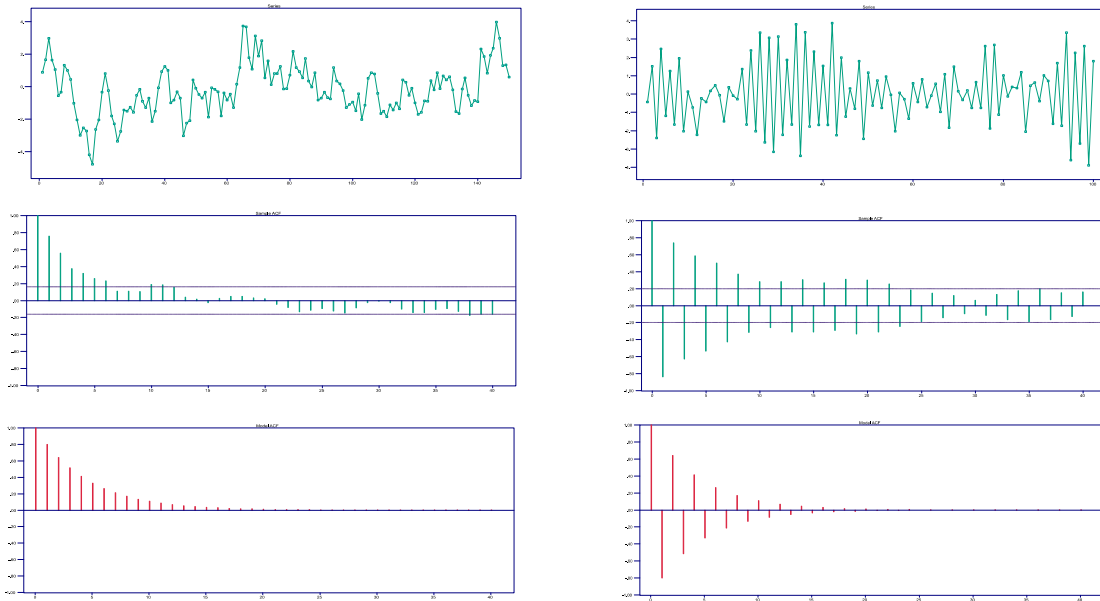
$$\text{Cov}(y_t, y_{t+h}) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \phi^{j+h} = \sigma^2 \phi^h / (1 - \phi^2).$$

Autokorrelaatiofunktio on näin ollen

$$\rho_h = \begin{cases} 1, & h = 0 \\ \phi^h, & h > 0. \end{cases}$$

Toisin kuin MA(1)-prosessin tapauksessa on autokorrelaatiofunktio nolasta poikkeava kaikilla viipymillä (ellei $\phi = 0$). Huomaa kuitenkin, että ehto (2.1) täytyy. Myöhemmin tarkastellaan AR(1)-prosessin yleistystä eli AR(p)-prosessia, joka saadaan lisäämällä muuttujien y_{t-2}, \dots, y_{t-p} ($p < \infty$) lineaarikombinaatio yhtälön (2.6) oikealle puolelle.

Kuviossa 2.3 on esitetty kaksi 150:n havainnon simuloitua realisaatiota AR(1)-prosessista, kun $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, 1)$. Kuviossa esitetään myös havainnoista lasketut otos-autokorrelaatiofunktio ja vastaavat teoreettiset autokorrelaatiofunktio. Stationaarisuuden mukaisesti kuvion aikasarjat vaihtelevat odotusarvonsa (nolla) ympärillä teoreettisen hajontansa (≈ 1.67) mukaisella tavalla. Kun $\phi = 0.8$ (vasemmalla), havaintojen verraten voimakas positiivinen autokorreloituneisuus aiheuttaa kuitenkin sen, että useita peräkkäisiä havaintoja saattaa esiintyä odotusarvon ylä- tai alapuolella.



Kuvio 2.3. Kaksi AR(1)-prosessista $y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim \text{nid}(0, 1)$, simuloitua aikasarjaa ($T = 150$), niiden otosautokorrelaatiofunktiot (keskellä) ja teoreettiset autokorrelaatiofunktiot (alinna) viipymillä $h = 0, \dots, 40$. Vasemmalla $\phi = 0.8$ ja oikealla $\phi = -0.8$.

Tämä antaa aikasarjalle ”tasaisen” ilmeen. Kun $\phi = -0.8$ (oikealla) vaihtelee peräkkäisten havaintojen välisen autokorrelaation suunta viipymän pituuden kasvaessa. Autokorrelaatiokertoimien vaihtelu negatiivisten ja positiivisten arvojen välillä antaa havaitulle aikasarjalle ”sahaavan” ilmeen ja useiden itseisarvoltaan pienten ja suurten havaintojen ryppäitä esiintyy myös. Molemmissa tapauksissa estimoidut autokorrelaatiofunktiot noudattavat varsin hyvin teoreettisia vastineitaan ja useita oletukseen $\rho_h = 0$ ($\forall h > 0$) perustuvan likimääräisen 95%:n kriittisen rajan ylittäviä estimoituja autokorrelaatiokertoimia esiintyy.

Kuten edellä mainittiin, perustetaan AR(1)-prosessin määritelmä tavallisesti yhtälöön (2.6). Lähtien tästä voidaan ehdon $|\phi| < 1$ tarpeellisuutta havainnollistaa peräkkäisillä sijoituksilla. Sijoittamalla yhtälön (2.6) oikealle puolelle $y_{t-1} = \phi y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}$, jossa edelleen $y_{t-2} = \phi y_{t-2} + \varepsilon_{t-2}$, ja jatkamalla näin saadaan yhtälö

$$y_t = \phi^k y_{t-k} + \sum_{j=0}^{k-1} \phi^j \varepsilon_{t-j}.$$

Kun $|\phi| < 1$, johtaa tämä ratkaisuun $y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}$. Tähän liittyen sanotaan ehtoa $|\phi| < 1$ usein AR(1)-prosessin stationaarisuusehdoksi. Nimitys on sikäli harhaanjohtava, että yhtälöllä (2.6) on stationaarinen ratkaisu myös tapauksessa $|\phi| > 1$, mutta

tätä ratkaisua ei voida esittää muodossa (2.5). Kun $|\phi| > 1$, voidaan yhtälö (2.6) kirjoittaa aikaindeksiä t yhdellä kasvattamalla

$$y_t = \phi^{-1}y_{t+1} - \phi^{-1}\varepsilon_{t+1},$$

josta peräkkäisillä sijoituksilla ajassa eteenpäin saadaan kuten edellä

$$y_t = \phi^{-k-1}y_{t+1+k} - \sum_{j=0}^k \phi^{-j-1}\varepsilon_{t+1+j}.$$

Näin päädytään ratkaisuun

$$y_t = - \sum_{j=1}^{\infty} \phi^{-j} \varepsilon_{t+j}.$$

Huomaa, että tähän voidaan päätyä epäoleennaista miinusmerkkiä vaille myös lähtemällä lineaarisesta prosessista (2.3) ja olettamalla $\psi_j = \phi^j$, kun $j < 0$, ja $\psi_j = 0$, kun $j \geq 0$ ($|\phi| > 1$). Tätä yhtälön (2.6) ratkaisua sanotaan ei-kausaaliseksi. Tällaisia ei-kausaalisia AR-prosesseja on alettu soveltaa jonkin verran viime vuosina. Tällä kurssilla rajoitutaan kuitenkin kausaalisiin AR-prosesseihin.

Epästationaarinen AR(1)-prosessi. Kuten edellä esitetyistä tarkasteluista voidaan arvata, ei AR(1)-prosessilla ole stationaarista ratkaisua tapauksessa $|\phi| = 1$. Yhtälöstä (2.6) voidaan johtaa kuitenkin millä tahansa alkuarvolla y_0 yhtälö

$$y_t = \phi^t y_0 + \sum_{j=0}^{t-1} \phi^j \varepsilon_{t-j}, \quad t = 1, 2, \dots$$

Tämä pätee myös, kun $|\phi| = 1$. Olettamalla alkuarvo y_0 riippumattomaksi muuttujista ε_t , $t \geq 1$, seuraa oletuksesta $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$ tulokset

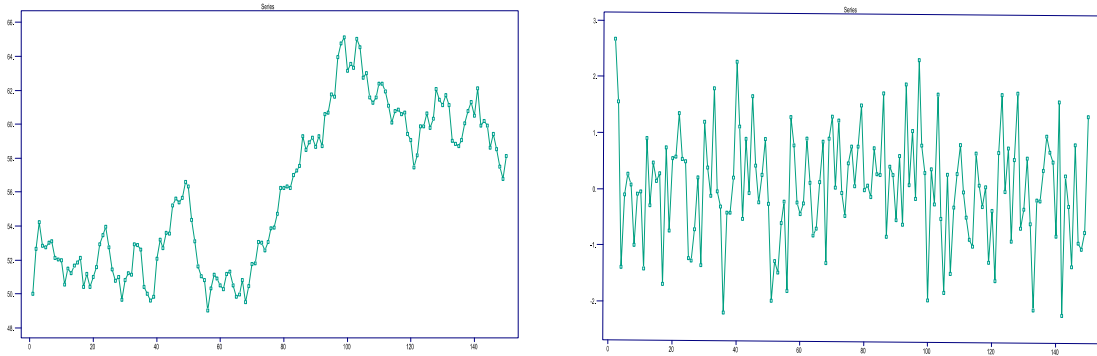
$$\mathbf{E}(y_t) = \phi^t \mathbf{E}(y_0)$$

ja

$$\text{Var}(y_t) = \text{Var}(\phi^t y_0) + \text{Var}\left(\sum_{j=0}^{t-1} \phi^j \varepsilon_{t-j}\right) = \phi^{2t} \text{Var}(y_0) + \sigma^2 \sum_{j=0}^{t-1} \phi^{2j}.$$

Kun $|\phi| = 1$, riippuu y_t :n odotusarvo tai ainakin varianssi selvästikin t :stä olipa y_0 (tai sen jakauma) valittu miten tahansa. Tässä tapauksessa AR(1)-prosessilla ei siten ole stationaarista ratkaisua (huomaa, että tapauksessa $|\phi| < 1$ edellä tarkasteltu kausaalinen stationaarinen ratkaisu saadaan alkuarvolla $y_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{-j}$).

Kun $\phi = 1$ ja $t \geq 1$, kutsutaan AR(1)-prosessia (2.6) *satunnaiskulukseksi* (englanniksi 'random walk'). Nimitys johtuu prosessin realisaatioiden "vaeltelevästä" ilmeestä. Kuvion 2.4 vasemman puoleinen kuva havainnollistaa tätä. Oikean puoleinen kuva



Kuvio 2.4. Satunnaiskulusta simuloitu 150:n havainnon realisaatio (vasemmalla) ja sen differenssi (oikealla), kun $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, 1)$.

havainnollistaa sitä ilmeistä seikkaa, että satunnaiskulun $y_t = y_0 + \sum_{j=0}^{t-1} \varepsilon_{t-j}$ differenssit $y_t - y_{t-1} = \varepsilon_t$ ovat stationaarisia (sama pätee tietysti yleisesti, kun ε_t on stationaarinen). Satunnaiskululla ja sen yleistyksillä on keskeinen asema epästationaaristen aikasarjojen analysoinnissa.

2.2.4 Viivästysoperaattorin käyttö ja ARMA(1,1)-prosessi

Lineaaristen prosessien matemaattinen käsittely helpottuu, kun otetaan käyttöön *viivästysoperaattori* B , joka määritellään mille tahansa prosessille (tai lukujonolle) x_t yhtälöllä $Bx_t = x_{t-1}$. Induktiivisesti määritellään edelleen $B^k x_t = B(B^{k-1} x_t) = x_{t-k}$ ja $B^0 x_t = x_t$. Tässä k voi olla myös negatiivinen, jolloin viivästämisen sijaan prosessia edistetään (esim. $B^{-1} x_t = x_{t+1}$). Viivästysoperaattoria käyttäen voidaan määritellä polynomeja (esim. $\theta(B) = 1 + \theta B$) ja sarjoja (esim. $\psi(B) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j B^j$) ja operoida niillä aivan kuten B :n ollessa reaalinen (tai kompleksinen) suure. Esimerkiksi $M(1)$ -prosessi voidaan kirjoittaa $y_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1} = \theta(B) \varepsilon_t$ ja differenssoitaessa prosessia y_t kahdesti voidaan kirjoittaa $(1 - B)^2 y_t = (1 - B)[(1 - B)y_t] = (1 - B)(y_t - y_{t-1}) = y_t - y_{t-1} - y_{t-1} + y_{t-2} = (1 - 2B + B^2)y_t$.

Käyttäen viivästysoperaattoria voidaan lineaarinen prosessi (2.3) määritellä yhtälöllä

$$y_t = \psi(B) \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2),$$

jossa $\psi(B) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j B^j$. Operaattori $\psi(B)$ ajatellaan usein *lineariseksi suodtimeksi*, joka muuntaa valkoisen kohinan ε_t prosessiksi y_t . Erityisesti kausaalisessa tapauksessa $\psi_j = 0, j < 0$, sanotaan valkoista kohinaa ε_t tähän liittyen usein prosessin y_t *innovaatioksi*.

Myöhemmin tarkastellaan (kausaalisen) lineaarisen prosessin erikoistapausta, jossa suodin $\psi(B)$ on rationaalinen eli $\psi(B) = \theta(B)/\phi(B)$, jossa $\phi(B)$ ja $\theta(B)$ ovat (äärellisasteisia) polynomeja. Yksinkertaisimmassa tapauksessa nämä polynomit ovat astetta yksi eli $\phi(B) = 1 - \phi B$ ja $\theta(B) = 1 + \theta B$. On selvää, että stationaarisuus

vaatii rajoituksia polynomin $\phi(B)$ kertoimille. AR(1)-prosessista todetun perusteella on ilmeistä, että ensimmäisen asteen tapauksessa riittävä ehto on $|\phi| < 1$. Tällöin lineaariseen prosessiin liitetty ehto (2.4) on voimassa ja prosessi $y_t = [\theta(B)/\phi(B)]\varepsilon_t$ on hyvin määritelty. Kertomalla tässä puolittain polynomilla $\phi(B)$ saadaan prosessille esitys $\phi(B)y_t = \theta(B)\varepsilon_t$ eli

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2). \quad (2.7)$$

Näin määriteltyä prosessia sanotaan *ensimmäisen asteen autoregressiiviseksi-liukuvan keskiarvon prosessiksi* eli ARMA(1,1)-prosessiksi. Siinä yhdistetään aiemmin esitetyt AR(1)-prosessi ja MA(1)-prosessi, jotka saadaan erikoistapauksina. Myöhemmin tarkastellaan tämän prosessin yleistystä eli ARMA(p,q)-prosessia, joka saadaan yleistämällä yhtälö (2.7) AR(1)- ja MA(1)-prosessien yhteydessä mainituilla tavoilla.

Yleensä ARMA(1,1)-prosessin lähtökohdaksi otetaan yhtälö (2.7). Stationaarisuuden riittävän ehdon $|\phi| < 1$ voimassa ollessa voidaan prosessin lineaarinen esitys johtaa tällöin ratkaisemalla y_t yhtälöstä (2.7) peräkkäisillä sijoituksilla kuten AR(1)-prosessin tapauksessa tai formaalisti kertomalla yhtälö $\phi(B)y_t = \theta(B)\varepsilon_t$ puolittain $\phi(B)^{-1}$:llä, jolloin saadaan $y_t = [\theta(B)/\phi(B)]\varepsilon_t$. Suotimen $\psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j$ kertoimet voidaan ratkaista helposti yhtälöstä $\psi(B) = \theta(B)/\phi(B)$ ja ARMA(1,1)-prosessin autokorrelaatiofunktio voidaan edelleen johtaa soveltaen yleiselle lineaariselle prosessille edellä johdettua tulosta (yksityiskohdat jätetään tehtäväksi).

2.3 Woldin hajotelma

Tarkastellaan Esimerkin 2.1(ii) heikosti stationaarista prosessia

$$y_t = A \cos(\lambda t) + B \sin(\lambda t), \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

jossa $\lambda \in [0, \pi)$ on vakio ja satunnaismuuttujat A ja B toteuttavat ehdot $E(A) = E(B) = 0$, $\text{Var}(A) = \text{Var}(B) = \sigma^2$ ja $\text{Cov}(A, B) = 0$. Koska

$$y_t + y_{t-2} = A [\cos(\lambda t) + \cos(\lambda(t-2))] + B [\sin(\lambda t) + \sin(\lambda(t-2))],$$

seuraa identiteeteistä

$$\sin(x_1) + \sin(x_2) = 2 \sin((x_1 + x_2)/2) \cos((x_1 - x_2)/2)$$

ja

$$\cos(x_1) + \cos(x_2) = 2 \cos((x_1 + x_2)/2) \cos((x_1 - x_2)/2)$$

tulos $y_t + y_{t-2} = 2 \cos(\lambda) y_{t-1}$ eli

$$y_t = 2 \cos(\lambda) y_{t-1} - y_{t-2}, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Tämä prosessi on sikäli merkillinen, että kun y_{t-1} ja y_{t-2} (ja vakion λ arvo) tunnetaan, voidaan seuraavan periodin arvo y_t ennustaa yksinkertaista lineaarista kaavaa

käyttären ilman minkäänlaista ennustevirhettä. Tällaista prosessia sanotaan *deterministiseksi*. Yleisessä tapauksessa y_t :n ennusteen sallitaan olevan mikä tahansa aikaisempien prosessin arvojen y_{t-1}, y_{t-2}, \dots lineaarinen funktio eli ennuste on muuttujien y_{t-1}, \dots, y_{t-n} lineaarikombinaatio tai tällaisten lineaarikombinaatioiden kvadraattinen raja-arvo, kun $n \rightarrow \infty$. Jos prosessi ei ole deterministinen, sitä sanotaan *ei-deterministiseksi*.

Seuraava kuuluisa tulos osoittaa, että jokainen heikosti stationaarinen ei-deterministinen prosessi voidaan esittää deterministisen prosessin ja kausaalisen MA(∞)-prosessin summana (tuloksen todistus sivuutetaan).

Woldin hajotelma. Jokaisella *heikosti stationaarisella* ei-deterministisellä prosessilla y_t ($t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) on esitys

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} + v_t,$$

jossa (i) $\psi_0 = 1$, $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$, (ii) $\varepsilon_t \sim \text{wn}(0, \sigma^2)$ on satunnaismuuttujien y_t, \dots, y_{t-n} lineaarikombinaatioiden kvadraattinen raja-arvo, kun $n \rightarrow \infty$ (iii) v_t on deterministinen ja (iv) $\text{Cov}(\varepsilon_t, v_s) = 0$ kaikilla t ja s . \square

Tuloksen kohta (iii) tarkoittaa, että prosessia v_t voidaan ennustaa lineaarisesti muuttujien y_{t-1}, y_{t-2}, \dots avulla ilman virhettä. Tästä ja kohdasta (ii) seuraa, että ε_t voidaan tulkita ennustevirheeksi, kun y_t :tä ennustetaan lineaarisesti muuttujien y_{t-1}, y_{t-2}, \dots avulla (eli ennuste on muuttujien y_{t-1}, \dots, y_{t-n} lineaarikombinaatio tai tällaisten lineaarikombinaatioiden kvadraattinen raja-arvo). Prosessi y_t on siten deterministinen jos ja vain jos $\sigma^2 = 0$. Jos $v_t = 0$ sanotaan prosessia y_t *puhtaasti ei-deterministiseksi*.

Kun prosessista y_t havaitaan vain yksi realisaatio, voidaan prosessia v_t käsitellä edellä todetun perusteella ei-satunnaisena ajan funktiona, jolloin sen mallintaminen voidaan tulkita johdannossa mainitun trendin mallintamisena. Yksinkertaisin erikoistapaus prosessista v_t saadaan Esimerkin 2.1(ii) prosessista tapauksessa $\lambda = 0$, jolloin v_t :n realisaatiot ovat vakioita. Tällainen realisaatio voidaan käytännössä tulkita prosessin y_t odotusarvoksi tai sisällyttää siihen. Koska myöhemmin tarkastellaan malleja, joissa ei ole deterministisiä termejä (nollasta poikkeavaa odotusarvoa mahdollisesti lukuun ottamatta), oletetaan $v_t = 0$. Tässä tapauksessa heikosti stationaarisen prosessin mallintaminen kutistuu lineaarisen suotimen $\psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j$ mallintamiseksi, mikä myöhemmin tarkasteltavien ARMA(p,q)-mallien tapauksessa merkitsee suotimen $\psi(B)$ olettamista rationaaliseksi eli $\psi(B) = \theta(B)/\phi(B)$, jossa $\phi(B)$ on astetta p oleva polynomi ja $\theta(B)$ on astetta q oleva polynomi. Koska rationaalifunktiot pystyvät approksimoimaan tehokkaasti mitä tahansa "siistiä" funktiota, antaa tämä varsin hyvän perustan ARMA(p,q)-mallien soveltamiselle.

Woldin hajotelman merkitystä arvioitaessa on syytä huomata, että se koskee heikosti stationaarisia prosesseja ja lineaarista ennustamista. On olemassa (vahvasti) stationaarisia prosesseja, joilla lineaarinen ennustaminen ei ole (keskineliövirheen mielessä) optimaalista. Tällaisilla prosesseilla Woldin hajotelmassa esiintyvä lineaarinen ennustevirhe ε_t ei ole riippumaton (eli iid $(0, \sigma^2)$), vaikka se onkin autokorreloimaton (eli wn $(0, \sigma^2)$). Optimaalisen ennusteen ennustevirhe sen sijaan on riippumaton, mikä merkitsee, että lineaarisessa mallinnuksessa tarkasteltavan prosessin kaikki sattunaispiirteet eivät tule mallinnetuiksi.

2.4 Otoskeskiarvon ja otosautokorrelaatiofunktion ominaisuuksia

Koska otoskeskiarvo ja erityisesti otosautokorrelaatiofunktio ovat keskeisiä apuvälineitä aikasarjojen analysoinnissa, tarkastellaan seuraavassa lyhyesti niiden tilastollisia ominaisuuksia olettaen sekä heikko että vahva stationaarisuus.

Otoskeskiarvolle $\bar{y} = T^{-1} (y_1 + \dots + y_T)$ pätee

$$\mathbb{E}(\bar{y}) = \frac{1}{T} (\mathbb{E}(y_1) + \dots + \mathbb{E}(y_T)) = \mu$$

eli se on odotusarvon $\mu = \mathbb{E}(y_t)$ harhaton estimaattori. Lasketaan seuraavaksi

$$\begin{aligned} \text{Var}(\bar{y}) &= \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T \text{Cov}(y_t, y_s) \\ &= \frac{1}{T^2} \sum_{t-s=-T}^T (T - |t-s|) \gamma_{t-s} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{h=-T}^T \left(1 - \frac{|h|}{T}\right) \gamma_h. \end{aligned}$$

Tässä toisen yhtälön voi todeta huomaamalla, että edeltävä kaksoissumma on matriisin $[\gamma_{t-s}]_{t,s=1,\dots,T}$ alkioiden summa. Asetetaan nyt ehto

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma_h| < \infty,$$

joka on ehtoa (2.1) vahvempi, mutta pätee silti monille sovelluksissa paljon käytetyille prosesseille (vrt. AR(1) ja MA(1)-prosessit edellisessä jaksossa). Tällöin saadaan kolmioepäyhtälön avulla tulos

$$\text{Var}(\bar{y}) = \mathbb{E}(\bar{y} - \mu)^2 \leq \frac{1}{T} \sum_{h=-T}^T \left(1 - \frac{|h|}{T}\right) |\gamma_h| \rightarrow 0, \quad \text{kun } T \rightarrow \infty.$$

Toisin sanoen, otoskeskiarvo on odotusarvon tarkentuva estimaattori.

Jos edellisiä oletuksia täydennetään olettamalla prosessi y_t normaaliseksi, on otoskeskiarvo normaalisti jakautunut ja asymptoottisesti saadaan tulos

$$\sqrt{T}(\bar{y} - \mu) \xrightarrow{d} \mathbf{N}\left(0, \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_h\right) \quad \text{eli} \quad \bar{y} \underset{as}{\sim} \mathbf{N}\left(\mu, \frac{1}{T} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_h\right).$$

Tämä tulos voidaan perustella myös ilman y_t :n normalisuutta. Tässä tarkoitus on vain havainnollistaa sitä, että tavanomainen suurten lukujen laki ja keskeinen raja-arvolause pätevät myös stationaarisille prosesseille ”varsin yleisin oletuksin”. Odotusarvoa μ koskevia testejä ja luottamusvälejä varten täytyy ääretön summa $\sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_h$ estimoida. Sopiva estimaattori on (vrt. varianssin $\text{Var}(\bar{y})$ lauseke edellä) $\sum_{h=-K}^K (1 - |h|/T) c_h$, jossa c_h on aiemmin jaksossa 2.1 määritelty otosautokovarianssikerroin ja K on valittu ”sopivasti” T :tä pienemmäksi (esimerkiksi $K \approx \sqrt{T}$).⁴

Otosautokorrelaatiokertoimien $r_h = c_h/c_0$ tilastollisten ominaisuuksien tarkastelu on monimutkaisempaa kuin otoskeskiarvon, joten yksityiskohdat sivuutetaan. Tarkentuvuus ja asymptoottinen normalisuus voidaan kuitenkin todeta ”varsin yleisin oletuksin”. Asymptoottisen jakauman varianssit ja kovarianssit ovat erikoistapauksia lukuun ottamatta kuitenkin käytännön kannalta varsin hankalia. Mainitaan vain, että tapauksessa $y_t \sim \text{iid}(\mu, \sigma^2)$ pätee

$$(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_H) \underset{as}{\sim} \mathbf{N}(0, T^{-1}I_H), \quad (2.8)$$

jossa I_H ($H \times H$) on yksikkömatriisi. Tämän tuloksen avulla voidaan testata onko havaittua aikasarjaa realistista pitää autokorrelaatiottomana. Koska testattavan hypoteesin voimassa ollessa estimaattorit $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_H$ ovat likimain riippumattomia ja $\mathbf{N}(0, T^{-1})$ -jakautuneita, pätee $\mathbf{P}(|r_h| \geq 1.96/\sqrt{T}) \approx 0.05$, mitä voidaan käyttää yksittäisten otosautokorrelaatioiden suuruuden arvioimiseen. Lisäksi voidaan muodostaa testisuure

$$Q = T \sum_{h=1}^H r_h^2 \underset{as}{\sim} \chi_H^2,$$

jonka suuret arvot ovat kriittisiä. Käytännössä suositetaan yleensä Ljungin ja Boxin ehdottamaa modifioitua testisuuretta

$$Q_{LB} = T(T+2) \sum_{h=1}^H r_h^2 / (T-h) \underset{as}{\sim} \chi_H^2,$$

jonka jakauman on todettu olevan pienissä otoksissa lähempänä χ_H^2 -jakaumaa kuin testisuureen Q jakauman. On selvää, että kummankin testin toimivuus edellyttää, ettei H ole kovin suuri suhteessa havaintojen lukumäärään T .

⁴Koska suurilla h :n arvoilla estimaattorin c_h luotettavuus tulee huonoksi, ei K :ta ole syytä valita suureksi suhteessa T :hen.

Autokorrelaatiofunktio voi paljastaa vain lineaarisen riippuvuuden, mutta ei epälineaarisia riippuvuuksia (poikkeuksena normaaliset prosessit). Esimerkin 2.2(ii) prosessi on esimerkiksi autokorreloimaton, mutta ei riippumaton. Jos oletetaan $E(y_t^4) < \infty$, nähdään tämä konkreettisesti laskemalla neliöidyn prosessin y_t^2 ensimmäinen autokovarianssikerroin, joka on nolasta poikkeava (tapausta $\alpha = 0$ lukuun ottamatta). Rajoitettuna testinä mahdollisen ajassa esiintyvän epälineaarisen riippuvuuden paljastamiseksi voidaan tutkia havaintojen neliöiden autokorreloituneisuutta. Jos $y_t \sim \text{iid}(\mu, \sigma^2)$ ja $E(y_t^4) < \infty$, pätee edellä havaintojen otosautokorrelaatioista sanottu myös neliöityjen havaintojen y_t^2 otosautokorrelaatioihin. Erityisesti tulos (2.8) on voimassa myös neliöityjen havaintojen tapauksessa ja Ljungin ja Boxin testi toimii esitetyllä tavalla, joskin sitä tässä yhteydessä nimitetään yleensä McLeodin ja Lin testiksi. Neliöityjen havaintojen autokorrelaatiot kiinnostavat erityisesti analysoitaessa finanssiaikasarjoja, jotka ovat itsessään usein lähes autokorreloimattomia.

3 ARMA(p,q)-prosessit ja ARIMA(p,d,q)-prosessit

3.1 AR(p)-prosessi

Määritelmä ja stationaarisuus. Kuten edellä kuvattiin, määritellään AR(p)-prosessi yhtälöllä

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2) \quad (3.1)$$

tai käyttäen viivästysoperaattoria ja polynomia $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$ yhtälöllä

$$\phi(B) y_t = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2).$$

Prosessin nykyisen arvon oletetaan siis riippuvan lineaarisesti p :n edellisen periodin arvosta ja ei-havaittavasta satunnaissokista tai virhetermistä (tai innovaatiosta) aivan kuten lineaarisessa mallissa.

Kun $p = 1$, takaa ehto $|\phi_1| < 1$ prosessin stationaarisuuden ja (kausaalisen) MA(∞)-esityksen voimassa olon. Tämä ehto voidaan ilmaista myös vaatimalla, että polynomien $\phi(z)$ juuri eli yhtälön $\phi(z) = 0$ ratkaisu on itseisarvoltaan ykköstä suurempi tai että $\phi(z) \neq 0$, kun $|z| \leq 1$. Tämä ehto takaa (vahvan ja heikon) stationaarisuuden myös yleisessä tapauksessa ja se oletetaan jatkossa, ellei toisin mainita.

AR(p)-prosessin riittävä stationaarisuusehto. Riittävä ehto AR(p)-prosessin (3.1) stationaarisuudelle on, että polynomien $\phi(z)$ ($z \in \mathbb{C}$) juuret sijaitsevat kompleksitasossa yksikköympyrän kehän ulkopuolella tai yhtäpitävästi, että $\phi(z) \neq 0$, kun $|z| \leq 1$.⁵

⁵Kompleksiluvun $z = x + iy$ ($i = \sqrt{-1}$) itseisarvo eli normi on määritelmän mukaan $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Se voidaan samaistaa vektorin (x, y) normin kanssa. Stationaarisuusehdon jälkimmäinen muoto merkitsee siis, että $\phi(z) = 0 \Rightarrow |z| > 1$. Koska $\phi(z)$:n kertoimet ovat reaalisia, ovat kompleksiset juuret toistensa konjugaatteja eli jos $\zeta = x + iy$ on juuri, niin $\bar{\zeta} = x - iy$ on myös juuri.

Kuten aiemmin AR(1)-prosessin yhteydessä todettiin, ei tämä stationaarisuusehto ole välttämätön. Seuraavassa rajoitutaan kuitenkin kausaalisiin prosesseihin, joilla se on myös välttämätön stationaarisuudelle. Tätä ehtoa voidaan havainnollistaa käyttämällä tunnettua matematiikan tulosta (algebran peruslausetta), jonka mukaan polynomi $\phi(z)$ voidaan kirjoittaa tulona (oletetaan $\phi_p \neq 0$)

$$\phi(z) = (1 - \zeta_1^{-1}z) \cdots (1 - \zeta_p^{-1}z),$$

jolloin siis $\phi(\zeta_i) = 0$ ja $|\zeta_i| > 1$. AR(p)-prosessi voidaan siten esittää muodossa $(1 - \zeta_1^{-1}B) \cdots (1 - \zeta_p^{-1}B) y_t = \varepsilon_t$. Jos polynomien $\phi(z)$ juuret ovat reaalisia, voidaan tämä yhtälö jakaa puolittain polynomeilla $(1 - \zeta_i^{-1}B)$, $i = 1, \dots, p$, yksi kerrallaan ja nähdä kuten tapauksessa $p = 1$, että tuloksena saadaan hyvin määritelty lineaarinen prosessi. Tämä menettely voidaan yleistää myös kompleksisten juurien tapaukseen.

Edellä todetun perusteella voidaan tarkasteltava AR(p)-prosessi esittää MA(∞)-prosessina

$$y_t = \phi(B)^{-1} \varepsilon_t = \psi(B) \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j},$$

jossa $\psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j = \phi(B)^{-1}$. Kertoimet ψ_j voidaan ratkaista kertoimien ϕ_1, \dots, ϕ_p funktiona yhtälöstä

$$(1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p) (\psi_0 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \cdots) = 1$$

tulkitsamalla oikea puoli B :n potenssisarjaksi ja asettamalla B^j :n kertoimet yhtälön molemmilla puolilla samoiksi. Ratkaisu jätetään tehtäväksi, mutta todetaan kuitenkin ilmeinen tulos $\psi_0 = 1$.

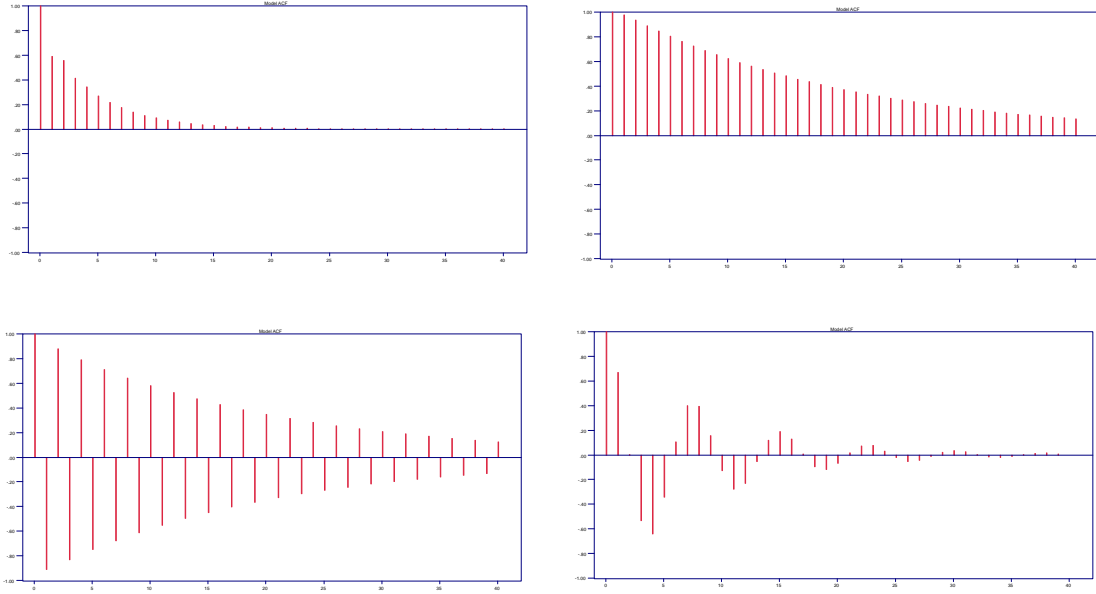
Yhtälön (3.1) määrittelemän AR(p)-prosessin odotusarvo on nolla, mikä ei useinkaan ole käytännössä realistinen oletus. Kuten yleisen lineaarisen prosessin tapauksessa, voidaan nollassa poikkeava odotusarvo ottaa huomioon tarkastelemalla prosessia $y_t - \mu$, jossa $\mu = \mathbf{E}(y_t)$.

Autokorrelaatiofunktio. AR(p)-prosessin autokorrelaatiofunktio voitaisiin johtaa käyttäen prosessin MA(∞)-esitystä ja jaksossa 2.2 esitettyä menettelyä. Seuraava tavallisemmin käytetty ja kätevämpi tapa perustuu prosessin määrittely-yhtälöön (3.1), josta kertomalla puolittain y_{t-h} :lla ($h \geq 0$) ja ottamalla odotusarvo saadaan

$$\mathbf{E}(y_t y_{t-h}) = \phi_1 \mathbf{E}(y_{t-1} y_{t-h}) + \cdots + \phi_p \mathbf{E}(y_{t-p} y_{t-h}) + \mathbf{E}(\varepsilon_t y_{t-h}).$$

Koska y_{t-h} on lineaarinen funktio innovaatioista $\varepsilon_{t-h}, \varepsilon_{t-h-1}, \dots$, ovat y_{t-h} ja ε_t riippumattomia, kun $h > 0$. Tästä seuraa $\mathbf{E}(\varepsilon_t y_{t-h}) = 0$ ($h > 0$). Toisaalta valitsemalla $h = 0$ nähdään, että $\mathbf{E}(\varepsilon_t y_t) = \mathbf{E}(\varepsilon_t^2) = \sigma^2$. Koska $\gamma_h = \gamma_{-h}$, saadaan näin ollen,

$$\gamma_h = \begin{cases} \phi_1 \gamma_1 + \cdots + \phi_p \gamma_p + \sigma^2, & h = 0 \\ \phi_1 \gamma_{h-1} + \cdots + \phi_p \gamma_{h-p}, & h > 0. \end{cases}$$



Kuvio 3.1. AR(2)-prosessin $(1 - \zeta_1^{-1}B)(1 - \zeta_2^{-1}B)y_t = \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$, autokorrelaatiofunktioita ($h = 0, \dots, 40$). Käännettyt juuret $\zeta_1^{-1} = 0.8$, $\zeta_2^{-1} = -0.4$ (vas. ylh.), $\zeta_1^{-1} = 0.95$, $\zeta_2^{-1} = 0.3$ (oik. ylh.), $\zeta_1^{-1} = -0.95$, $\zeta_2^{-1} = 0.3$ (vas. alh.) ja $\zeta_1^{-1} = 1/(0.75 + 0.83i)$, $\zeta_2^{-1} = 1/(0.75 - 0.83i)$, $|\zeta_1^{-1}| = |\zeta_2^{-1}| = 0.89$ (oik. alh.).

Jakamalla tapauksessa $h > 0$ variansilla γ_0 saadaan edelleen

$$\rho_h = \phi_1 \rho_{h-1} + \dots + \phi_p \rho_{h-p}, \quad h > 0, \quad (3.2)$$

joten AR(p)-prosessin autokorrelaatiofunktio toteuttaa samanlaisen differenssiyhtälön kuin prosessi itse. Kun polynomin $\phi(z)$ juuret sijaitsevat kompleksitasossa yksikköympyrän kehän ulkopuolella, tiedetään differenssiyhtälöiden teoriasta, että ratkaisu ρ_h lähestyy viipymän h kasvaessa nollaa eksponentiaalisesti mahdollisesti vaimenevaa sinikäyrää muistuttavalla tavalla. Jaksossa 2.2 esitetty ratkaisu ϕ_1^h on esimerkki edellisestä ja saadaan helposti myös ratkaisemalla differenssiyhtälö (3.2) alkuarvolla $\rho_0 = 1$. Kuviossa 3.1 esitetään joitakin AR(2)-prosessin autokorrelaatiofunktioita polynomin $\phi(z)$ erilaisilla juurikombinaatioilla.

Yule-Walker -yhtälöt. Valitsemalla yhtälössä (3.2) $h = 1, \dots, p$ saadaan yhtälöt ($\rho_0 = 1$ ja $\rho_h = \rho_{-h}$)

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \dots + \phi_p \rho_{p-1} \\ \rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p \rho_{p-2} \\ &\vdots \\ \rho_p &= \phi_1 \rho_{p-1} + \phi_2 \rho_{p-2} + \dots + \phi_p \end{aligned}$$

joita kutsutaan *Yule-Walker -yhtälöiksi*. Ne voidaan esittää matriisimerkinnöin

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{P}\boldsymbol{\phi},$$

jossa $\boldsymbol{\rho} = [\rho_1 \cdots \rho_p]'$, $\boldsymbol{\phi} = [\phi_1 \cdots \phi_p]'$ ja $\mathbf{P} = [\rho_{i-j}]_{i,j=1,\dots,p}$ on $p \times p$ matriisi, jonka rivillä i ja sarakkeella j oleva alkio on ρ_{i-j} . Tästä nähdään, että parametrivektori $\boldsymbol{\phi}$ voidaan ratkaista autokovarianssi- tai autokorrelaatiokertoimien funktiona. Tulokseksi tulee⁶

$$\boldsymbol{\phi} = \mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\Gamma}^{-1}\boldsymbol{\gamma}, \quad (3.3)$$

jossa $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1 \cdots \gamma_p]'$ ja $\boldsymbol{\Gamma} = [\gamma_{i-j}]_{i,j=1,\dots,p} = \gamma_0\mathbf{P}$. Aiemmin todetusta nähdään lisäksi, että myös parametri σ^2 voidaan lausua autokovarianssikertoimien ja parametrien ϕ_1, \dots, ϕ_p funktiona

$$\sigma^2 = \gamma_0 - \phi_1\gamma_1 - \cdots - \phi_p\gamma_p. \quad (3.4)$$

Osittaisautokorrelaatiofunktion käsite. Edellä esitettyjen tarkastelujen avulla voidaan määritellä osittaisautokorrelaatiofunktion käsite. Merkitään yhtälössä (3.3) selvyyden vuoksi $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_p$ ja $\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Gamma}_p$. Tällöin *osittaisautokorrelaatiofunktio* viipymällä h voidaan määritellä yhtälöllä

$$\alpha_h = \begin{cases} 1, & \text{kun } h = 0 \\ \text{vektorin } \boldsymbol{\Gamma}_h^{-1}\boldsymbol{\gamma}_h \text{ viimeinen komponentti,} & \text{kun } h \geq 1. \end{cases}$$

Koska yhtälön (3.3) toinen ja kolmas lauseke voidaan määritellä mille tahansa heikosti stationaarille (ei-deterministiselle) prosessille, pätee sama myös osittaisautokorrelaatiofunktiolle. Aivan yleisesti voidaan lisäksi osoittaa, että α_h on identtinen tavanomaisen osittaiskorrelaatiokertoimen kanssa eli se mittaa satunnaismuuttujien y_t ja y_{t-h} välisen korrelaation suuruutta, kun satunnaismuuttujien $y_{t-1}, \dots, y_{t-h+1}$ lineaarinen vaikutus on eliminoitu. Tästä seuraa erityisesti, että $|\alpha_h| \leq 1$.

AR(p)-prosessin tapauksessa osittaisautokorrelaatiofunktiolla on ilmeinen erityispiirre. Kun $m > p$, voidaan AR(p)-prosessi tulkita AR(m)-prosessiksi, jossa $\phi_{p+1} = \cdots = \phi_m = 0$, joten on selvää, että AR(p)-prosessin osittaisautokorrelaatiofunktiolle pätee

$$y_t \sim \text{AR}(p) \Rightarrow \alpha_p = \phi_p \text{ ja } \alpha_h = 0, \text{ kun } h > p.$$

Toisin sanoen, AR(p)-prosessin osittaisautokorrelaatiofunktiossa on katkos viipymällä p (olettaen $\phi_p \neq 0$).

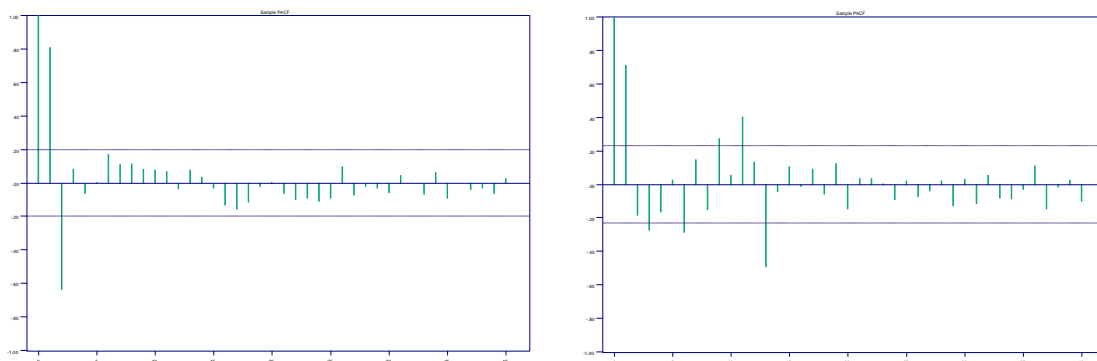
Osittaisautokorrelaatiofunktion otosvastine voidaan määritellä käyttäen vektorin $\boldsymbol{\gamma}_h$ ja matriisin $\boldsymbol{\Gamma}_h$ paikalla ilmeisiä estimaatteja $\mathbf{c}_h = [c_1 \cdots c_h]'$ ja $\mathbf{C}_h = [c_{i-j}]_{i,j=1,\dots,h}$.

⁶On varsin selvää, että käänteismatriisi on olemassa, koska muutoin muuttujien y_{t-1}, \dots, y_{t-p} välillä olisi eksakti lineaarinen riippuvuus, mikä on (tapausta $\sigma^2 = 0$ lukuun ottamatta) mahdotonta. Jakson 3.4 ennustetarkastelut tekevät tämän ilmeiseksi.

Tällöin osittaisautokorrelaatiokertoimen α_h estimaatti $\hat{\alpha}_h$ on 1, kun $h = 1$, ja parametrin ϕ Yule-Walker -estimaatin $\hat{\phi}_{\text{YW}} = \mathbf{C}_h^{-1} \mathbf{c}_h$ viimeinen komponentti, kun $h \geq 1$. Mainittakoon, että estimaattien $\hat{\alpha}_h$, $h = 1, 2, \dots$, laskemiseksi on olemassa rekursiokaavoja, joita käyttäen mahdollisesti suuren matriisin \mathbf{C}_h kääntäminen voidaan välttää (sama pätee myös teoreettisille osittaisautokorrelaatiokertoimille).

Jos havaittu aikasarja on AR(p)-prosessin tuottama, pitäisi sen estimoidun autokorrelaatiofunktion vaimeta viipymän kasvaessa nollaa kohti ilman selvää katkosta ja estimoidussa osittaisautokorrelaatiofunktiossa pitäisi näkyä katkos viipymällä p . Näitä ominaisuuksia voidaan käyttää arvioitaessa olisiko AR(p)-prosessi sopiva malli havaitulle aikasarjalle. Osittaisautokorrelaatiokertoimilla voidaan mahdollisen katkoksen löytämiseksi käyttää hyväksi tulosta, jonka mukaan estimaattorit $\hat{\alpha}_h$, $h > p$, ovat AR(p)-prosessin tapauksessa likimain riippumattomia ja $N(0, T^{-1})$ -jakautuneita. Näin ollen, $P(|\hat{\alpha}_h| \geq 1.96/\sqrt{T}) \approx 0.05$, kun $h > p$, ja toisaalta $\hat{\alpha}_p$ konvergoi estimaattorien $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_p$ tarkentuvuuden perusteella stokastisesti kohti teoreettisen osittaisautokorrelaatiomen arvoa α_p , joka AR(p)-prosessilla poikkeaa nolasta. Tällöin edellä mainittu todennäköisyys lähestyy ykköstä. Estimoidusta osittaisautokorrelaatiofunktioista voidaan siten piirtää samanlainen kuva kuin aikaisemmin autokorrelaatiofunktioista ja liittää siihen tulkinnan helpottamiseksi vaakasuorat kriittiset rajat.

Kuviossa 3.2 on esitetty auringonpilkkusarjan ja onnettomuussarjan estimoidut osittaisautokorrelaatiofunktiot ja edellä mainitut kriittiset rajat (vastaavat otosautokorrelaatiofunktiot on esitetty Kuviossa 2.1). Auringonpilkkusarjan kaksi ensimmäistä estimoitua osittaiskorrelaatiokerrointa $\hat{\alpha}_1$ ja $\hat{\alpha}_2$ ylittävät selvästi kriittisen rajan ja loput eivät, mikä viittaa AR(2)-prosessiin. Kuvion 2.1 otosautokorrelaatiofunktio tukee tätä tulkintaa. Onnettomuussarjan ensimmäinen osittaisautokorrelaatiokerroin on selvästi nolasta poikkeava samoin kuin viipymien 11 ja 13 osittaisautokorrelaatiokertoimet, jotka liittyvät aikasarjan kuvassa ja autokorrelaatiofunktiossa havaittavaan



Kuvio 3.2. Kuvion 1.4 auringonpilkkusarjan estimoitu osittaisautokorrelaatiofunktio (vasemmalla) ja Kuvion 1.2 onnettomuussarjan estimoitu osittaisautokorrelaatiofunktio (oikealla) viipymillä $h = 0, \dots, 40$.

kausivaihteluun. Tässä kuten monissa muissakin kausivaihtelua sisältävissä aikasarjoissa autokorrelaatio- ja osittaisautokorrelaatiofunktiot eivät viittaa kovin selvästi yksittäiseen malliin. AR(13)-prosessi tulee mieleen, mutta sisältää (ilman parametri-rajoitteita) paljon parametreja.

3.2 MA(q)-prosessi

Määritelmä ja stationaarisuus. MA(q)-prosessi määritellään yhtälöllä

$$y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2) \quad (3.5)$$

tai käyttäen viivästysoperaattoria ja polynomia $\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q$ yhtälöllä

$$y_t = \theta(B) \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2).$$

Prosessin nykyisen arvon oletetaan siis riippuvan lineaarisesti nykyisestä ja q :sta edeltävästä ei-havaittavasta satunnaissokista tai virheestä (tai innovaatiosta). Koska MA(q)-prosessi on (kausaalisen) lineaarisen prosessin erikoistapaus, se on aina (sekä heikosti että vahvasti) stationaarinen. Nollasta poikkeava odotusarvo voidaan jälleen ottaa huomioon tarkastelemalla prosessia $y_t - \mu$, jossa $\mu = \mathbf{E}(y_t)$.

Autokorrelaatiofunktio. Edellä määritellyn MA(q)-prosessin autokovarianssifunktioksi saadaan jaksossa 2.2 esitetystä yleisestä tuloksesta

$$\gamma_h = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{j=0}^{q-h} \theta_j \theta_{j+h}, & \text{kun } 0 \leq h \leq q \\ 0, & \text{kun } h > q, \end{cases} \quad (3.6)$$

jossa $\theta_0 = 1$. Autokorrelaatiofunktio saadaan tästä kaavalla $\rho_h = \gamma_h / \gamma_0$. MA(q)-prosessin autokorrelaatiofunktiossa on siis katkos viipymällä q (olettaen, että $\theta_q \neq 0$). Jos otosautokorrelaatiofunktioilla havaitaan vastaava ominaisuus, voidaan MA(q)-prosessia pitää varteen otettavana vaihtoehtona havaitulle aikasarjalle. Arvioitaessa otosautokorrelaatioiden suuruutta ja MA(q)-prosessin sopivuutta voidaan käyttää apuna tulosta, jonka mukaan estimaattorit r_h , $h > q$, ovat MA(q)-prosessin tapauksessa likimain normaalisti jakautuneita odotusarvona nolla ja varianssina $(1 + 2\rho_1^2 + \cdots + 2\rho_q^2) / T$. Jos halutaan testata poikkeako yksittäinen autokorrelaatiokerroin nollasta 5%:n merkitsevyytasolla, tulisi estimaatteja r_h , $h > q$, siten verrata kriittisiin rajoihin $\pm 1.96 \sqrt{\hat{w}_q / T}$, jossa $\hat{w}_q = (1 + 2r_1^2 + \cdots + 2r_q^2)$ (tällöin $P(|r_h| \geq 1.96 \sqrt{\hat{w}_q / T}) \approx 0.05$). Huomaa, että nämä rajat ovat leveämpiä kuin tapauksessa $y_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$, jossa \hat{w}_q :n paikalla on 1.

Käännettävyys. Edellisessä jaksossa nähtiin, että (kausaalisen) AR(p)-prosessin parametrien ϕ ja σ^2 ja autokovarianssifunktion välillä on kääntäen yksikäsitteinen vastaavuus (ks. yhtälöt (3.3) ja (3.4)). MA(q)-prosessilla vastaava tulos ei päde. Esimerkiksi MA(1)-prosessille pätee (merkitään $\theta_1 = \theta$ ja oletetaan $\theta \neq 0$)

$$\gamma_0 = \sigma^2 (1 + \theta^2) = \sigma^2 \theta^2 (1 + 1/\theta^2) \quad \text{ja} \quad \gamma_1 = \sigma^2 \theta = \theta^2 \sigma^2 (1/\theta).$$

Merkitään $\theta^* = 1/\theta$ ja $\sigma_*^2 = \theta^2 \sigma^2$, jolloin $\varepsilon_t^* = \theta \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma_*^2)$. Tällöin edellä todetusta nähdään, että MA(1)-prosesseilla $y_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$ ja $y_t^* = \varepsilon_t^* + \theta^* \varepsilon_{t-1}^*$ on sama autokovarianssifunktio, joten niitä ei voida erottaa toisistaan autokovarianssifunktion avulla. Jos $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$, ovat näiden prosessien koko todennäköisyysstruktuurit erottamattomia, joten parametrien estimointi havaitusta aikasarjasta suurimman uskottavuuden (SU) menetelmällä ei onnistu, ellei menetelmälle ”kerrota” kumpi aineistoon yhtä hyvin sopivista parametrikombinaatioista (θ, σ^2) vai (θ^*, σ_*^2) valitaan. Tämä ongelma ratkaistaan tavallisesti asettamalla ehto $|\theta| < 1$. Normaalisessa tapauksessa (tai autokovariansseihin perustuvissa tarkasteluissa) voidaan ajatella, ettei tämä ehto ole rajoittava, koska parametrikombinaatioista (θ, σ^2) ja (θ^*, σ_*^2) ei voida käytännössä kuitenkaan erottaa toisistaan.⁷ Edellä esitetyt tarkastelut yleistyvät periaatteessa myös MA(q)-prosesseilla.

Kun MA(1)-prosessissa oletetaan $|\theta| < 1$, saadaan yhtälöstä $\varepsilon_t = y_t - \theta \varepsilon_{t-1}$ peräkkäisillä sijoituksilla $\varepsilon_t = y_t - \theta y_{t-1} + \theta^2 \varepsilon_{t-2}$ ja edelleen

$$y_t = - \sum_{j=1}^k (-\theta)^j y_{t-j} - (-\theta)^{k+1} \varepsilon_{t-k-1} + \varepsilon_t.$$

Aivan kuten AR(1)-prosessin stationaarisuutta tarkasteltaessa voidaan todeta, että ehto $|\theta| < 1$ takaa oikealla olevan summan kvadraattisen suppenemisen ja esityksen

$$y_t = - \sum_{j=1}^{\infty} (-\theta)^j y_{t-j} + \varepsilon_t.$$

Tällöin MA(1)-prosessi voidaan siis ”kääntää” AR(∞)-prosessiksi, mikä selittää sen, että ehdon $|\theta| < 1$ voimassa ollessa MA(1)-prosessia kutsutaan *käännettäväksi*.

MA(1)-prosessin käännettävyysehto voidaan ilmaista myös vaatimalla, että polynomin $\theta(z)$ juuri eli yhtälön $\theta(z) = 0$ ratkaisu on itseisarvoltaan ykköstä suurempi tai että $\theta(z) \neq 0$, kun $|z| \leq 1$. Kuten AR(p)-prosessin stationaarisuusehdon tapauksessa takaa tämä ehto käännettävyyden eli AR(∞)-esityksen olemassaolon myös yleisillä MA(q)-prosesseilla.

⁷Jos $|\theta_1| = 1$ tätä ongelmaa ei ole. Yleensä tämä tapaus suljetaan kuitenkin pois, jotta vältetään muilta hankaluuksilta kuten erittäin monimutkaiselta ja tavanomaisesta täysin poikkeavalta estimointiteorialta.

MA(q)-prosessin käännettävyysehto. MA(q)-prosessi on käännettävä, jos polynomin $\theta(z)$ ($z \in \mathbb{C}$) juuret sijaitsevat kompleksitasossa yksikköympyrän kehän ulkopuolella tai yhtäpitävästi, jos $\theta(z) \neq 0$, kun $|z| \leq 1$.

Käännettävyysehdon voimassa ollessa voidaan yhtälöstä $y_t = \theta(B)\varepsilon_t$ ratkaista formaalisti ε_t jakamalla puolittain polynomilla $\theta(B)$. Ratkaisuksi saadaan

$$\pi(B)y_t = \varepsilon_t \quad \text{tai} \quad \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j y_{t-j} = \varepsilon_t,$$

jossa $\pi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j B^j = \theta(B)^{-1}$ ja kertoimet π_j voidaan ratkaista kertoimien $\theta_1, \dots, \theta_q$ funktiona yhtälöstä

$$(1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q)(\pi_0 + \pi_1 B + \pi_2 B^2 + \dots) = 1.$$

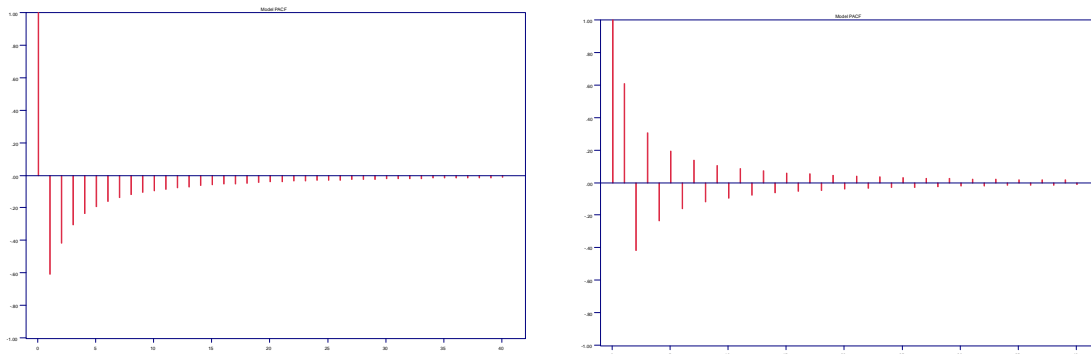
tulkitsemalla oikea puoli B :n potenssisarjaksi ja asettamalla B^j :n kertoimet yhtälön molemmilla puolilla samoiksi. Yksityiskohdat jätetään tehtäväksi, mutta todetaan kuitenkin ilmeinen tulos $\pi_0 = 1$.

Kuten MA(1)-tapauksessakin, takaa käännettävyys sen, että MA(q)-prosessin autokovarianssifunktion ja parametrien $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_q)$ ja σ^2 välille saadaan kääntäen yksikäsitteinen vastaavuus. Tämä vastaavuus on ensimmäisen asteen tapausta lukuun ottamatta melko monimutkainen, joten yksityiskohdat sivuutetaan. Ellei toisin mainita, oletetaan MA-prosessit jatkossa aina käännettäviksi.

Osittaisautokorrelaatiofunktio. Edellisessä jaksossa esitettyä osittaisautokorrelaatiofunktion yleistä määritelmää voidaan soveltaa myös MA(q)-prosessin tapauksessa, mutta laskelmat tulevat hankaliksi. Koska MA(q)-prosessilla on käännettävyyden nojalla AR(∞)-esitys (oletetaan $\theta_q \neq 0$), on AR(p)-prosessin osittaisautokorrelaatiofunktioista todetun perusteella intuitiivisesti selvää, että MA(q)-prosessin osittaisautokorrelaatiofunktiossa ei ole katkosta, vaan se vaimenee nolaa kohti. Voidaan osoittaa, että MA(1)-prosessin osittaisautokorrelaatiofunktio on

$$\alpha_h = -(-\theta_1)^h / (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_1^{2h}).$$

Koska $|\theta_1| < 1$, vaimenee MA(1)-prosessin osittaisautokorrelaatiofunktio nolaaan eksponentiaalisesti viipymän h kasvaessa rajatta. Yleisesti voidaan MA(q)-prosessin osittaisautokorrelaatiofunktion nolaaan vaimenemisen osoittaa tapahtuvan eksponentiaalisesti mahdollisesti vaimenevan sinikäyrän mukaisella tavalla. Kuviossa 3.3 on esitetty kaksi esimerkkiä MA(2)-prosessin osittaisautokorrelaatiofunktioista.



Kuvio 3.3. MA(2)-prosessin $y_t = (1 - \zeta_1^{-1}B)(1 - \zeta_2^{-1}B)\varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$, osittaisautokorrelaatiofunktioita ($h = 0, \dots, 40$). Käännetyt juuret $\zeta_1^{-1} = 0.95$, $\zeta_2^{-1} = 0.3$ (vasemmalla) ja $\zeta_1^{-1} = -0.95$, $\zeta_2^{-1} = -0.3$ (oikealla).

3.3 ARMA(p,q)-prosessi

Määritelmä. ARMA(p,q)-prosessia voidaan luonnehtia yhdistelmäksi AR(p)- ja MA(q)-prosesseista. Prosessin määrittely-yhtälö on

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2), \quad (3.7)$$

joka voidaan esittää viivästysoperaattoria ja polynomeja $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$ ja $\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q$ käyttäen

$$\phi(B) y_t = \theta(B) \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2).$$

Jos $\theta(B) = 1$ (eli $q = 0$), saadaan erikoistapauksena AR(p)-prosessi ja jos $\phi(B) = 1$ (eli $p = 0$), saadaan MA(q)-prosessi.

Kuten AR(p)-tapauksessakin, oletetaan prosessin nykyisen arvon riippuvan lineaarisesti p :n edellisen periodin arvoista. Toisin kuin AR(p)-prosessissa tai lineaarisessa mallissa, ei virhetermi ole nyt kuitenkaan (yleensä) riippumaton satunnaissokki, vaan autokorreloitunut MA(q)-prosessi. Nollasta poikkeava odotusarvo voidaan jälleen ottaa huomioon tarkastelemalla prosessia $y_t - \mu$, jossa $\mu = \mathbf{E}(y_t)$.

Stationaarisuus ja käännettävyys. Jaksossa 2.2 todetun perusteella on selvää, että ARMA(p,q)-prosessilla on hyvin määritelty (kausaalinen) MA(∞)-esitys, jos polynomi $\phi(z)$ toteuttaa AR(p)-prosessin riittävän stationaarisuusehdon (sovelletaan AR(p)-prosessille esitettyä MA(q)-virheiden tapauksessa). Edellisessä jaksossa esitetyn perusteella on niin ikään selvää, että myös ARMA(p,q)-prosessin yhteydessä on relevanttia tarkastella käännettävyyttä ja että esitetty MA(q)-prosessin käännettävyysehto takaa myös ARMA(p,q)-prosessin käännettävyyden. Seuraavassa nämä seikat esitetään vielä kootusti ja ne oletetaan jatkossa, ellei toisin mainita.

ARMA(p,q)-prosessin riittävä stationaarisuusehto. Riittävä ehto ARMA(p,q)-prosessin (3.1) stationaarisuudelle on, että polynomien $\phi(z)$ ($z \in \mathbb{C}$) juuret sijaitsevat kompleksitasossa yksikköympyrän kehän ulkopuolella tai yhtäpitävästi, että $\phi(z) \neq 0$, kun $|z| \leq 1$.

ARMA(p,q)-prosessin käännettävyysehto. ARMA(p,q)-prosessi on käännettävä, jos polynomien $\theta(z)$ ($z \in \mathbb{C}$) juuret sijaitsevat kompleksitasossa yksikköympyrän kehän ulkopuolella tai yhtäpitävästi, jos $\theta(z) \neq 0$, kun $|z| \leq 1$.

Kuten edellä todetusta voidaan päätellä, on ARMA(p,q)-prosessilla stationaarisuusehdon voimassa ollessa MA(∞)-esitys, joksi saadaan kuten AR(p)-tapauksessa

$$y_t = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} \varepsilon_t = \psi(B) \varepsilon_t,$$

jossa $\psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j = \theta(B) / \phi(B)$. Kertoimet ψ_j voidaan ratkaista kertoimien ϕ_1, \dots, ϕ_p ja $\theta_1, \dots, \theta_q$ funktiona asettamalla B^j :n kertoimet samoiksi yhtälössä

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) (\psi_0 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots) = 1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q.$$

Tästä nähdään, että $\psi_0 = 1$, $\theta_1 = \psi_1 - \psi_0 \phi_1$ ja yleisesti

$$\psi_j = \sum_{i=1}^p \phi_i \psi_{j-i} + \theta_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

jossa $\theta_0 = 1$, $\theta_j = 0$, $j > q$, ja $\psi_j = 0$, $j < 0$. Differenssiyhtälöiden teoriasta tiedetään, että tästä ratkaisuksi saatavat kertoimet ψ_j lähestyvät nollaa eksponentiaalisesti, kun $j \rightarrow \infty$ (erikoistapauksessa $p = 1$ tämä nähdään helposti).

Käännettävyysehdon voimassa ollessa saadaan prosessille puolestaan AR(∞)-esitys

$$\frac{\phi(B)}{\theta(B)} y_t = \pi(B) y_t = \varepsilon_t,$$

jossa $\pi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j B^j = \phi(B) / \theta(B)$ ja kertoimet π_j voidaan ratkaista kuten kertoimet ψ_j edellä vaihtamalla polynomien $\phi(B)$ ja $\theta(B)$ roolit. Tulos voidaan esittää yhtälönä

$$\pi_j = - \sum_{i=1}^q \theta_i \pi_{j-i} - \phi_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

jossa $\phi_0 = -1$, $\phi_j = 0$, $j > p$, ja $\pi_j = 0$, $j < 0$. Erityisesti pätee $\pi_0 = 1$ ja, kuten kertoimien ψ_j tapauksessa, $\pi_j \rightarrow 0$ eksponentiaalisesti, kun $j \rightarrow \infty$. Edellisessä jaksossa MA(1)-prosessille esitetyt käännettävyyteen liittyvät periaatteelliset kysymykset yleistyvät myös ARMA(p,q)-prosesseilla. Erityisesti normaalisen prosessin tapauksessa (tai autokovariansseihin perustuvissa tarkasteluissa) käännettävyys ei ole rajoittava oletus.

Identifioituvuusehto. Aikaisemmin (ks. jakso 3.2) käännettävyysehtoa motivoitiin sillä, että se takaa kääntäen yksikäsitteisen vastaavuuden prosessin autokovarianssifunktion ja parametrien välille, mikä on tarpeellista esimerkiksi virhetermin normaalisuusoletukseen perustuvassa SU-estimoinnissa. Yleisen ARMA(p,q)-prosessin tapauksessa käännettävyys ei yksistään takaa tätä. Tarkastellaan yksinkertaisuuden vuoksi ARMA(1,1)-prosessia, jonka lineaarinen esitys on

$$y_t = \frac{1 + \theta_1 B}{1 - \phi_1 B} \varepsilon_t.$$

On selvää, että erikoistapauksessa $\phi_1 = -\theta_1$ oikealla puolella voidaan polynomit supistaa ja saada $y_t = \varepsilon_t$ eli prosessi ei olekaan ”oikeasti” ARMA(1,1), vaan valkoista kohinaa. Tästä seuraa, etteivät parametrit ϕ_1 ja θ_1 ole identifioituvia eikä SU-estimointi toimi, koska menetelmä ei kykene erottamaan toisistaan ehdon $\phi_1 = -\theta_1$ (ja $|\phi_1| < 1$, $|\theta_1| < 1$) toteuttavia parametriarvoja. Yleisesti sama tilanne syntyy aina, kun polynomeilla $\phi(z)$ ja $\theta(z)$ on yhteisiä juuria eli jos kirjoitetaan $\phi(z) = (1 - \zeta_1^{-1}z) \cdots (1 - \zeta_p^{-1}z)$ ja $\theta(z) = (1 - \xi_1^{-1}z) \cdots (1 - \xi_q^{-1}z)$, niin jollain i pätee $\zeta_i = \xi_i$. Syistä, joihin edellä viitattiin, halutaan tämä sulkea pois ja siksi asetetaan seuraava ehto.

ARMA(p,q)-prosessin identifioituvuus- eli yksikäsitteisysehto. Stationaarisen ja käännettävän ARMA(p,q)-prosessin (3.7) polynomeilla $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p$ ja $\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \cdots + \theta_q z^q$ ei ole yhteisiä juuria ja lisäksi $\phi_p \neq 0$ tai $\theta_q \neq 0$.

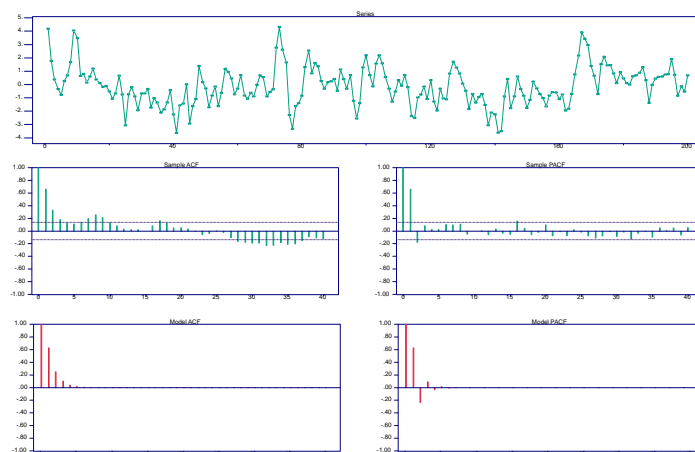
Ehtoa $\phi_p \neq 0$ tai $\theta_q \neq 0$ ei aina mainita erikseen, koska sen (ilmeisesti) tulkitaan sisältyvän juuria koskevaan ehtoon. Ellei toisin mainita, identifioituvuusehto oletetaan jatkossa.

ARMA(p,q)-prosessin autokorrelaatiofunktio. ARMA(p,q)-prosessin autokorrelaatiofunktio voidaan johtaa samaan tapaan kuin AR(p)-prosessin autokorrelaatiofunktio, mutta tulosta ei voida esittää yhtä siististi. Seuraavassa esitetään vain ratkaisun periaate. Kertomalla malliyhtälö (3.7) puolittain y_{t-h} :lla ($h \geq 0$) ja ottamalla odotusarvo saadaan

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(y_t y_{t-h}) &= \phi_1 \mathbf{E}(y_{t-1} y_{t-h}) + \cdots + \phi_p \mathbf{E}(y_{t-p} y_{t-h}) + \mathbf{E}(\varepsilon_t y_{t-h}) \\ &\quad + \theta_1 \mathbf{E}(\varepsilon_{t-1} y_{t-h}) + \cdots + \theta_q \mathbf{E}(\varepsilon_{t-q} y_{t-h}). \end{aligned}$$

Käyttäen MA(∞)-esitystä $y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$ ($\psi_0 = 1$) ja autokovarianssin määritelmää saadaan tästä edelleen

$$\gamma_h = \begin{cases} \phi_1 \gamma_{h-1} + \cdots + \phi_p \gamma_{h-p} + \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \theta_{h+j} \psi_j, & 0 \leq h < \max\{p, q+1\} \\ \phi_1 \gamma_{h-1} + \cdots + \phi_p \gamma_{h-p}, & h \geq \max\{p, q+1\}, \end{cases}$$



Kuvio 3.4. Simuloitu 150:n havainnon aikasarja ARMA(1,1)-prosessista $y_t = 0.4y_{t-1} + \varepsilon_t + 0.4\varepsilon_{t-1}$, $\varepsilon_t \sim \text{nid}(0, 1)$, siitä estimoitu autokorrelaatiofunktio (keskellä vasemmalla) ja osittaisautokorrelaatiofunktio (keskellä oikealla) sekä niiden alapuolella vastaavat teoreettiset autokorrelaatio- ja osittaisautokorrelaatiofunktiot viipymillä $h = 0, \dots, 40$.

jossa $\theta_0 = 1$ ja $\theta_j = 0$, kun $j \notin \{0, \dots, q\}$. Lisäksi kertoimet ψ_j voidaan lausua parametrien ϕ_1, \dots, ϕ_p ja $\theta_1, \dots, \theta_q$ funktioina. Soveltaen differenssiyhtälöiden ratkaisussa käytettäviä menetelmiä voidaan $\max\{p, q + 1\} - p$ ensimmäistä autokovarianssia (myös γ_0) ratkaista ensin parametrien funktiona ensimmäisistä $\max\{p, q + 1\}$ yhtälöistä, minkä jälkeen loput autokovarianssit voidaan ratkaista rekursiivisesti jälkimmäisistä yhtälöistä (yksityiskohdat sivuutetaan). Autokorrelaatiofunktio saadaan tämän jälkeen kaavalla $\rho_h = \gamma_h/\gamma_0$. Koska tämä rekursiivinen ratkaisu saadaan samanlaisesta differenssiyhtälöstä kuin AR(p)-prosessin autokovarianssifunktio, on varsin ilmeistä, että viipymän h kasvaessa rajatta ARMA(p,q)-prosessin autokorrelaatiofunktio vaimenee kohti nollaa eksponentiaalisesti mahdollisesti vaimenevan sinikäyrän mukaisesti (tapauksessa $p = 1$ tämä on helppo todeta).

Koska käännettävyysehdon voimassa ollessa ARMA(p,q)-prosessi voidaan esittää AR(∞)-prosessina, voidaan tästä ja osittaisautokorrelaatiofunktion yleisestä määritelmästä päätellä, että ARMA(p,q)-prosessin osittaisautokorrelaatiofunktio käyttäytyy pääpiirteissään samalla tavalla kuin autokorrelaatiofunktio. Yhteenvedona voidaan siis todeta, että yleisesti ARMA(p,q)-prosessilla ei ole katkosta sen enempää autokorrelaatiofunktiossa kuin osittaisautokorrelaatiofunktiossakaan. Kuviossa 3.4 on esitetty 150:n havainnon simuloitu realisaatiota ARMA(1,1)-prosessista, kun $\phi_1 = \theta_1 = 0.4$ ja $\varepsilon_t \sim \text{nid}(0, 1)$. Kuviossa esitetään myös estimoidut autokorrelaatio- ja osittaisautokorrelaatiofunktiot sekä niiden teoreettiset vastineet. Estimoidut autokorrelaatio- ja osittaisautokorrelaatiofunktiot muistuttavat pääpiirteissään teoreettisia vastineitaan, mutta niiden perusteella oikean prosessin päättelemine ei tunnu helpolta (esimerkiksi AR(2)-prosessi vaikuttaisi mahdolliselta vaihtoehdolta).

3.4 ARMA(p,q)-prosessin ennustaminen

Ehdollisen odotusarvon ominaisuuksia. Ennen ARMA(p,q)-prosessin ennustamista tarkastellaan lyhyesti yleistä ennustetilannetta, jossa (reaalisen) satunnaismuuttujan Y arvoa halutaan ennustaa satunnaisvektorin X saaman arvon $X = x$ avulla. Todennäköisyyslaskennasta tiedetään, että keskineliövirheen mielessä optimaalinen ennuste on Y :n ehdollinen odotusarvo ehdolla $X = x$ eli pätee

$$\mathbf{E} [(Y - \mathbf{E}(Y | X = x))^2] \leq \mathbf{E} [(Y - g(x))^2]$$

olipa $g(x)$ mikä tahansa x :n funktio (tässä odotusarvojen äärellisyys oletetaan). Jatkuvien jakaumien tapauksessa määritellään ehdollinen odotusarvo kaavalla

$$\mathbf{E}(Y | X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y; x) dy = \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{f_{Y,X}(y, x)}{f_X(x)} dy,$$

jossa $f_{Y,X}(y, x)$ on satunnaisvektorin (Y, X) yhteistiheysfunktio, $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y,X}(y, x) dy$ on X :n reunajakauman tiheysfunktio ja $f_{Y|X}(y; x) = f_{Y,X}(y, x) / f_X(x)$ on Y :n ehdollinen tiheysfunktio ehdolla $X = x$.

Kun x vaihtelee yli satunnaisvektorin X mahdollisten arvojen määrittelee x :n funktio $\mathbf{E}(Y | X = x)$ satunnaismuuttujan, josta on luonteva käyttää merkintää $\mathbf{E}(Y | X)$. Kehittyneessä todennäköisyyslaskennassa ehdollinen odotusarvo määritelläänkin suoraan satunnaismuuttujana ja siellä se yleistetään myös tapaukseen, jossa satunnaisvektori X voi olla ääretönulotteinen. Tämä tilanne tulee vastaan seuraavassa, kun ARMA(p,q)-prosessin ennustamista tarkastellaan olettaen, että prosessin $\{y_t, t = 0, \pm 1, \dots\}$ kaikki ennustejankohtaa edeltävät arvot tunnetaan. Ehdollisesta odotusarvosta riittää kuitenkin tietää vain sen tavanomaiset ominaisuudet, jotka pätevät tällöinkin. Tällä kurssilla käytetään erityisesti seuraavia ehdollisen odotusarvon ominaisuuksia.

EO1 $\mathbf{E}(aY_1 + bY_2 | X) = a\mathbf{E}(Y_1 | X) + b\mathbf{E}(Y_2 | X)$, kun a ja b ovat vakioita.

EO2 $\mathbf{E}(Y | X) = \mathbf{E}(Y)$, kun $Y \perp\!\!\!\perp X$.

EO3 $\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}[\mathbf{E}(Y | X)]$ (ns. iteroidun odotusarvon laki)

EO4 $\mathbf{E}[h(X)Y | X] = h(X)\mathbf{E}(Y | X)$ mille tahansa funktiolle h (olettaen, että tulon $h(X)Y$ odotusarvo on äärellisenä olemassa).

ARMA(p,q)-prosessin ennustaminen. Kuten edellä vihjattiin, tarkastellaan ARMA(p,q)-prosessin ennustamista olettaen, että prosessin koko äärettömän pitkä menneisyys tunnetaan. Tällainen oletus on tietenkin epärealistinen. Realistisempi vaihtoehto olisi tarkastella esimerkiksi prosessin arvon y_{T+1} ennustamista, kun käytävissä on havaittu aikasarja y_1, \dots, y_T . Ennustamista voidaan tarkastella myös tällä

tavalla, mutta saatavat ennustekaavat ovat monimutkaisempia (joskin käsitteellisesti yksinkertaisempia). Käytännön kannalta näiden kahden tavan välinen ero on mitätön, ellei havaintojen lukumäärä T ole kovin pieni.

Seuraavassa oletetaan jälleen $\mathbf{E}(y_t) = \mu = 0$, mikä voidaan aina saavuttaa vähentämällä alkuperäisestä prosessista sen odotusarvo. Samoin oletetaan, että tarkasteltava ARMA(p,q)-prosessi (tai sen erikoistapaus) on stationaarinen ja käännettävä ja että sen innovaatio toteuttaa ehdon $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$. Laskelmissa käytetään toistuvasti hyväksi edellä mainittuja ehdollisen odotusarvon ominaisuuksia.

AR(p)-tapaus. Tarkastellaan ensin AR(p)-prosessin ennustamista ja oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että prosessin aste $p = 1$. Yhden askeleen ennustamisessa tarkoitus on ennustaa prosessin arvoa y_{t+1} , kun prosessin edeltävä historia $\{y_t, y_{t-1}, \dots\}$ tunnetaan. Merkitään ehdollista odotusarvoa lyhyesti $\mathbf{E}(y_{t+h} | y_s, s \leq t) = \mathbf{E}_t(y_{t+h})$ ($h \geq 1$). Ottamalla yhtälöstä

$$y_{t+1} = \phi_1 y_t + \varepsilon_{t+1}$$

puolittain ehdolliset odotusarvot saadaan (ks. EO1)

$$\mathbf{E}_t(y_{t+1}) = \phi_1 \mathbf{E}_t(y_t) + \mathbf{E}_t(\varepsilon_{t+1}).$$

Stationaarisuusoletuksen $|\phi_1| < 1$ voimassa ollessa riippuvat y_t, y_{t-1}, \dots vain muuttujista $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots$, joten ehdollisessa odotusarvossa $\mathbf{E}_t(\varepsilon_{t+1})$ ehdollistavana olevat satunnaismuuttujat $\{y_s, s \leq t\}$, ovat riippumattomia ε_{t+1} :stä. Näin ollen (ks. EO2), $\mathbf{E}_t(\varepsilon_{t+1}) = \mathbf{E}(\varepsilon_{t+1}) = 0$ ja, koska $\mathbf{E}_t(y_t) = y_t$ (ks. EO4), saadaan

$$\mathbf{E}_t(y_{t+1}) = \phi_1 y_t.$$

Kun ennustetaan prosessin arvoa y_{t+2} , saadaan samalla tavalla

$$\mathbf{E}_t(y_{t+2}) = \phi_1 \mathbf{E}_t(y_{t+1}) + \mathbf{E}_t(\varepsilon_{t+2}) = \phi_1 \mathbf{E}_t(y_{t+1}) = \phi_1^2 y_t$$

ja induktiivisesti

$$\mathbf{E}_t(y_{t+h}) = \phi_1^h y_t.$$

Yleisen AR(p)-prosessin tapauksessa menetellään vastaavalla tavalla. Ottamalla yhtälöstä

$$y_{t+1} = \phi_1 y_t + \dots + \phi_p y_{t+1-p} + \varepsilon_{t+1}$$

puolittain ehdolliset odotusarvot saadaan samoin perustein kuin tapauksessa $p = 1$ tulokset $\mathbf{E}_t(\varepsilon_{t+1}) = 0$ ja $\mathbf{E}_t(y_{t-j}) = y_{t-j}$ ($j \geq 0$), joten

$$\mathbf{E}_t(y_{t+1}) = \phi_1 y_t + \dots + \phi_p y_{t+1-p}.$$

Kun ennustetaan prosessin arvoa y_{t+2} , saadaan samalla tavalla

$$\mathbf{E}_t(y_{t+2}) = \phi_1 \mathbf{E}_t(y_{t+1}) + \phi_2 y_t + \dots + \phi_p y_{t+2-p},$$

jossa oikealla oleva ehdollinen odotusarvo voitaisiin korvata edellä esitetyllä lausekkeella. Olennaisempaa on kuitenkin huomata, että oikealla ajankohtana t tuntematon y_{t+1} on korvattu ennusteella $\mathbf{E}_t(y_{t+1})$, kun taas ajankohtana t tunnetut y_t, \dots, y_{t+2+p} esiintyvät sellaisenaan. Induktiivisesti on helppo todeta, että tämä yleistyy, kun ennustetaan useampi askel eteenpäin. Yleisesti voidaan ennustekaava siten kirjoittaa

$$\mathbf{E}_t(y_{t+h}) = \phi_1 \mathbf{E}_t(y_{t+h-1}) + \phi_2 \mathbf{E}_t(y_{t+h-2}) + \dots + \phi_p \mathbf{E}_t(y_{t+h-p}), \quad h \geq 1,$$

jossa $\mathbf{E}_t(y_{t+h-j}) = y_{t+h-j}$, kun $h \leq j$. Ennusteet voidaan siis laskea rekursiivisesti aloittaen yhden askeleen tapauksesta $h = 1$ ja edeten yksi kerrallaan tapauksiin $h = 2, h = 3, \dots$

ARMA(p,q)-tapaus. ARMA(p,q)-prosessin ennustaminen sujuu samalla tavalla kuin AR(p)-prosessin ennustaminen. Stationaarisuusehdon voimassa ollessa $y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$, mistä seuraa, että ε_{t+i} , $i \geq 1$, on riippumaton muuttujista $\{y_t, y_{t-1}, \dots\}$. Siten $\mathbf{E}_t(\varepsilon_{t+i}) = \mathbf{E}(\varepsilon_{t+i}) = 0$ kaikilla $i \geq 0$ (ks. EO2) Toisaalta käännettävyysehdon voimassa ollessa $\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j y_{t-j}$, joten $\mathbf{E}_t(\varepsilon_{t-i}) = \varepsilon_{t-i}$ kaikilla $i \geq 0$ (ks. EO4). Ottamalla ehdollinen odotusarvo puolittain ARMA(p,q)-prosessin määrittely-yhtälöstä

$$y_{t+h} = \phi_1 y_{t+h-1} + \dots + \phi_p y_{t+h-p} + \varepsilon_{t+h} + \theta_1 \varepsilon_{t+h-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t+h-q}$$

ja käyttäen edellä mainittuja tuloksia saadaan

$$\mathbf{E}_t(y_{t+h}) = \phi_1 \mathbf{E}_t(y_{t+h-1}) + \dots + \phi_p \mathbf{E}_t(y_{t+h-p}) + \theta_1 \mathbf{E}_t(\varepsilon_{t+h-1}) + \dots + \theta_q \mathbf{E}_t(\varepsilon_{t+h-q}), \quad h \geq 1,$$

jossa $\mathbf{E}_t(y_{t+h-j}) = y_{t+h-j}$, kun $h \leq j$, ja

$$\mathbf{E}_t(\varepsilon_{t+h-j}) = \begin{cases} \varepsilon_{t+h-j}, & \text{kun } h \leq j \\ 0, & \text{kun } h > j. \end{cases}$$

Edellä prosessin parametrit oletettiin (epärealistisesti) tunnetuiksi. Käytännössä tuntemattomat parametrit korvataan tietenkin estimaateilla, jolloin ennusteiden optimaalisuus pätee vain likimääräisesti. Käytännössä joudutaan (AR(p)-tapausta lukuun ottamatta) innovaatiot laskemaan käyttäen havaittua aikasarjaa, joten kaavassa $\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j y_{t-j}$ joudutaan ääretön summa katkaisemaan. Suositumpi vaihtoehto on laskea ε_t differenssiyhtälöstä

$$\varepsilon_t = y_t - \phi_1 y_{t-1} - \dots - \phi_p y_{t-p} - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad t = 1, 2, \dots,$$

jossa alkuarvot y_0, \dots, y_{-p} voidaan olettaa tunnetuiksi ja alkuarvoiksi $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{-q}$ voidaan valita $\varepsilon_0 = \dots = \varepsilon_{-q} = 0$ eli innovaation ε_t (ehdoton) odotusarvo. Kun t on suuri, on näiden alkuarvo-oletusten vaikutus käytännössä mitätön.

Ennusteen luottamusväli. ARMA(p,q)-prosessin ennustamista voidaan tarkastella myös MA(∞)-esityksen avulla. Ottamalla ehdollinen odotusarvo puolittain yhtälöstä

$$y_{t+h} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t+h-j}$$

ja käyttäen edellä mainittuja tuloksia saadaan

$$\mathbf{E}_t(y_{t+h}) = \sum_{j=h}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t+h-j}.$$

Tämä ennustekaava ei ole käytännön kannalta hyödyllinen, mutta sen avulla voidaan tutkia kätevästi ennustevirheen $y_{t+h} - \mathbf{E}_t(y_{t+h})$ ominaisuuksia. Edellä esitetystä yhtälöstä saadaan

$$y_{t+h} - \mathbf{E}_t(y_{t+h}) = \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j \varepsilon_{t+h-j}.$$

Huomaa, että yhden askeleen ennustevirhe on innovaatio ε_{t+1} .

Ottamalla tässä odotusarvo puolittain nähdään, että ennuste $\mathbf{E}_t(y_{t+h})$ on harhaton siinä mielessä, että ennustevirheen odotusarvo on nolla eli $\mathbf{E}[y_{t+h} - \mathbf{E}_t(y_{t+h})] = 0$. Lisäksi voidaan laskea ennustevirheen varianssi, joksi saadaan helpolla laskulla

$$\text{Var}(y_{t+h} - \mathbf{E}_t(y_{t+h})) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2 \equiv \sigma_h^2.$$

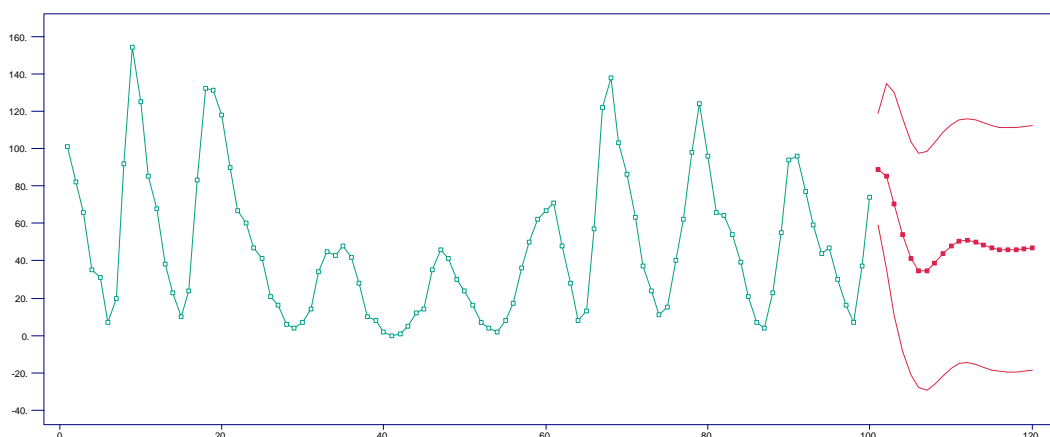
Huomaa, että h :n kasvaessa ennuste lähestyy (kvadraattisesti) nollaa (yleisemmin prosessin odotusarvoa) ja ennustevirheen varianssi σ_h^2 lähestyy ennustettavan prosessin y_t varianssia.

Jos oletetaan $\varepsilon_t \sim \text{nid}(0, \sigma^2)$, niin $y_{t+h} - \mathbf{E}_t(y_{t+h}) \sim \mathbf{N}(0, \sigma_h^2)$, joten y_{t+h} sisältyy väliin $\mathbf{E}_t(y_{t+h}) \pm 1.96\sigma_h$ 95%:n todennäköisyydellä. Käytännössä tuntemattomat parametrit ennusteessa $\mathbf{E}_t(y_{t+h})$ ja hajonnassa σ_h korvataan estimaateilla, jolloin tämä jakaumatulos pätee vain likimääräisesti.

Jaksossa 3.1 todettiin, että AR(2)-prosessi vaikuttaa sopivalta mallilta auringonpilkusarjalle. Yule-Walker menetelmällä (ks. jakso 3.1) saadaan estimoitu malli

$$y_t - 46.93 = 1.32(y_{t-1} - 46.93) - 0.63(y_{t-2} - 46.93) + \varepsilon_t, \quad \sigma^2 = 232.90, \quad (3.8)$$

jossa aikasarjasta on vähennetty otoskeskiarvo. Kuviossa 3.5 on tähän malliin perustuvat 20 ennustetta luottamusrajoineen. Kuviossa nähdään, että ennuste lähestyy ennustehorisontin kasvaessa keskiarvoa 46.93. Ennusteiden luottamusrajat ovat varsin leveät paria ensimmäistä ennustetta lukuun ottamatta.



Kuvio 3.5. Kuvion 1.4 auringonpilkkusarjalle AR(2)-prosessilla (3.8) lasketut 20 ennustetta ja ennusteiden 95%:n luottamusrajat.

3.5 ARIMA(p,d,q)-prosessi

Jaksossa 1 viitattiin siihen, että trendejä sisältäviä epästationaarisia aikasarjoja voidaan analysoida stationaaristen aikasarjojen analysointiin kehitetyillä menetelmillä, jos epästationaarisuus voidaan poistaa muunnoksella, joista suosituin on siirtyminen alkuperäisen aikasarjan muutoksiin eli differensseihin. Kuten jaksossa 2.2 todettiin, ovat satunnaiskulun $y_t = y_0 + \sum_{j=0}^{t-1} \varepsilon_{t-j}$ differenssit $y_t - y_{t-1} = \varepsilon_t$ stationaarisia ja sama pätee, vaikka oletuksen $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$ asemesta ε_t oletetaan vain stationaariseksi. Satunnaiskulku on yksinkertaisin esimerkki ns. ARIMA-prosessista. Lyhennyksen keskimmäinen kirjain viittaa sanaan integroitu, jonka taustalla on yhtälössä $y_t = y_0 + \sum_{j=0}^{t-1} \varepsilon_{t-j}$ esiintyvän summan tulkitseminen ”integraaliksi”.

ARIMA-prosessien esittämistä varten otetaan käyttöön differenssointioperaattori $\Delta = 1 - B$, jota käyttäen voidaan kirjoittaa $y_t - y_{t-1} = \Delta y_t$. Jos prosessi y_t , $t = 0, 1, \dots$, on epästationaarinen, mutta sen differenssi Δy_t on stationaarinen ja käännettävä ARMA(p,q)-prosessi, sanotaan y_t :tä ARIMA(p,1,q)-prosessiksi. Keskimäinen aste 1 viittaa siihen, että stationaarisuus saavutetaan suorittamalla yksi differenssointi. Jos kerran differensoitu prosessi on epästationaarinen, mutta sen toiset differenssit $\Delta^2 y_t = (y_t - y_{t-1}) - (y_{t-1} - y_{t-2})$ noudattavat stationaarista ja käännettävää ARMA(p,q)-prosessia, sanotaan y_t :tä ARIMA(p,2,q)-prosessiksi. Yleisesti sanotaan y_t :tä ARIMA(p,d,q)-prosessiksi, jos siitä saadaan d kertaa differensoimalla stationaarinen ja käännettävä ARMA(p,q)-prosessi eli $\Delta^d y_t \sim \text{ARMA}(p,q)$. Käytännössä tapaus $d = 1$ on ylivoimaisesti yleisin, $d = 2$ esiintyy joskus harvoin ja suuremmat d :n arvot voidaan käytännössä unohtaa. Kun $d = 0$, saadaan erikoistapauksena ARMA(p,q)-prosessi.

On syytä huomata, että ARIMA(p,d,q) prosessi ($d > 0$) täytyy määritellä kiinnittämällä alkujakohta (eli $t = 1$), jolloin y_1 määräytyy alkuarvoista y_0, \dots, y_{1-p-d} ja innovaatioista $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{1-q}$. ARIMA(p,1,q)-prosessin tyypilliset ominaisuudet ovat pääpiirteissään samanlaiset kuin satunnaiskululla. Realisaatioiden ilme on vaelteleva (ks. Kuvio 2.4), mikä selittyy varianssin kasvamisella t :n funktiona ja voimakkaalla autokorreloituneisuudella, vaikkei autokorrelaatiofunktioita voida määritelläkään kuten stationaarisilla prosesseilla. Olettamalla alkuarvo y_0 ei-satunnaiseksi on satunnaiskulun tapauksessa helppo todeta, että $\text{Cor}(y_t, y_{t+h}) = 1/\sqrt{1+h/t}$, joten $\text{Cor}(y_t, y_{t+h}) \rightarrow 1$ kaikilla $h > 0$, kun $t \rightarrow \infty$. Tämä pätee myös yleisemmällä ARIMA(p,d,q)-prosesseilla, joilla otosautokorrelaatiofunktion vaimeneminen nolnaan tapahtuu korkeintaan hitaasti.

Kuten jaksossa 1 mainittiin, ei tällä kurssi tarkastella epästationaaristen aikasarjojen analysointia, joten ARIMA(p,d,q)-prosesseihin ei syvennyttä tämän enempää. Jatkon kannalta on olemaista tietää, että epästationaarinen aikasarja voidaan usein (ei kuitenkaan aina) muuntaa differensoimalla niin, että stationaarisuusoletus on kohtuullinen ja ARMA(p,q)-prosessi siten mahdollinen malli.

4 ARMA-mallien rakentaminen

Tarkastellaan havaittua aikasarjaa y_1, \dots, y_T , joka voidaan (mm. kuvan perusteella) olettaa stationaarisen prosessin tuottamaksi ja jonka mallintaminen jollain ARMA(p,q)-prosessilla tuntuu kohtuulliselta. Kuten aikaisemmin on todettu, saattaa tämä vaatia aikasarjan muuntamista. Tavallisimmat esimerkit muunnoksista ovat differensointi (mahdollisesti logaritmointiin yhdistettynä) ja deterministisen trendin eliminointi PNS-menetelmällä.⁸ Sopivan ARMA(p,q)-prosessin tai, kuten mallintamisen yhteydessä tavallisesti sanotaan, ARMA(p,q)-mallin löytäminen on perinteisesti ajateltu koostuvan seuraavista toisiinsa liittyvistä vaiheista:

- 1) Mallin asteiden p ja q valinta
- 2) Parametrien alustava estimointi
- 3) Parametrien tehokas estimointi
- 4) Estimoidun mallin riittävyuden tutkiminen eli mallin diagnostiikka

Jos estimoitu malli havaitaan vaiheessa 4) puutteelliseksi, on valittava uusi malli (uudet asteet), estimoitava valitun mallin parametrit ja tutkittava estimoidun mallin

⁸Lineaarisen trendin tapauksessa on mallina tällöin $y_t = \alpha + \beta t + x_t$, $t = 1, \dots, T$, jossa virhetermi x_t noudattaa ARMA(p,q)-prosessia. Ideana on estimoida parametrit α ja β pienimmän neliösumman menetelmällä ja siirtyä tarkastelemaan saatavaa residuaalisarjaa. Parametrien estimoinnin kannalta tämä merkitsee trendiparametrien α ja β ja virheen ARMA(p,q)-prosessin parametrien estimoimista erikseen. Vaihtoehtoisesti mallin kaikki parametrit voitaisiin estimoida samanaikaisesti. Tätä menetelyä ei tällä kurssilla tarkastella (lukuun ottamatta erikoistapausta, jossa parametri β rajoitetaan nollassa ja residuaalisarja on $y_t - \bar{y}$).

riittävyttä. Kuten edellä jo mainittiin, liittyvät vaiheet 1) - 4) toisiinsa eikä niitä aina suoriteta erikseen esitetystä järjestyksestä. Tästä syystä ei seuraavassakaan noudateta täysin esitettyä vaiheittaista järjestystä. Esimerkiksi ns. mallinvalintakriteerejä tarkastellaan vasta parametrien alustavan estimoinnin jälkeen, koska niitä voidaan käyttää yhdessä alustavien ja mahdollisesti tehottomien estimointimenetelmien kanssa valittaessa sopivia mallin asteita. Toistaalta alustavia estimointimenetelmiä voidaan käyttää myös valittaessa alkuarvoja numeerisiin menetelmiin perustuvassa parametrien tehokkaassa estimoinnissa. Viime vuosina tapahtunut laskentakapasiteetin tehostuminen on tosin vähentänyt tällaisten alustavien estimointimenetelmien tarvetta eikä niitä nykyisin käytetä aina lainkaan.

Käytännössä ei koskaan voida varmuudella tietää onko mallin oikeita asteita löydetty. Jos asteet valitaan liian pieniksi, jää osa aikasarjan autokorrelaatorakenteesta mallintamatta, mikä on mm. ennustamisen kannalta ilmeisen haitallista. Tämä saattaa johtaa ajattelemaan, että asteet kannattaa valita varmuuden vuoksi niin suuriksi, ettei tätä vaaraa ole. Liian suurten asteiden käyttö aiheuttaa kuitenkin tehottomuutta parametrien estimoinnissa ja, koska ennustettaessa joudutaan käyttämään esimoitua mallia, aiheutuu tästä haittaa ennustetarkkuudelle. Erityisen haitallista on valita mallin molemmat asteet liian suuriksi. Tällöin päädytään malliin, jossa $\phi_p = 0 = \theta_q$ eivätkä mallin parametrit ole identifioituvia eikä niiden mielekäs estimointi ole mahdollista (ks. jakso 3.3). Mm. tästä syystä kannattaa suosia ns. *säästäväisyysperiaatetta* ja pyrkiä valitsemaan mahdollisimman yksinkertainen, mutta kuitenkin riittävä malli.

Seuraavassa mallin virhetermistä oletetaan $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$ ja puhuttaessa SU-estimoinnista oletetaan voimakkaammin $\varepsilon_t \sim \text{nid}(0, \sigma^2)$. Ellei toisin mainita, oletetaan myös stationaarisuus- ja käännettävyysehdot. Kertoimien ϕ_1, \dots, ϕ_p ja $\theta_1, \dots, \theta_q$ lisäksi ARMA(p,q)-mallin parametreja ovat innovaatiovarianssi $E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2$ ja odotusarvo $E(y_t) = \mu$. Seuraavassa odotusarvo estimoidaan yleensä otoskeskiarvolla \bar{y} , minkä jälkeen tarkastellaan keskistettyä aikasarjaa $y_t - \bar{y}$, $t = 1, \dots, T$, ja toimitaan ikään kuin \bar{y} olisi tuntematon μ . Tästä aiheutuvan virheen voidaan osoittaa olevan suurissa otoksissa mitätön. Merkintöjen yksinkertaistamiseksi ei keskistystä aina merkitä näkyviin, vaan oletetaan, että $\mu = 0$ ja että tämä tiedetään.

4.1 Autokorrelaatio- ja osittaisautokorrelaatiofunktion käyttäminen mallin valinnassa

Aikasarjan kuvan piirtämisen jälkeen on hyvä tutkia sen autokorrelaatio-ominaisuuksia estimoidun autokorrelaatio- ja osittaisautokorrelaatiofunktion avulla. Tämä saattaa antaa joissakin tapauksissa vihjeitä sopivista mallin asteista. Estimoidusta autokorrelaatio- ja osittaisautokorrelaatiofunktioista kannattaa erityisesti etsiä mahdollisia katkoksia. Kuten aikaisemmin todettiin, viittaa estimoidusta autokorrelaatiofunktiossa (osittaisautokorrelaatiofunktiossa) esiintyvä katkos MA-prosessiin (AR-prosessiin). Jos

katkoksia ei ole, voidaan epäillä ARMA-prosessia. Vaikka tämä menettely ei usein viittaakaan selvästi yhteen tiettyyn mallin, saattaa se kuitenkin auttaa sulkemaan pois joitakin mallivaihtoehtoja ja olla hyödyksi yhdessä myöhemmin tarkasteltavien mallinvalintakriteerien kanssa.

4.2 Parametrien alustava estimointi

AR(p)-tapaus. Tarkastellaan aluksi AR(p)-mallin parametrien estimointia. Malli voidaan kirjoittaa

$$y_t - \mu = \phi_1(y_{t-1} - \mu) + \cdots + \phi_p(y_{t-p} - \mu) + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2). \quad (4.1)$$

Kuten jaksossa 3.1 todettiin, voidaan parametrivektori $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_p)$ estimoida helposti otosautokovarianssifunktioon perustuvalla Yule-Walker -menetelmällä eli estimaattori on $\tilde{\boldsymbol{\phi}}_{\text{YW}} = \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{c}_p$, jossa \mathbf{c}_p ja \mathbf{C}_p määritellään otosautokovarianssiker-toimien $\mathbf{c}_0, \dots, \mathbf{c}_p$ avulla kuten jaksossa 2.1. Parametrin σ^2 Yule-Walker estimaattori on puolestaan $\tilde{\sigma}_{\text{YW}}^2 = \mathbf{c}_0 - \tilde{\boldsymbol{\phi}}_{\text{YW},1} \mathbf{c}_1 - \cdots - \tilde{\boldsymbol{\phi}}_{\text{YW},p} \mathbf{c}_p$, jossa $\tilde{\boldsymbol{\phi}}_{\text{YW},i}$ on vektorin $\tilde{\boldsymbol{\phi}}_{\text{YW}}$ i . komponentti (ks. yhtälö (3.4)).

Voidaan osoittaa, että

$$\tilde{\boldsymbol{\phi}}_{\text{YW}} \underset{as}{\sim} \mathbf{N}(\boldsymbol{\phi}, T^{-1} \sigma^2 \boldsymbol{\Gamma}_p^{-1}), \quad (4.2)$$

jossa $\boldsymbol{\Gamma}_p = [\gamma_{i-j}]_{i,j=1,\dots,p}$ ja $\tilde{\sigma}_{\text{YW}}^2 \mathbf{C}_p^{-1} \xrightarrow{p} \sigma^2 \boldsymbol{\Gamma}_p^{-1}$.⁹ Koska tämä asymptoottinen jakauma voidaan lisäksi osoittaa samaksi kuin normaalijakaumaan perustuvan SU-estimaattorin asymptoottinen jakauma, on Yule-Walker -estimaattori (tapauksessa $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$) asymptoottisesti tehokas ja siten erittäin hyvä alustavaksi estimaattoriksi. Tulosta (4.2) voidaan lisäksi käyttää likimääräisten testien ja luottamusvälien muodostamiseen tavanomaiseen tapaan (vrt. jaksossa 3.1 esitetty osittaisautokorrelaatiofunktioon perustuva vastaava tulos).

Toinen erittäin hyvä AR(p)-mallin parametrien alustava estimointimenetelmä on PNS-menetelmä. Yhtälöstä (4.1) saadaan yhtälö

$$y_t = \nu + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad t = p+1, \dots, T,$$

jossa $\nu = \mu - \phi_1 \mu - \cdots - \phi_p \mu$. Koska tämä yhtälö muistuttaa lineaarista regressiomallia, tuntuu luontevalta estimoida parameterit $\nu, \phi_1, \dots, \phi_p$ PNS-menetelmällä eli minimoimalla neliösumma

$$S(\nu, \boldsymbol{\phi}) = \sum_{t=p+1}^T (y_t - \nu - \phi_1 y_{t-1} - \cdots - \phi_p y_{t-p})^2.$$

⁹Merkintä \xrightarrow{p} tarkoittaa stokastista konvergenssia eli estimaattorin yhteydessä tarkentuvaa estimaattoria.

Jos $\tilde{\nu}_{PNS}$ ja $\tilde{\phi}_{PNS}$ ovat näin saatuja estimaattoreita, voidaan innovaatiovarianssin σ^2 estimaattoriksi valita $S(\tilde{\nu}_{PNS}, \tilde{\phi}_{PNS}) / (T - p)$ tai $S(\tilde{\nu}_{PNS}, \tilde{\phi}_{PNS}) / (T - 2p - 1)$ aivan kuten tavanomaisessa regressiomallissakin (estimaattorien eksplisiittisistä lausekkeista, ks. lineaaristen mallien kurssi ja alempana esitettävä vastaavanlainen PNS-estimaattori).

Voidaan osoittaa, että PNS-estimaattorilla $\tilde{\phi}_{PNS}$ on sama asymptoottinen jakauma kuin Yule-Walker -estimaattorilla (ks. (4.2)), joten se on asymptoottisesti yhtäpitävä normaalijakaumaan perustuvan SU-estimaattorin kanssa ja siten asymptoottisesti tehokas. Lisäksi voidaan osoittaa, että kaikki tavanomaiset lineaarisen mallin testeihin ja luottamusväleihin liittyvät tulokset ja menetelmät pätevät *likimääräisesti*. PNS-estimaattori poikkeaa SU-estimaattorista vain siinä, että havainnot y_1, \dots, y_p tulkitaan ei-satunnaisiksi vakioiksi eli ehdollistetaan niiden suhteen (perustelu jätetään tehtäväksi). PNS-estimaattorin pienotosominaisuudet on todettu jossain määrin paremmiksi kuin Yule-Walker -estimaattorin, jonka etuna on (stationaariseksi oletetuissa malleissa) puolestaan pidetty sitä, että estimoitu polynomi $\hat{\phi}_{YW}(z)$ toteuttaa riittävän stationaarisuusehdon $\hat{\phi}_{YW}(z) \neq 0, |z| \leq 1$, mikä ei välttämättä päde PNS-estimaattorille (perustelu sivuutetaan).

ARMA(p,q)-tapaus. MA(q)- ja ARMA(p,q)-malleissa ei ole mahdollista käyttää yhtä yksinkertaisia ja samalla tehokkaita estimointimenetelmiä kuin AR(p)-malleissa. Useista ehdotetuista alustavista estimointimenetelmistä tarkastellaan seuraavassa Hannanin ja Rissasen vuonna 1982 ehdottamaa menetelmää.

Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että $E(y_t) = 0$ ja tarkastellaan ARMA(p,q)-mallia (3.7) eli mallia

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2),$$

jossa käännettävyysehto $\theta(z) \neq 0, |z| \leq 1$, oletetaan. Jos viivästetyt innovaatiot $\varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-q}$ tunnettaisiin, voitaisiin menetellä kuten edellä AR(p)-mallin tapauksessa ja estimoida parametrit ϕ_1, \dots, ϕ_p ja $\theta_1, \dots, \theta_q$ yksinkertaisesti PNS-menetelmällä. Hannanin ja Rissasen menetelmän ideana on korvata viivästetyt innovaatiot empiirisillä vastineilla, jotka saadaan seuraavalla tavalla.

Käännettävyysehdon nojalla voidaan ensinnäkin kirjoittaa (ks. jakso 3.3)

$$y_t = - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j y_{t-j} + \varepsilon_t,$$

jossa $\pi_j \rightarrow 0$ eksponentiaalisesti, kun $j \rightarrow \infty$. Havaitulle aikasarjalle saadaan tämän perusteella *approksimatiivinen* malli

$$y_t = - \sum_{j=1}^m \pi_j y_{t-j} + e_t, \quad t = m + 1, \dots, T,$$

jossa $e_t = -\sum_{j=m+1}^{\infty} \pi_j y_{t-j} + \varepsilon_t \approx \varepsilon_t$, kun $m > \max(p, q)$ on ”suuri”. Innovaatioille ε_t saadaan siten empiiriset vastineet käyttämällä PNS- tai Yule-Walker -menetelmää parametrien π_1, \dots, π_m estimoimiseksi ja laskemalla (ilmeisin merkinnöin) residuaalit $\tilde{\varepsilon}_t = y_t + \tilde{\pi}_1 y_{t-1} + \dots + \tilde{\pi}_m y_{t-m}$, $t = m+1, \dots, T$. Tämän jälkeen asetetaan $n = \max\{m+p+1, m+q+1\}$, muodostetaan yhtälö

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \theta_1 \tilde{\varepsilon}_{t-1} + \dots + \theta_q \tilde{\varepsilon}_{t-q} + a_t, \quad t = n, \dots, T, \quad (4.3)$$

ja estimoidaan parametrit $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_p)$ ja $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_q)$ PNS-menetelmällä eli minimoidaan neliösumma

$$\tilde{S}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=n}^T (y_t - \phi_1 y_{t-1} - \dots - \phi_p y_{t-p} - \theta_1 \tilde{\varepsilon}_{t-1} - \dots - \theta_q \tilde{\varepsilon}_{t-q})^2.$$

Parametrille $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta})$, saadaan siten estimaattori (ks. lineaaristen mallien kurssi)

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{HR} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{y},$$

jossa $\mathbf{y} = [y_n \ \dots \ y_T]'$ ja

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} y_{n-1} & \dots & y_{n-p} & \tilde{\varepsilon}_{n-1} & \dots & \tilde{\varepsilon}_{n-q} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{T-1} & \dots & y_{T-p} & \tilde{\varepsilon}_{T-1} & \dots & \tilde{\varepsilon}_{T-q} \end{bmatrix}.$$

Innovaatiovarianssi σ^2 estimoidaan suurella $\tilde{S}(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{HR}) / (T - n)$. Tekemällä edellä esitettyyn ilmeiset muutokset saadaan MA(q)-mallin parametrin $\boldsymbol{\theta}$ estimaattori erikoistapauksena (samoin AR(p)-mallin). Nollasta poikkeava odotusarvo voidaan ottaa huomioon lisäämällä yhtälön (4.3) oikealle puolelle vakio-termi ν kuten edellä AR(p)-mallin PNS-estimoinnin yhteydessä.

Estimaattorin $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{HR}$ toimivuus vaatii ilmeisestikin, että viipymä m valitaan ”tarpeeksi suureksi”, jotta approksimaatio $e_t \approx \varepsilon_t$ pätee ”kohtuullisen hyvin”. Toisaalta on selvää, että m ei saa olla ”liian suuri” suhteessa havaintojen lukumäärään T . Käytännössä sopiva m :n arvo voidaan valita tutkimalla estimoitua osittaisautokorrelaatiofunktioita (vrt. jakso 3.1) tai käyttämällä seuraavassa jaksossa esitettäviä mallinvalintakriteerejä (tai molempia).

On syytä korostaa, ettei estimaattori $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{HR}$ ole (asymptoottisesti) tehokas eivätkä tavanomaiset lineaarisen mallin F - ja t -testit ole (edes asymptoottisesti) päteviä. Estimaattori $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{HR}$ on tarkoitettu käytettäväksi edellä mainittujen mallinvalintakriteerien kanssa sekä tuottamaan alkuarvoja numeerisia menetelmiä vaativassa SU-estimoinnissa.

4.3 Hannanin ja Rissasen mallinvalintamenetelmä

Tavoitteena on valita ARMA(p,q)-mallin asteet p ja q , kun ”riittävän suuret” maksimiasteet p^* ja q^* on kiinnitetty (esimerkiksi estimoitua autokorrelaatio- ja osittaisautokorrelaatiofunktioita apuna käyttäen). Olkoon $\tilde{\sigma}_{p,q}^2$ ($0 \leq p \leq p^*$, $0 \leq q \leq q^*$)

edellisessä jaksossa esitetty Hannanin ja Rissanen estimaattori ARMA(p,q)-prosessin innovaatiovarianssille σ^2 . Oletetaan, että tässä estimointimenetelmässä suure $m > \max(p^*, q^*)$ pidetään samana kaikilla kokeiltavilla p :n ja q :n arvoilla. Koska liian suurien asteiden valintaa on syytä välttää, voitaisiin asteet ajatella valittavan minimoimalla $\tilde{\sigma}_{p,q}^2$ yli arvojen $0 \leq p \leq p^*$, $0 \leq q \leq q^*$. Tämä menettely ei kuitenkaan toimi, sillä se johtaa PNS-menetelmän luonteen vuoksi liian suuriin asteisiin.

Edellä kuvatun ongelman ratkaisemiseksi valitaan asteet minimoimalla funktio

$$C_{HR}(p, q) = \log \tilde{\sigma}_{p,q}^2 + (p + q) g(T) / T, \quad 0 \leq p \leq p^*, 0 \leq q \leq q^*,$$

jossa ns. sakkofunktio $g(\cdot)$ on positiivinen ja $g(T) / T \rightarrow 0$, kun $T \rightarrow \infty$. Sakkofunktion idea on rankaista tarpeettoman laajan mallin käyttämisestä. Jos asteen p tai q kasvattaminen ei pienennä estimaattorin $\tilde{\sigma}_{p,q}^2$ arvoa tarpeeksi, ei laajempaa mallia valita. Tunnettuja eri periaatteilla johdettuja sakkofunktioita ovat

$$\begin{aligned} \text{AIC: } & g(T) = 2 && (\text{Akaike, 1974}) \\ \text{HQ: } & g(T) = 2 \log(\log T) && (\text{Hannan ja Quinn, 1979}) \\ \text{BIC: } & g(T) = \log T && (\text{Schwarz, 1978, Rissanen, 1978}). \end{aligned}$$

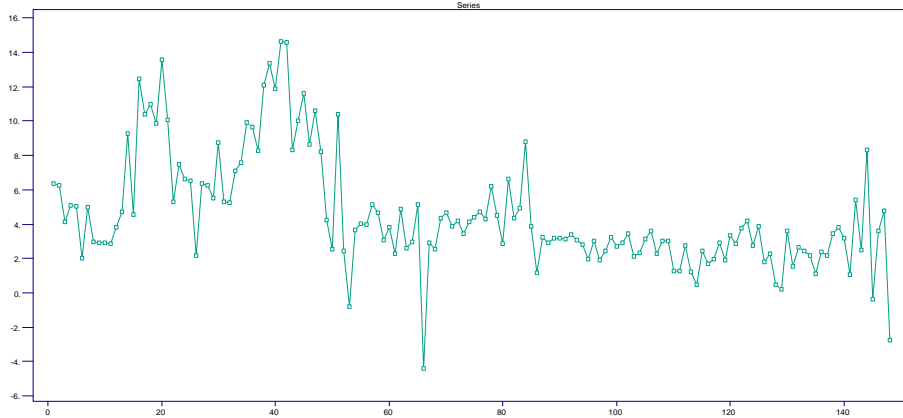
Näistä ensimmäinen sakottaa vähiten (suosii laajempia malleja) ja viimeinen eniten (suosii suppeampia malleja). Mainittakoon, että kriteerifunktiosta HQ on myös versioita, joissa vakion 2 paikalla on joku muu vakio.

Käytännössä on suositeltavaa käyttää edellä kuvattua menettelyä vain yhtenä mallin valinnan apuvälineenä eikä valita mallia minimoimalla kriteerifunktiota $C(p, q)$ mekaanisesti. Lopullinen valinta on aina syytä tehdä tehokkaan estimoinnin ja riittävyystarkastelujen jälkeen (mallin ennustekykyä voidaan myös tutkia). Erityisesti hankalissa tapauksissa kannattaa tarkastella vaihtoehtoja, joissa p ja q ovat yhtä suurempia kuin kriteerifunktion minimoivassa mallissa (muistaen kuitenkin, että molempien valinta liian suureksi johtaa identifiointiongelmiin, kuten jakson 4 alussa todettiin). Muutama pienimmän kriteerifunktion arvon saanut malli voidaan myös valita lähemmän tarkastelun kohteeksi ja yhtä useampaa sakkofunktiota voidaan tarkastella samanaikaisesti.

Jaksossa 3.1 todettiin, että osittaisautokorrelaatiofunktion perusteella AR(2)-malli vaikuttaa sopivalta auringonpilkkusarjalle (ks. Kuvio 3.2). Hannanin ja Rissanen menetelmä valinnoilla $m = 10$ ja $p^* = q^* = 4$ johtaa kaikilla edellä mainituilla kolmella sakkofunktiolla kuitenkin laajempaan ARMA(2,1)-malliin.

Tarkastellaan toisena esimerkkinä USA:n neljännesvuosittaista inflaationsarjaa ajanjaksolta 1970I - 2006IV ($T = 148$). Havainnot on muodostettu kuluttajien hintaindeksistä, josta indeksin julkaisija on puhdistanut kausivaihtelun.¹⁰ Kuviossa 4.1 on

¹⁰Perinteisesti kausipuhdistuksessa on oletettu, että havaittu aikasarja voidaan esittää kolmen komponentin summana $y_t = m_t + s_t + x_t$, jossa m_t on trendikomponentti, s_t on kausivaihtelukomponentti ja x_t on satunnaiskomponentti. Trendikomponentti ja kausivaihtelukomponentti on perin-



Kuvio 4.1. USAn neljännesvuosittainen inflaatioasarja ajanjaksolta 1970I - 2006IV. Alkuperäisen kausipuhdistetun kuluttajien hintaindeksin logaritmiset differenssit kerrottuna neljälläsadalla.

esitetty analyysissa käytettävä inflaatioasarja, joka on 400 kertaa kausipuhdistetun hintaindeksin logaritminen differenssi. Neljälläsadalla kertomisen jälkeen logaritmiset differenssit voidaan tulkita vuositasolle skaalatuiksi prosentuaalisiksi muutoksiksi. Sarjan alkupuoli näyttää hieman erilaiselta kuin loppupuoli, mutta stationaarisuus tuntuu kuitenkin melko kohtuulliselta oletukselta. Kuviossa 4.2 esitetty estimoitu autokorrelaatiofunktio vaimenee viipymän pituuden kasvaessa, kun taas estimoidussa osittaisautokorrelaatiofunktiossa on varsin selvä katkos viipymällä kolme. Autokorrelaatio- ja osittaisautokorrelaatiofunktio viittaavat siten AR(3)-malliin. Tässä tapauksessa myös Hannanin ja Rissanen menetelmä valinnoilla $m = 10$ ja $p^* = q^* = 4$ johtaa AR(3)-malliin kaikilla edellä mainituilla kolmella sakkofunktiolla (sama tulos saadaan myös valinnoilla $m = 10$ ja $p^*, q^* = 5, \dots, 9$).

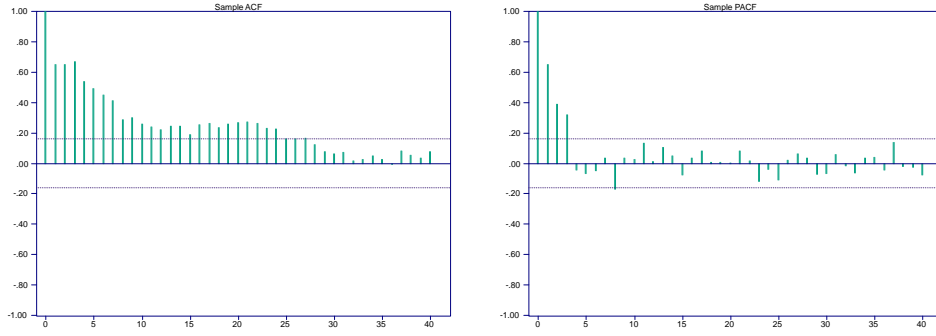
4.4 Parametrien tehokas estimointi

Uskottavuusfunktio. Tarkastellaan *normaalista* ARMA(p,q)-prosessia

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad \varepsilon_t \sim \text{nid}(0, \sigma^2)$$

ja oletetaan, että stationaarisuus- ja käännettävyysehdon lisäksi myös identifioituvuusehto on voimassa (ks. jakso 3.3). Olkoon $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_T)$ tästä prosessista saatu havaintovektori. Merkitään jälleen $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_p)$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_q)$ ja $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta})$. Lineaarisen prosessin odotusarvon ja autokovarianssifunktion yleisistä lausekkeista nähdään (ks. jakso (2.2)), että $\mathbf{E}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$ ja $\text{Cov}(\mathbf{y}) = \sigma^2 \boldsymbol{\Sigma}$, jossa (positiivisesti definitti) matriisi $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\beta})$ ($T \times T$) on parametrin $\boldsymbol{\beta}$ (muttei parametrin σ^2) funktio.

teisesti estimoitu käyttäen erilaisia liukuvia (painotettuja) keskiarvoja, joissa yhteenlaskettavien lukumäärä riippuu kausivaihtelujakson pituudesta. Jos \hat{s}_t on estimoitu kausivaihtelukomponentti, niin kausipuhdistettu sarja on $y_t - \hat{s}_t$.



Kuvio 4.2. Kuvion 4.1 inflaatio-sarjan estimoitu autokorrelaatiofunktio (vasemmalla) ja osittaisautokorrelaatiofunktio (oikealla) viipymillä $h = 0, \dots, 40$.

Koska normaalisuus säilyy (myös lineaarisen prosessin tyyppisissä ääretönulotteisissa) lineaarisissa muunnoksissa, pätee $\mathbf{y} \sim \mathbf{N}(0, \sigma^2 \mathbf{\Sigma})$.¹¹ Satunnaisvektorin \mathbf{y} tiheysfunktio on

$$f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) = (2\pi)^{-T/2} \det(\sigma^2 \mathbf{\Sigma})^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{y}' \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{y} \right\}.$$

Tässä voidaan determinantin tunnetun ominaisuuden nojalla kirjoittaa $\det(\sigma^2 \mathbf{\Sigma}) = \sigma^{2T} \det(\mathbf{\Sigma})$, joten log-uskottavuusfunktioksi saadaan

$$l(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) = -\frac{T}{2} \log \sigma^2 - \frac{1}{2} \log \det(\mathbf{\Sigma}(\boldsymbol{\beta})) - \frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{y}' \mathbf{\Sigma}(\boldsymbol{\beta})^{-1} \mathbf{y}.$$

Koska matriisi $\mathbf{\Sigma}(\boldsymbol{\beta})$ on varsin monimutkainen funktio parametrusta $\boldsymbol{\beta}$, ei uskottavuusfunktiota voida esittää yksinkertaisessa muodossa, joten edellä esitettyä lauseketta on hankala käyttää suoraan uskottavuusfunktion maksimoimisessa. Käytännössä uskottavuusfunktio joudutaan maksimoimaan numeerisia menetelmiä käyttäen, mikä vaatii kääntematriisin $\mathbf{\Sigma}(\boldsymbol{\beta})^{-1}$ ja determinantin $\det(\mathbf{\Sigma}(\boldsymbol{\beta}))$ laskemisen, kun parametrin $\boldsymbol{\beta}$ arvo on annettu. Annetulla $\boldsymbol{\beta}$:n arvolla $\mathbf{\Sigma}(\boldsymbol{\beta})$ voidaan laskea kuten jaksossa 3.3 kuvattiin.

Kirjallisuudessa on esitetty useita algoritmeja edellä kuvatun maksimointitehtävän ratkaisemiseksi. Yksi näistä perustuu positiivisesti definiitin matriisin ns. Cholesky-hajotelman käyttöön. Soveltaen tätä hajotelmaa matriisiin $\mathbf{\Sigma}$ saadaan

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{C}\mathbf{C}',$$

jossa $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ ($T \times T$) on alakolmiomatriisi (eli $c_{ij} = 0$, $i < j$) ja toteuttaa $c_{ii} > 0$, $i = 1, \dots, T$. Kun parametrin $\boldsymbol{\beta}$ arvo on annettu, voidaan tämä hajotelma

¹¹Nollasta poikkeava odotusarvo voidaan jälleen ottaa huomioon vähentämällä havainnoista otoskeskiarvo (tai yleisemmin PNS-menetelmällä estimoitu trendisuora tai kausivaihtelukomponentti) ilman, että tämä vaikuttaa parametrien $\boldsymbol{\beta}$ ja σ^2 SU-estimaattorien asympotoottisiin ominaisuuksiin.

muodostaa nykyisillä laskentamenetelmillä helposti. Sama pätee matriisiin \mathbf{C} kääntämiseen sen alakolmiorakenteen vuoksi (kääntäminen on laskennallisesti analogista lineaarisen yhtälön $\mathbf{a} = \mathbf{Cz}$ ratkaisemisen kanssa, mikä voidaan suorittaa rekursiivisesti). Koska lisäksi pätee $\det(\mathbf{C}) = c_{11} \cdots c_{TT}$, voidaan log-uskottavuusfunktio kirjoittaa

$$l(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) = -\frac{T}{2} \log \sigma^2 - \sum_{t=1}^T \log c_{tt}(\boldsymbol{\beta}) - \frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{S}(\boldsymbol{\beta}), \quad (4.4)$$

jossa $\mathbf{S}(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{y}'\mathbf{C}(\boldsymbol{\beta})'^{-1}\mathbf{C}(\boldsymbol{\beta})^{-1}\mathbf{y}$ ja matriisin \mathbf{C} riippuvuus parametrusta $\boldsymbol{\beta}$ on merkitty näkyviin.

Kuten lineaarisen mallin (tai päättelyn kurssilla normaalimallin) tapauksessa nähdään, että annetulla $\boldsymbol{\beta}$:n arvolla log-uskottavuusfunktio $l(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2)$ maksimoituu, kun $\sigma^2 = T^{-1}\mathbf{S}(\boldsymbol{\beta})$. Jos $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ ja $\hat{\sigma}^2$ ovat parametrien $\boldsymbol{\beta}$ ja σ^2 SU-estimaatteja, pätee siten

$$\hat{\sigma}^2 = T^{-1}\mathbf{S}(\hat{\boldsymbol{\beta}}).$$

Lisäksi, parametrin $\boldsymbol{\beta}$ SU-estimaatti $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ saadaan maksimoimalla logaritmoitu profiili-uskottavuusfunktio

$$l_p(\boldsymbol{\beta}) = -\frac{T}{2} \log \mathbf{S}(\boldsymbol{\beta}) - \sum_{t=1}^T \log c_{tt}(\boldsymbol{\beta}).$$

Profiiliuskottavuusfunktion maksimointi suoritetaan lähtemällä jostain alkuarvosta $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(0)}$ (esim. Hannanin ja Rissasen menetelmällä lasketusta estimaatista) ja edeten iteraatiivisesti arvoihin $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(1)}, \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(2)}, \dots$, jotka (toivottavasti) konvergoivat SU-estimaattiin $\hat{\boldsymbol{\beta}}$. Yleinen iteraatiokaava on tyyppiä

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i+1)} = \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)} + a^{(i)}\mathbf{d}^{(i)}.$$

Tässä $\mathbf{d}^{(i)}$ on ns. suuntavektori eli se osoittaa mihin suuntaan i :nnen askeleen estimaattia $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)}$ muutetaan ja (skalaari) $a^{(i)}$ on ns. askelpituus, joka määrää muutoksen suuruuden ja jonka algoritmi valitsee siten, että ehto $l_p(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i+1)}) \geq l_p(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)})$ toteutuu. Esimerkiksi tunnetussa Newton-Raphson -menetelmässä suuntavektori on $\mathbf{d}^{(i)} = -\left(\partial^2 l_p(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)})/\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}'\right)^{-1} \partial l_p(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)})/\partial\boldsymbol{\beta}$.¹² Koska profiiliuskottavuusfunktion $l_p(\boldsymbol{\beta})$ arvon laskeminen ei nykyisin ole hankalaa, voidaan tässä esiintyville osittaisderivaatoille laskea helposti numeeriset approksimaatiot.

¹²Tämä voidaan motivoida Taylorin approksimaatiolla

$$l_p(\boldsymbol{\beta}) \approx l_p(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)}) + (\partial l_p(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)})/\partial\boldsymbol{\beta}')(\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)})' \left(\partial^2 l_p(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)})/\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}'\right) (\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)}),$$

jonka maksimointi erotuksen $\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)}$ suhteen tuottaa tulokseksi mainitun $\mathbf{d}^{(i)}$:n.

Tilastollinen päättely. Voidaan osoittaa, että stationaarisuus-, käännettävyyys- ja identifioituvuusehtojen voimassa ollessa tavanomaiset SU-estimaattorien asymptootiset tulokset pätevät, joten estimaattorit $\hat{\beta}$ ja $\hat{\sigma}^2$ ovat tarkentuvia ja asymptoottisesti normaalisia. Lisäksi ne ovat asymptoottisesti riippumattomia. Erityisesti pätee

$$\hat{\beta}_{as} \sim \mathbf{N}(\beta, \mathbf{V}(\beta)^{-1}), \quad (4.5)$$

jossa matriisi $\mathbf{V}(\beta) = \mathbf{E}[-\partial^2 l(\beta, \sigma^2)/\partial\beta\partial\beta']$ on parametrin β Fisherin informaatiomatriisi (josta σ^2 supistuu odotusarvon ottamisen myötä pois). Nämä tulokset pätevät myös ilman normaalisuusoletusta, joskaan estimaattorit eivät tällöin ole (asymptoottisesti) tehokkaita. Toisaalta stationaarisuus-, käännettävyyys- ja identifioituvuusehdot vaaditaan tulokseen (4.5), joka voi tuottaa kehnon approksimaation myös silloin, kun nämä ehdot ovat ”lähellä rikkoontua”.

Voidaan osoittaa, että AR(p)-mallin tapauksessa (eli $q = 0$) tulos (4.5) pätee, kun $\mathbf{V}(\beta) = \mathbf{V}(\phi) = T\sigma^{-2}\mathbf{\Gamma}_p$ (eli sama kuin Yule-Walker - ja PNS-estimaattorilla) ja MA(q)-mallin tapauksessa (eli $p = 0$), kun $\mathbf{V}(\beta) = \mathbf{V}(\theta) = T\sigma^{-2}\mathbf{\Gamma}_q^*$, jossa $\mathbf{\Gamma}_q^* = [\gamma_{i-j}^*]_{i,j=1,\dots,q}$ ja γ_h^* on AR(q)-prosessin $\theta(B)y_t^* = \varepsilon_t$ ($\varepsilon_t \sim \text{nid}(0, \sigma^2)$) autokovarianssifunktio. Edelleen, jos määritellään AR(p)-prosessi $\phi(B)y_t^+ = \varepsilon_t$ ja vektori $\mathbf{x} = (y_1^+, \dots, y_p^+, y_1^*, \dots, y_q^*)$, niin ARMA(p,q)-mallin tapauksessa tulos (4.5) pätee, kun $\mathbf{V}(\beta) = T\sigma^{-2}\text{Cov}(\mathbf{x})$.

Käyttäen matriisin $\mathbf{V}(\beta)$ empiiristä vastinetta $\hat{\mathbf{V}}(\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2) = -\partial^2 l(\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2)/\partial\beta\partial\beta'$ eli parametrin β havaittua informaatiomatriisia voidaan tulokseen (4.5) perustuvan Waldin testin avulla testata parametria β koskevia hypoteeseja tilastollisen päättelyn kurssilla esitetyllä tavalla (osittaisderivaatoille voidaan jälleen käyttää numeerisesti laskettuja approksimaatioita). Erityisesti matriisin $\hat{\mathbf{V}}(\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2)^{-1}$ diagonaalialkioiden neliöjuuria voidaan käyttää estimaattorin $\hat{\beta}$ komponenttien likimääräisinä keskivirheinä ja tulkita vastaavat estimaatit ”merkitsevästi” nollassa poikkeaviksi, jos ne ylittävät itseisarvoltaan 2 kertaa likimääräisen keskivirheensä. Myös uskottavuusosamäärätettä voidaan käyttää tavanomaiseen tapaan. Huomaa kuitenkin, että testattavan nollahypoteesin voimassa ollessa jaksossa 3.4 esitetyn identifiointiehdon on oltava voimassa, joten esimerkiksi hypoteesia $\phi_p = \theta_q = 0$ ei voida testata tavanomaiseen tapaan.

Uskottavuusfunktioon perustuvat mallinvalintakriteerit. Edellisessä jaksossa esitettyjä mallinvalintakriteerejä voidaan käyttää myös SU-estimaattorien kanssa valittaessa mallin asteita p ja q . Kriteerifunktio voidaan perustaa profiiliuskottavuusfunktioon ja määritellä yhtälöllä

$$C_{SU}(p, q) = \log \hat{\sigma}_{p,q}^2 + \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T \log c_{tt}(\hat{\beta}_{p,q}) + (p+q)g(T)/T, \quad 0 \leq p \leq p^*, 0 \leq q \leq q^*,$$

jossa sakkofunktio $g(\cdot)$ ja maksimiasteet p^* ja q^* ovat kuten edellisessä jaksossa ja SU-estimaattoreihin on lisätty alaindeksit p ja q korostamaan niiden riippuvuutta

valituista asteista. $C_{SU}(p, q)$:n yhteys profiiliuskottavuusfunktioon seuraa siitä, että sen määritelmässä kahden ensimmäisen termin summa on yhtä kuin $-2l_p(\hat{\beta}_{p,q})/T - \log T$. Pienet kriteerifunktion arvot liittyvät jälleen ”hyviin” malleihin.

Empiirisiä esimerkkejä. Edellisessä jaksossa todettiin AR(3)-malli sopivimmaksi kandidaatiksi Kuvion 4.1 inflaatioasarjalle. Tämän mallin SU-estimointi tuottaa tuloksen

$$\bar{y}_t = \underset{(0.080)}{0.275}\bar{y}_{t-1} + \underset{(0.081)}{0.263}\bar{y}_{t-2} + \underset{(0.080)}{0.321}\bar{y}_{t-3} + \hat{\varepsilon}_t, \quad \hat{\sigma}^2 = 4.637,$$

jossa $\bar{y}_t = y_t - 4.56$ on otoskeskiarvolla keskistetty inflaatioasarja ja estimaattien alla on suluissa likimääräiset keskivirheet. Kaikki estimaatit ovat selvästi yli kaksi kertaa yli likimääräisen keskivirheensä, mikä viittaa siihen, ettei mallia voida supistaa.

Edellisessä jaksossa saatiin Hannanin ja Rissasen menetelmän perusteella viitteitä siitä, että Kuvion 1.4 auringonpilkkusarjalle estimoitujen autokorrelaatio- ja osittaisautokorrelaatiofunktioiden perusteella valittua AR(2)-mallia voisi olla aiheellista laajentaa ARMA(2,1)-malliksi. Tämän mallin ARMA-kertoimien SU-estimaateiksi saadaan $\hat{\phi}_1 = 1.225$ (0.112), $\hat{\phi}_2 = -0.561$ (0.108) ja $\hat{\theta}_1 = 0.385$ (0.132). Tulos osoittaa, että MA-parametrin estimaatti on selvästi ”merkitsevä”. Yleisemmin tämä esimerkki osoittaa, että autokorrelaatio- ja osittaisautokorrelaatiofunktioiden avulla ei aina ole helppo valita ARMA-mallin asteita (vrt. Kuvio 3.4).

4.5 Mallin riittävyyden tarkistaminen

Edellisessä kappaleessa esitetyt estimointitulokset olettivat, että (tavalla tai toisella) valitun ARMA(p,q)-mallin asteet on valittu siinä mielessä oikein, että virhetermi ε_t toteuttaa oletuksen $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$ tai mielellään jopa $\varepsilon_t \sim \text{nid}(0, \sigma^2)$, mutta p ja q eivät ole ainakaan samanaikaisesti suurempia kuin on tarpeen. Kuten jakson 4 alussa todettiin, suositaan mallinvalinnassa usein säästäväisyysperiaatetta, mikä voi johtaa siihen, että mallin asteista ainakin toinen tulee valituksi liian pieneksi. Tällöin mallin virhetermiin jää autokorrelaatiota, jonka huomioon ottaminen parantaa mallin ennustekykyä. Vaikka asteet olisikin valittu oikein, voivat virheet olla vain autokorreloimattomia, mutta eivät riippumattomia eivätkä normaalisti jakautuneita, mitä on myös hyvä tutkia.

Mallin ylispesifointi. Valitun ARMA(p,q)-mallin riittävyyttä tutkittaessa kannattaa kiinnittää huomiota erityisesti laajempiin ”naapurimalleihin” eli ARMA(p+1,q)- ja ARMA(p,q+1)-malliin, joiden parametrit voidaan estimoida SU-menetelmällä ja testata poikkeako lisätty AR-parametri tai MA-parametri nollassa. Tämän menetelyn yhteydessä puhutaan usein mallin *ylispesifioinnista*. Aiemmin mainitun identifioituvuusongelman vuoksi tavanomaiset testit eivät toimi, josa asteita p ja q kasvatetaan samanaikaisesti, mutta mallinvalintakriteerejä voi tällöinkin käyttää.

Residuaalit. Estimoidun mallin riittävyden tutkimisessa on luontevaa käyttää virheiden empiirisiä vastineita eli *residuaaleja*, joiden tulisi muistuttaa ominaisuuksiltaan teoreettisia virheitä ε_t . Residuaalien määrittelyksi palautetaan edellisestä jaksosta mieleen, että mallin ollessa oikein spesifioitu $\mathbf{E}(\mathbf{y}) = 0$ ja $\text{Cov}(\mathbf{y}) = \sigma^2 \mathbf{\Sigma}$, jossa matriisi $\mathbf{\Sigma}$ esitettiin Cholesky-hajotelmana $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{C}\mathbf{C}'$. Kovarianssimatriisin tunnetusta laskukaavasta seuraa siten tulos $\text{Cov}(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{y}) = \mathbf{C}^{-1}\text{Cov}(\mathbf{y})\mathbf{C}^{-1'} = \sigma^2 \mathbf{I}_T$. Residuaalien $\hat{\varepsilon}_t$ ($t = 1, \dots, T$) luonteva määritelmä on näin ollen

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\hat{\varepsilon}_1 \ \dots \ \hat{\varepsilon}_T]' = \mathbf{C}(\hat{\boldsymbol{\beta}})^{-1} \mathbf{y},$$

jossa \mathbf{y} jälleen tulkitaan poikkeamaksi otoskeskiarvostaan, mikäli prosessin y_t odotusarvon ei tiedetä olevan nollan. Käytännössä voidaan suorittaa vielä skaalaus jakamalla residuaalit $\hat{\varepsilon}_t$ estimoidulla hajonnallaan $\hat{\sigma}$. Näin saatavien residuaalien $\hat{\varepsilon}_t/\hat{\sigma}$ tulisi oikein spesifioidun mallin tapauksessa olla likimain riippumattomia odotusarvona nolla ja varianssina yksi.

Residuaalien ominaisuuksien tutkiminen on syytä aloittaa piirtämällä residuaalien aikasarja. Jos estimoitu malli on oikea (tai riittävä), ei residuaalien aikasarjassa saisi näkyä trendejä, syklisiä komponentteja, varianssin vaihtelua ajan funktiona (eli heteroskedastisuutta), poikkeavia havaintoja tms. Seuraavaksi voidaan tutkia residuaalien autokorrelaatiomuutta. Tämä tapahtuu aivan samalla tavalla kuin jaksossa 2.4, jossa tarkasteltiin havaitun aikasarjan autokorrelaatiomuuden tutkimista. On kuitenkin syytä huomata, että residuaaleista laskettuihin autokorrelaatiokertoimiin ei ole perusteltua soveltaa kriittisiä rajoja $\pm 1.96/\sqrt{T}$, jotka eivät toimi edes asymp-toottisesti jaksossa 2.4 esitetyllä tavalla. Pätevien kriittisten rajojen puuttuessa näitä rajoja käytetään kuitenkin usein antamaan edes ”karkea mittakaava” residuaaleista lasketuille autokorrelaatiokertoimille.¹³ Jaksossa 2.4 esitettyä Ljungin ja Boxin testisuuretta voidaan myös käyttää, mutta aiemmin mainitun (asymptoot-tisen) χ^2_{H-p-q} -jakauman asemesta on käytettävä χ^2_{H-p-q} -jakaumaa, jossa viipymän H pitää lisäksi olla ”suuri”, jotta (asymptoottinen) tulos olisi perusteltu (käytännössä ehkä 10-30 riippuen T :n koosta).

Vaikka valitun mallin virheitä voitaisiinkin pitää autokorrelaatiottomina, eivät ne välttämättä ole riippumattomia. Jakson 2.4 lopussa esitetyn mukaisesti, voidaan virheissä mahdollisesti esiintyvien epälineaaristen riippuvuuksien paljastamisessa käyt-tää (rajoitetussa mielessä) residuaalien neliöiden autokorrelaatioita. Voidaan osoit-taa, että virheiden toteuttaessa oletuksen $\varepsilon_t \sim \text{nid}(0, \sigma^2)$ ovat neliöityjen residu-aalien $\hat{\varepsilon}_t^2$ ($t = 1, \dots, T$) otosautokorrelaatiot likimain riippumattomia ja $\mathbf{N}(0, 1/T)$ -jakautuneita. Niihin voidaan siten soveltaa kriittisiä rajoja $\pm 1.96/\sqrt{T}$ ja jaksossa 2.4 mainittua McLeodin ja Lin testiä (eli Ljungin ja Boxin testiä sovellettuna neliöityihin residuaaleihin) ilman, että viipymän H tarvitsee olla ”suuri”. McLeod ja Li ovat osoittaneet nämä tulokset päteviksi myös oletuksilla $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$ ja $\mathbf{E}(\varepsilon_t^8) < \infty$.

¹³Asymptoottisesti pätevät kriittiset rajat tunnetaan ja jotkut tietokoneohjelmat tulostavat ne automaattisesti.

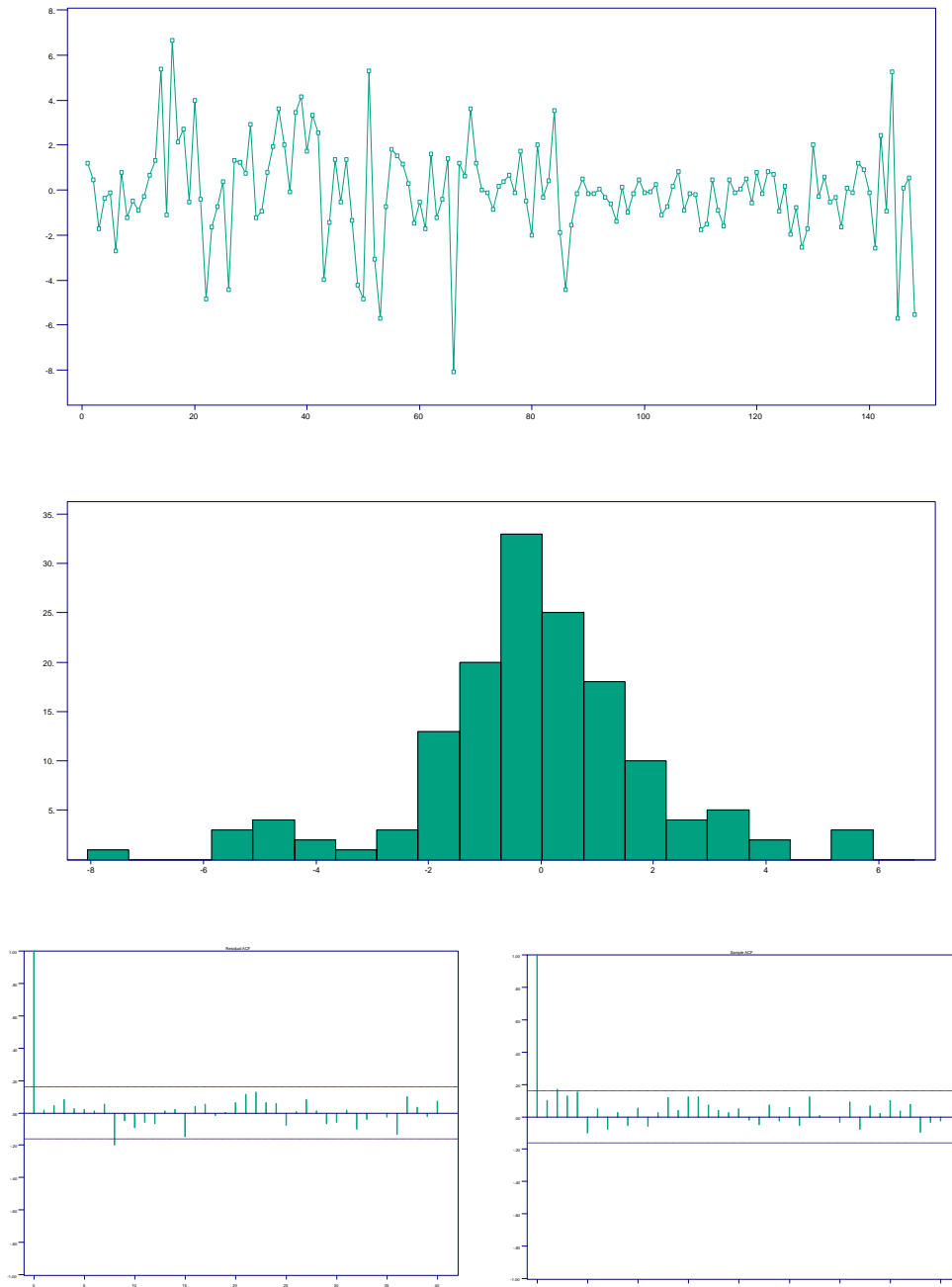
Jos havaitaan, että virheet ovat autokorreloimattomia, mutta niiden neliöt ovat autokorreloituneita, voidaan myös päätellä, etteivät virheet voi olla normaalisia (normaalisilla prosesseilla autokorreloimattomuus on yhtäpitävää riippumattomuuden kanssa). Vaikka edellisessä jaksossa esitetyt asymptoottiset estimointitulokset pätevätkin ilman virheiden normalisuutta, kannattaa normalisuusoletuksen realistisuutta tutkia myös residuaalien histogrammia tai ns. kvantiilifunktiota käyttäen.

Jos virheet ovat vain autokorreloimattomia, mutta eivät riippumattomia, ei SU-estimaattorin $\hat{\beta}$ asymptoottisen jakauman kovarianssimatriisi ole välttämättä kuten tuloksessa (4.5) esitetään ($\hat{\beta}$:n tarkentuvuus ja asymptoottinen normalisuus voidaan kuitenkin osoittaa yleisin oletuksin; ks. jakso 6.3). Tällöin esitetyt keskivirheet ja testit eivät myöskään ole välttämättä päteviä.

Empiirinen esimerkki. Tarkastellaan esimerkkinä Kuvion 4.1 inflaationsarjalle edellisessä jaksossa estimoidun AR(3)-mallin riittävyttä. Kuviossa 4.3 on ylhäällä esitetty residuaalisarja, jossa on nähtävissä samanlaista eroavuutta alkupään ja loppupään välillä kuin alkuperäisessä sarjassakin, joskin lievempänä. Myös muutamia melko suuria residuaaleja esiintyy verrattuna residuaalisarjan estimoituun hajontaan $\sqrt{4.64} \approx 2.15$ (suurin residuaali on 6.67 ja pienin -8.04). Tämä näkyy myös kuviossa keskellä esitetyssä virheiden histogrammissa, joka viittaa normaalijakaumaa paksuhäntäisempään jakaumaan. Kuviossa alhaalla vasemmalla esitetyt residuaalien otosautokorrelaatiot ovat pieniä eikä niiden perusteella voida epäillä mallin asteiden valintaa. Samaan viittaa Ljungin ja Boxin testisuuren arvo 14.74, joka perustuu 15 ensimmäiseen autokorrelaatiokertoimeen. Tällöin siis $H = 15$ ja vastaava χ_{12}^2 -jakaumasta saatava p-arvo on 0.26. Lähimpiin naapurimalleihin laajentaminen ei myöskään tunnu tarpeelliselta, sillä AR(4)-mallissa ja ARMA(3,1)-mallissa saadaan estimaatit $\hat{\phi}_4 = -0.045$ (0.084) ja $\hat{\theta}_1 = 0.106$ (0.214). Verrattuna AR(3)-malliin nämä mallit eivät saa myöskään tukea mallinvalintakriteereiltä (esimerkiksi laajempia malleja suosivaa AIC:tä käytettäessä saa kriteerifunktio AR(3)-, AR(4)- ja MA(3,1)-malleilla arvot 656.25, 657.87 ja 658.00). Kuviossa 4.3 oikealla alhaalla esitetyt neliöityjen residuaalien otosautokorrelaatiot ovat muutamilla ensimmäisillä viipymillä suurehkoja. McLeodin ja Lin testisuuren arvo perustuen kuuteen ensimmäiseen autokorrelaatioon saa arvon 13.06, jota vastaava χ_6^2 -jakaumasta saatava p-arvo on 0.042. Virheiden iid-oletus voidaan siten asettaa kyseenalaiseksi.

Riittävyystarkastelujen perusteella inflaationsarjalle valittu AR(3)-malli pystyy kuvaamaan sarjan autokorrelaatorakenteen, mutta sen virheitä ei voida pitää normaalisina eikä riippumattomina.¹⁴ Vaikka valittu malli ei olekaan optimaalinen, voi se kuitenkin tuottaa kohtuullisen hyviä ennusteita.

¹⁴Autokorrelaatiota koskevaan johtopäätökseen liittyen voidaan tosin todeta, että virheiden ollessa autokorreloimattomia, mutta riippuvia, ei Ljungin ja Boxin testi ole välttämättä luotettava.



Kuvio 4.3. Kuvion 4.1 inflaatiotasjalle estimoidun AR(3)-mallin residuaalit (ylhäällä), residuaalien histogrammi (keskellä) ja residuaalien otosautokorrelaatiofunktio (alhaalla vasemmalla) ja neliöityjen residuaalien otosautokorrelaatiofunktio (alhaalla oikealla) viipymillä $h = 0, \dots, 40$.

4.6 Kausivaihtelumallit

Motivoiva esimerkki. Jakson 3.1 lopussa todettiin, että estimoidun autokorrelaatio- ja osittaisautokorrelaatiofunktion perusteella AR(13)-malli näyttäisi sopivalta Ku-
vion 1.2 kausivaihtelua sisältävälle onnettomuussarjalle. Tässä mallissa on kuitenkin paljon parametreja etenkin, kun otetaan huomioon varsin pieni havaintomäärä ($T = 72$). Tällaisessa tilanteessa osa AR-mallin kertoimista voi kuitenkin saada arvon nolla, joten vastaavat viipymät voidaan poistaa mallista. Tällaisen rajoitetun mallin realistisuutta voidaan tutkia seuraavan mallinvalintakriteereihin perustuvan menettelyn avulla.

Estimoidaan ensin kaikki mahdolliset mallit, joista on vuorotellen poistettu yksi viipymistä y_{t-1}, \dots, y_{t-13} ja lasketaan kriteerifunktion arvo, jota verrataan AR(13)-mallista saatavaan arvoon. Jos viimeksi mainittu on pienin, valitaan malliksi AR(13). Muutoin poistetaan viipymistä se, jota vastaava 12 viipymän malli tuottaa suurimman kriteerifunktion arvon. Näin jatketaan poistaen aina viipymä kerrallaan, kunnes minkä tahansa viipymän poistaminen kasvattaa kriteerifunktion arvoa.

Käyttäen edellä kuvattua menettelyä yhdessä PNS-estimoinnin ja BIC-kriteerin kanssa päädytään malliin

$$\bar{y}_t = \underset{(0.093)}{0.661}\bar{y}_{t-1} + \underset{(0.066)}{0.835}\bar{y}_{t-12} - \underset{(0.099)}{0.576}\bar{y}_{t-13} + \hat{\varepsilon}_t, \quad \hat{\sigma}^2 = 115205, \quad (4.6)$$

jossa $\bar{y}_t = y_t - 879$ on otoskeskiarvolla keskistetty onnettomuussarja. Tätä mallia voidaan pitää residuaalitarkastelujen perusteella riittävänä, vaikka AIC- ja HQ-kriteerit ehdottavatkin hieman laajempia malleja ja virheiden ei-normaalisuudesta on varsin selviä viitteitä (virheiden neliöitä voidaan sen sijaan pitää autokorreloimattomia). Kiinnostava piirre tässä mallissa on, että kertoimien estimaatit toteuttavat likimain (epälineaarisen) parametrirajoitteen $\phi_1\phi_{12} = -\phi_{13}$, sillä $\hat{\phi}_1\hat{\phi}_{12} = 0.661 \times 0.835 = 0.552$. Jos tämä rajoite oletetaan, pätee AR-polynomille $\phi(z) = (1 - \phi_1z)(1 - \phi_{12}z^{12})$ ja mallin parametrien estimointi SU-menetelmällä tuottaa tulokseksi

$$(1 - \underset{(0.076)}{0.763}B)(1 - \underset{(0.049)}{0.852}B^{12})\bar{y}_t = \hat{\varepsilon}_t, \quad \hat{\sigma}^2 = 128227. \quad (4.7)$$

Residuaalitarkastelujen perusteella tämä malli ei poikkea juurikaan edellä esitetystä rajoittamattomasta vastineesta ja uskottavuusosamäärätestin mukaan käytetty parametrirajoite on myös realistinen (p-arvo 0.24).

Yleinen kausivaihtelumalli. Malli (4.7) on esimerkki ns. multiplikatiivisesta ARMA-mallista, jollaisia käytetään paljon kausivaihtelun mallintamisessa. Yleisesti tällainen multiplikatiivinen malli määritellään olettamalla rajoitteen $\phi(z) = (1 - \phi_1z)(1 - \phi_{12}z^{12})$ kaltaiset rajoitteet yleisen ARMA-mallin polynomeissa. Näin saatava malli määritellään yhtälöllä

$$\phi(B)\Phi(B^s)y_t = \theta(B)\Theta(B^s)\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2), \quad (4.8)$$

jossa s on kausivaihtelujakson pituus,

$$\begin{aligned}\phi(B) &= 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p, \\ \theta(B) &= 1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q, \\ \Phi(B^s) &= 1 - \Phi_1 B^s - \dots - \Phi_P B^{sP}\end{aligned}$$

ja

$$\Theta(B^s) = 1 + \Theta_1 B^s + \dots + \Theta_q B^{sq}.$$

Polynomit $\phi(B)$ ja $\theta(B)$ ovat kuten ARMA(p,q)-mallissa (3.7) ja polynomit $\Phi(B^s)$ ja $\Theta(B^s)$ ottavat huomioon mallinnettavassa sarjassa esiintyvän kausivaihtelun. Asteiden p ja q oletetaan toteuttavan ehdot $p < s$ ja $q < s$. Asteita P ja Q ei rajoiteta, mutta käytännössä kolmea pienemmät asteet ovat tavallisimpia.

Yhtälön (4.8) määrittelemästä *multiplikatiivisesta ARMA-mallista* käytetään lyhennystä SARMA(p,q)×(P,Q)_s (tässä 'S' tulee englannin kielen sanasta 'seasonal'). Se saadaan tavallisesta ARMA(p+sP,q+sQ)-mallista

$$\phi^*(B) y_t = \theta^*(B) \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2), \quad (4.9)$$

olettamalla polynomeille $\phi^*(B)$ ja $\theta^*(B)$ rakenteet

$$\phi^*(B) = \phi(B) \Phi(B^s) \quad \text{ja} \quad \theta^*(B) = \theta(B) \Theta(B^s).$$

Asettamalla polynomien $\phi^*(B)$ ja $\theta^*(B)$ kertoimille samanlaisia nollarajoitteita kuin yhtälön (4.6) erikoistapauksessa saadaan yhtälöstä (4.9) myös vastaava ei-multiplikatiivinen kausivaihtelumalli tai ARMA-malli nollarajoittein.

SARMA(p,q)×(P,Q)_s-malliin (4.8) liitettävät stationaarisuus-, käännettävyyys- ja identifioituvuusehdot voidaan perustella samalla tavalla kuin vastaavat ehdot jaksossa 3.3. Stationaarisuus pätee, jos $\phi^*(z) = \phi(z) \Phi(z^s) \neq 0$, kun $|z| \leq 1$, ja käännettävyyys, jos $\theta^*(z) = \theta(z) \Theta(z^s) \neq 0$, kun $|z| \leq 1$. Stationaarisuusehto voidaan siten esittää yhtäpitävästi vaatimalla

$$\phi(z) \neq 0 \quad \text{ja} \quad \Phi(z^s) \neq 0, \quad \text{kun} \quad |z| \leq 1,$$

ja käännettävyysehto vastaavasti vaatimalla

$$\theta(z) \neq 0 \quad \text{ja} \quad \Theta(z^s) \neq 0, \quad \text{kun} \quad |z| \leq 1.$$

Identifioituvuusehto edellyttää puolestaan, ettei polynomeilla $\phi(z)$ ja $\theta(z)$ eikä polynomeilla $\Phi(z^s)$ ja $\Theta(z^s)$ ole yhteisiä juuria ja lisäksi, että $\phi_p \neq 0$ tai $\theta_q \neq 0$ ja $\Phi_P \neq 0$ tai $\Theta_Q \neq 0$.

Jos SARMA(p,q)×(P,Q)_s-mallissa (4.8) oletetaan $p = q = 0$, saadaan erikoistapauksena malli

$$\Phi(B^s) y_t = \Theta(B^s) \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2).$$

Oletetaan konkreettisuuden vuoksi, että $s = 12$ ja tarkastellaan tilannetta, jossa mallinnetaan vain yksittäisen kuukauden havainnoista saatavaa vuotuista aikasarjaa (eli mallinnus kohdistuu esimerkiksi eri vuosien tammikuiden havaintoihin). Tällöin käytetään ARMA(P,Q)-mallia aivan samalla tavalla kuin aikaisemmissa jaksoissa on esitetty. Kausivaihtelun mallintamisen kannalta on kuitenkin keskeistä huomata, että saman ARMA(P,Q)-mallin oletetaan pätevän kaikille vuoden kuukausille. Yleisessä multiplikatiivisessa SARMA(p,q) × (P,Q)_s-mallissa (4.8) tilanne on muuten samanlainen kuin edellä, mutta eri kuukausiin liittyvien vuotuisten mallien virheet ovat autokorreloituneita ja noudattavat samaa ARMA(p,q)-prosessia. Tämä nähdään konkreettisesti kirjoittamalla malli muodossa $\Phi(B^s)y_t = \Theta(B^s)u_t$, jossa $u_t = \phi(B)^{-1}\theta(B)\varepsilon_t$.

Edellä oletettiin, että stationaarinen malli sopii kuvaamaan tarkasteltavaa aikasarjaa. Jos näin ei ole, mutta stationaarisuus saavutetaan differensoinnilla, määritellään multiplikatiivinen ARMA-malli differensoitua prosessia käyttäen kuten edellä. Kausivaihtelutapauksessa differensointi voidaan suorittaa käyttäen joko operaattoria $\Delta = 1 - B$ kuten jaksossa 3.5 tai vastaavaa kausivaihteluoperaattoria $\Delta_s = 1 - B^s$. Jos halutaan esittää malli sallimalla molemmat vaihtoehdot ja myös korkeammat differensoinnit päädytään SARIMA(p,d,q) × (P,D,Q)_s-malliin

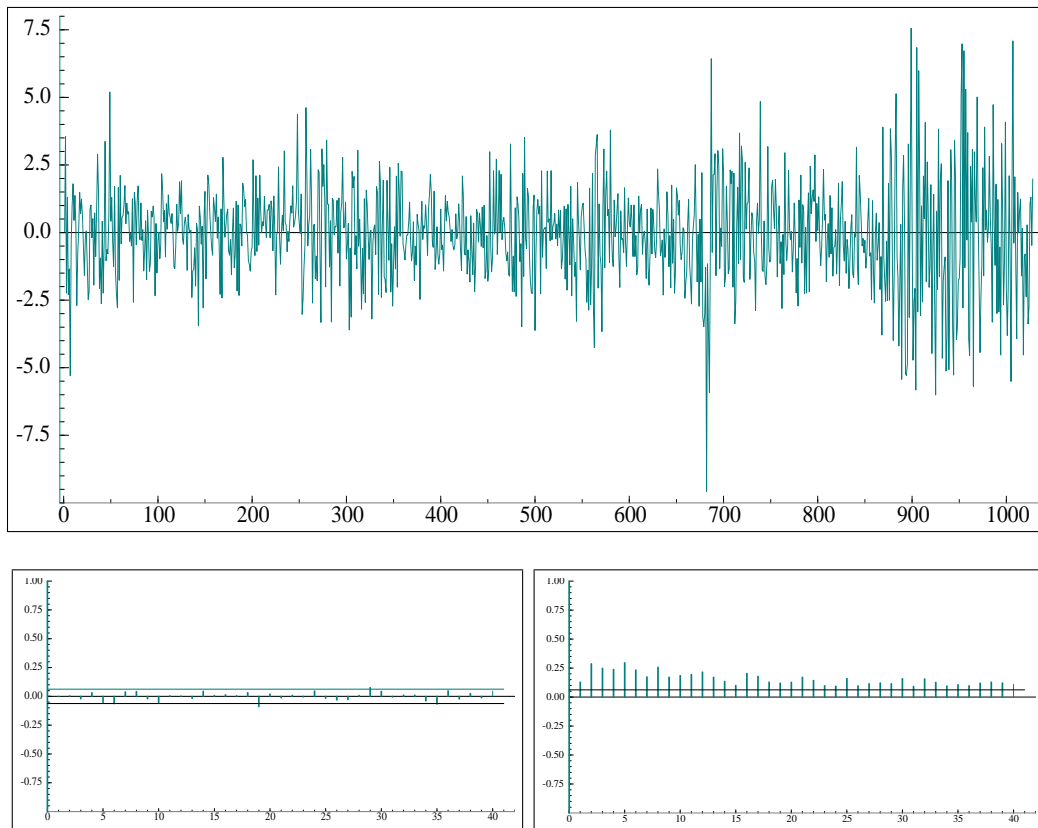
$$\phi(B)\Phi(B^s)\Delta^d\Delta_s^D y_t = \theta(B)\Theta(B^s)\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2).$$

Käytännössä differensointiasteet d ja D ovat yleensä joko nolla tai yksi. Sovelluksia, joissa molemmat ovat ykkösiä, näkee kuitenkin melko usein.

Kun differensointiasteet on valittu sujuu SARIMA(p,d,q) × (P,D,Q)_s-mallin rakentaminen periaateessa samaan tapaan kuin aikaisemmin esitetyn tavallisen ARMA(p,q)-mallin, joskin mallinvalinta on hankalampaa, koska kahden asteen asemesta täytyy valita neljä astetta. Jaksossa 4.4 esitetty SU-estimointi yleistyy niin, että parametrivektoriin β liitetään SARMA(p,q) × (P,Q)_s-mallin multiplikatiiviset rajoitteet. Esimerkiksi yhtälössä (4.6) esitetyt estimaatit on saatu spesifioimalla ARMA(13)-malli ja asettamalla sen kerroinvektorille $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{13})$ rajoitteet $\beta_{13} = -\beta_1\beta_{12}$ ja $\beta_2 = \dots = \beta_{11} = 0$. Vastaava yleistys perustetaan malleihin (4.9) ja (4.8), joista edellisen kertoimet saadaan jälkimmäisen kertoimista samanlaisilla multiplikatiivisilla rajoitteilla kuin edellä tarkastellussa erikoistapauksessa.

5 Ehdollisen varianssin mallintaminen

ARMA-malleja voidaan luonnehtia malleiksi stationaarisen prosessin ehdolliselle odotusarvolle. Käännettävyysehdon voimassa ollessa ARMA-prosessilla on esitys $y_t = -\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j y_{t-j} + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$ (ks. jakso 3.3), josta nähdään, että y_t :n ehdollinen odotusarvo ehdolla prosessin menneisyys $\{y_{t-1}, y_{t-2}, \dots\}$ on $-\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j y_{t-j}$ ja ehdollinen varianssi on $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$. ARMA-malleilla ei ilmeisestikään ole käyttöä tilanteissa, joissa havaittu aikasarja todetaan autokorreloimattomaksi. Tällaisissa aikasarjoissa



Kuvio 5.1. Frankfurtin pörssin DAX-indeksin päivätuotot ajalta 1.1.1999 - 31.1.2003 (ylhäällä), siitä laskettu otosautokorrelaatiofunktio (alh. vas.) ja neliöiden otosautokorrelaatiofunktio (alh. oik.) viipymillä $h = 1, \dots, 40$.

voi kuitenkin olla riippuvuutta (ks. jakson 2.1 Esimerkki 2.2(ii)). Erityisesti ehdollisissa varianssissa voi esiintyä systemaattista vaihtelua, jota ei voida ottaa huomioon ARMA-mallilla.

Kuviossa 5.1 on esitetty ylhäällä 1028 havaintoa Frankfurtin pörssin DAX -indeksin päivätuotoista ajalta 1.1.1999 - 31.1.2003. Tuotot on laskettu kaavalla $y_t = 100 (\log P_t - \log P_{t-1})$, jossa P_t on indeksin arvo päivänä t .¹⁵ Tuottosarja näyttää ainakin tason suhteen kohtuullisen stationariselta. Kuviossa alhaalla vasemmalla on siitä lasketut 40 ensimmäistä otosautokorrelaatiokerrointa ja likimääräiset 95%:n kriittiset rajat, joiden perusteella sarja vaikuttaa autokorreloimattomalta (kymmenen autokorrelaatiokertoimeen perustuva Ljungin ja Boxin testin likimääräinen p-arvo on 0.13). Sarjassa havaitaan kuitenkin selvää systemaattista vaihtelua, mitä kuviossa alhaalla oikealla esitetty neliöityjen havaintojen otosautokorrelaatiofunktio heijastaa. Neliöidyistä havainnoista lasketut 40 autokorrelaatiokerrointa ovat positiivisia ja jokainen ylittää likimääräisen 95%:n kriittisen rajan. McLeodin ja Lin testin

¹⁵Tämä on yleisesti käytetty osake- ja valuuttakurssien tuottojen laskukaava.

kymmeneen autokorrelaatioon perustuva likimääräinen p-arvo on neljällä desimaalilla nolla. Tuottosarjassa voidaan erityisesti havaita jaksoja, joissa vaihtelu on selvästi keskimääräistä suurempaa tai pienempää. Tällainen systematiikka viittaa varianssin vaihteluun eli heteroskedastisuuteen, jota on varianssin määrittelmä huomioon ottaen luontevaa tutkia neliöityjen havaintojen autokorrelaatiofunktion avulla. Toinen silmiin pistävä piirre tuottosarjassa on itseisarvoltaan pienten ja suurten havaintojen suuri suhteellinen ero, mikä viittaa (normaalijakaumaan verrattuna) paksuhäntäiseen jakaumaan.

Kuvion 5.1 tuottosarjassa havaitun tyyppisen heteroskedastisuuden ei seuraavassa ajatella liittyvän prosessin ehdottomaan varianssiin vaan ehdolliseen varianssiin ehdolla prosessin menneisyys. Ensin esitetään ehdollisen varianssin mallintamisessa käytettävien mallien yleinen rakenne, minkä jälkeen tarkastellaan tavallisimpia käytössä olevia malleja. Yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan, että tarkasteltavan (stationaarisen) prosessin ehdollinen (ja siten ehdoton) odotusarvo on nolla.

5.1 Mallin yleinen rakenne

Olkoon y_t vahvasti ja heikosti stationaarinen prosessi, jolle pätee $\mathbf{E}_{t-1}(y_t) = 0$ ja siten $\mathbf{E}(y_t) = 0$ (ks. ehdollisen odotusarvon ominaisuus EO3 jakson 3.4 alussa) Tässä on aikaisempaan tapaan $\mathbf{E}_{t-1}(y_t) = \mathbf{E}(y_t | y_s, s \leq t-1)$. Yleinen malli y_t :n ehdolliselle varianssille on

$$y_t = h_t^{1/2} \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, 1), \quad (5.1)$$

jossa h_t on positiivinen funktio muuttujista y_{t-j} , $j > 0$. Lisäksi oletetaan, että ε_t on riippumaton muuttujista y_{t-j} , $j > 0$, jolloin myös h_t ja ε_t ovat riippumattomia. Tämä takaa oletuksen $\mathbf{E}_{t-1}(y_t) = 0$ paikkansa pitävyyden, sillä (ks. ehdollisen odotusarvon ominaisuudet EO2 ja EO4 jakson 3.4 alussa)

$$\mathbf{E}_{t-1}(y_t) = h_t^{1/2} \mathbf{E}_{t-1}(\varepsilon_t) = h_t^{1/2} \mathbf{E}(\varepsilon_t) = 0.$$

Tästä seuraa edelleen, että $\text{Var}_{t-1}(y_t) = \mathbf{E}_{t-1}(y_t^2)$, joten yhtälöstä (5.1) saadaan y_t :n ehdolliseksi varianssiksi

$$\text{Var}_{t-1}(y_t) = \mathbf{E}_{t-1}(h_t \varepsilon_t^2) = h_t \mathbf{E}(\varepsilon_t^2) = h_t.$$

Yhtälössä (5.1) $h_t^{1/2}$ on siten y_t :n ehdollinen hajonta. Ehdollista hajontaa sanotaan usein *volatiliteetiksi*, joskin tätä termiä käytetään yleisemminkin. Oletetun y_t :n stationaarisuuden nojalla on myös ehdollinen varianssi h_t (ainakin vahvasti) stationaarinen. Koska $\text{Var}(y_t) = \mathbf{E}(y_t^2)$ ja $h_t \perp\!\!\!\perp \varepsilon_t$, saadaan yhtälöä (5.1) käyttäen

$$\sigma_y^2 \equiv \text{Var}(y_t) = \mathbf{E}(h_t \varepsilon_t^2) = \mathbf{E}(h_t) \mathbf{E}(\varepsilon_t^2) = \mathbf{E}(h_t). \quad (5.2)$$

Samantapaiset laskelmat osoittavat, että y_t on autokorreloimaton eli

$$\text{Cov}(y_t, y_{t-k}) = 0, \quad k \neq 0, \quad (5.3)$$

(yksityiskohdat jätetään tehtäväksi).

Erityisesti osaketuottojen tapauksessa on ehdollinen varianssi (tai volatilitteetti) kiinnostava suure, sillä se auttaa arvioimaan tuottoon liittyvän epävarmuuden tai *riskin* suuruutta. Ajankohtana t voi esimerkiksi olla kiinnostavaa saada arvio todennäköisyydelle, että seuraavan periodin $t + 1$ tuotto alittaa jonkun valitun riskituoton rajan. Tämä arvio on järkevää perustaa periodin $t + 1$ tuoton ehdolliseen todennäköisyyteen ehdolla tuoton historia ajankohtaan t asti. Jos tästä ehdollisesta todennäköisyydestä käytetään merkintää $P_t(\cdot) = P(\cdot | y_s, s \leq t)$, saadaan

$$P_t(y_{t+1} \leq c) = F_\varepsilon(c/h_{t+1}^{1/2}),$$

jossa c on edellä mainittu riskituoton raja ja $F_\varepsilon(\cdot)$ on virhetermin ε_t kertymäfunktio. Jos virhetermin jakauma ja ehdollisen varianssin h_{t+1} arvo tunnetaan, voidaan oikealla oleva todennäköisyys laskea. Käytännössä molemmat joudutaan selvittämään aineistoa apuna käyttäen.

Todettakoon, että usein edellä kuvattua ongelmaa lähestytään toisin päin eli kysytään mikä on annettua (pientä) todennäköisyyttä π vastaava riskiarvo c (englanniksi 'value at risk'), jolle pätee $P_t(y_{t+1} \leq c) = \pi$. Vastaus saadaan edellä esitetystä ilmeisellä tavalla, kun virhetermin jakauma ja ehdollisen varianssin h_{t+1} arvo on selvitetty.

Jotta yhtälöstä (5.1) saataisiin käyttökelpoinen malli, täytyy ehdollisen varianssin h_t riippuvuus prosessin y_t menneisyydestä y_{t-j} , $j \geq 1$, spesifioida.¹⁶ Seuraavassa esitettävät standardimallit voidaan ajatella ARMA-mallien vastineiksi ehdollista varianssia mallinnettaessa.

5.2 ARCH(1)-malli

Koska varianssi liittyy muuttujien neliöihin, on luontevaa ajatella, että ehdollinen varianssi h_t riippuu prosessin neliöidyistä menneistä arvoista. Yksinkertainen tähän ajatukseen perustuva malli on siten

$$h_t = \omega + \alpha y_{t-1}^2, \quad (5.4)$$

jossa $\omega > 0$ ja $\alpha \geq 0$. Nämä parametrirajoitteet asetetaan, jotta taataan $h_t > 0$ ja siten $\text{Var}(y_t) > 0$. Yhtälöiden (5.1) ja (5.4) (tai joskus vain jälkimmäisen) määrittelemää mallia kutsutaan *ensimmäisen asteen autoregressiiviseksi ehdollisen heteroskedastisuuden malliksi* eli ARCH(1)-malliksi (lyhennys tulee englannin kielen sanoista 'autoregressive conditional heteroskedasticity').

Edellisessä jaksossa prosessin y_t ja ehdollisen varianssin h_t stationaarisuus oletettiin. Tuntuu selvältä, että ARCH(1)-mallissa stationaarisuus ei voi päteä, ellei (ei-negatiivista) parametria α rajoiteta. Todetaan ilman perustelua, että prosessin y_t

¹⁶Vaihtoehtoisesti voitaisiin mallintaa prosessin ehdollista hajontaa $h_t^{1/2}$, mutta tämä on harvinaisempaa.

voidaan osoittaa olevan sekä vahvasti että heikosti stationaarinen, jos $\alpha < 1$. Yhtälön (5.4) perusteella myös ehdollinen varianssi on tällöin vahvasti (mutta ei välttämättä heikosti) stationaarinen. Kuten yhtälöstä $y_t = (\omega + \alpha y_{t-1}^2)^{1/2} \varepsilon_t$ nähdään, on y_t epälineaarinen prosessi ja siksi sen stationaarisuuden perustelevinen on hankalampaa kuin ensimmäisen asteen ARMA-malleissa. Alempana voidaan ehdon $\alpha < 1$ tarpeellisuutta stationaarisuudelle kuitenkin havainnollistaa jossain määrin. Tämän ehdon välttämättömyys heikolle stationaarisuudelle nähdään yhtälöistä (5.2) ja (5.4), joista seuraa $E(y_t^2) = \omega + \alpha E(y_{t-1}^2)$. Heikosti stationaarisessa tapauksessa y_t :n varianssille σ_y^2 saadaan siten lauseke $\sigma_y^2 = \omega / (1 - \alpha)$, joka ei voi päteä, ellei $\alpha < 1$. Ellei toisinpäin mainita, oletetaan ehto $\alpha < 1$ seuraavassa. Kuten myöhemmin todetaan (ks. jakso 5.4), tämä ehto ei ole kuitenkaan välttämätön vahvalle stationaarisuudelle.

Jos $\alpha = 0$, on $h_t = \omega$ vakio ja prosessi y_t on (ehdollisesti) homoskedastinen eli $y_t \sim \text{iid}(0, \omega^2)$. Kun $\alpha > 0$, seuraa yhtälöstä (5.4), että itseistaruoltaan suuria havainnoita $|y_{t-1}|$ seuraa suuri ehdollinen varianssi h_t . Tästä puolestaan seuraa, että todennäköisyys havaita suuri $|y_t|$:n arvo tulee ”kohtuullisen” suureksi, jolloin seuraavan periodin ehdollinen varianssi h_{t+1} tulee myös suureksi. Tämä osoittaa, että itseistaruoltaan suurilla havainnoilla on taipumus seurata toisiaan. Sama pätee vastaavasti itseistaruoltaan pienille havainnoille. Malli pystyy siten kuvaamaan volatilitietin ”klusteroitumista”, jollaista havaitaan edellä tarkastellussa DAX-indeksissä samoin kuin muissakin osake- ja valuuttakurssituotoissa. Vastaava ominaisuus on myös myöhemmin tarkasteltavilla ARCH(1)-mallin yleistyksillä.

Vaihtoehtoinen, joskaan ei teoreettisesti kaikilta osin suositeltava, tapa tarkastella mallia (5.4) perustuu yhtälöön

$$y_t^2 = \omega + \alpha y_{t-1}^2 + \xi_t, \quad (5.5)$$

jossa $\xi_t = y_t^2 - h_t = h_t(\varepsilon_t^2 - 1)$ (ks. (5.1)). Koska (ks. ehdollisen odotusarvon ominaisuudet EO2 ja EO4 jakson 3.4 alussa)

$$E_{t-1}(\xi_t) = h_t E_{t-1}(\varepsilon_t^2 - 1) = h_t E(\varepsilon_t^2 - 1) = 0,$$

pätee $E(\xi_t) = E(E_{t-1}(\xi_t)) = 0$. Tämän avulla voidaan edelleen todeta, että prosessi ξ_t on autokorreloimaton. Koska ξ_{t-k} on funktio muuttujista y_{t-k} ja y_{t-k-1} ($k > 0$), saadaan (ks. EO3 ja EO4)

$$\text{Cov}(\xi_t, \xi_{t-k}) = E(\xi_t \xi_{t-k}) = E(E_{t-1}(\xi_t \xi_{t-k})) = E(\xi_{t-k} E_{t-1}(\xi_t)) = 0.$$

Huomaa, että tämä laskelma vaatii oletuksen $E(y_t^4) < \infty$, joka puolestaan edellyttää, että $E(\varepsilon_t^4) < \infty$. Nämä momenttioletukset vaaditaan myös myöhemmissä neliöidyn prosessin y_t^2 toisia momentteja koskevilla tarkasteluilla, vaikkei niitä aina mainittaisikaan.

Edellä esitetystä seuraa, että prosessia y_t^2 voidaan tarkastella AR(1)-prosessina, jonka virheet ovat heikkoa valkoista kohinaa. On syytä huomata, että virheet eivät

kuitenkaan ole vahvaa valkoista kohinaa, sillä $\xi_t = (\omega + \alpha y_{t-1}^2) (\varepsilon_t^2 - 1)$ riippuu y_{t-1}^2 :stä ja siten edelleen ξ_{t-1} :stä (ks. (5.5)). Prosessi ξ_t on (prosessin y_t funktiona) kuitenkin vahvasti stationaarinen ja, kun $\mathbf{E}(y_t^4) < \infty$, se on myös heikosti stationaarinen. Tällöin myös ehdollinen varianssi h_t on heikosti stationaarinen, sillä menettelemällä kuten laskelmassa (5.2) (tai hieman alempana) nähdään, että $\mathbf{E}(h_t^2) < \infty$. Lisäksi neliöidyn prosessin y_t^2 autokorrelaatiofunktio voidaan johtaa yhtälöstä (5.5) samalla tavalla kuin AR(1)-prosessin tapauksessa. Tulokseksi saadaan

$$\text{Cor}(y_t^2, y_{t-k}^2) = \alpha^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Koska $\alpha > 0$, selittää tämä myös edellä mainittua volatilitietin klusteroitumista. On kuitenkin syytä huomata, että edellä käytetty oletus $\mathbf{E}(y_t^4) < \infty$ vaatii enemmän kuin ehdon $\alpha < 1$. Täsmällinen ehto riippuu virhetermin ε_t jakaumasta. Jos $\varepsilon_t \sim \mathbf{N}(0, 1)$, vaaditaan ehto $\alpha^2 < 1/3$, jonka voimassa ollessa y_t^2 :n autokorrelaatioisuus ei voi olla kovin voimakasta.

On tärkeää huomata, että prosessin ξ_t riippuvuus y_{t-1} :stä merkitsee, ettei yhtälöä (5.5) voida tulkita tavanomaiseksi AR(1)-malliksi. Tämä tarkoittaa erityisesti, että *sen enempää heikkoa kuin vahvaakaan stationaarisuutta ei voida päätellä soveltaen jaksossa 2.2.3. käytettyjä menettelyjä, vaan stationaarisuus on perusteltava toisin.*

Edellä havainnollistettiin ARCH(1)-mallin kykyä kuvata volatilitietin klusteroitumista. Toinen mallin keskeinen ominaisuus on, että sillä voidaan kuvata muuttujia, joiden jakaumat ovat normaalijakaumaa huipukkaampia ja paksuhäntäisempiä. Tämän toteamiseksi oletetaan $\mathbf{E}(y_t^4) < \infty$ ja päätellään yhtälöstä (5.1) (ja riippumattomuudesta $h_t \perp\!\!\!\perp \varepsilon_t$), että

$$\mathbf{E}(y_t^4) = \mathbf{E}(h_t^2) \mathbf{E}(\varepsilon_t^4) \geq (\mathbf{E}(h_t))^2 \mathbf{E}(\varepsilon_t^4) = (\mathbf{E}(y_t^2))^2 \mathbf{E}(\varepsilon_t^4).$$

Tästä seuraa, että y_t :n jakauman huipukkuus ylittää ε_t :n jakauman huipukkuuden¹⁷ eli

$$\kappa_y \equiv \frac{\mathbf{E}(y_t^4)}{(\mathbf{E}(y_t^2))^2} \geq \frac{\mathbf{E}(\varepsilon_t^4)}{(\mathbf{E}(\varepsilon_t^2))^2} \equiv \kappa_\varepsilon.$$

Voidaan osoittaa, että tapauksessa $\varepsilon_t \sim \mathbf{N}(0, 1)$ pätee $\kappa_y = 3(1 - \alpha^2)/(1 - 3\alpha^2)$ joten $\kappa_y > 3$, joka on $\mathbf{N}(0, 1)$ -jakauman huipukkuus (huomaa vaatimus $\alpha^2 < 1/3$).

Edellä epäyhtälön $\kappa_y \geq \kappa_\varepsilon$ perustelussa käytettiin stationaarisuuden ja oletuksen $\mathbf{E}(y_t^4) < \infty$ lisäksi vain yhtälöä (5.1). Näin ollen tämä epäyhtälö ei rajoitu ARCH(1)-malliin, vaan on ominainen kaikille yleiseen rakenteeseen (5.1) perustuville malleille. Todettakoon, että Kuvion 5.1 DAX-indeksistä saadaan huipukkuudelle κ_y estimaatti 4.79, joka ylittää selvästi normaalijakauman huipukkuuden 3. Vastaava tulos on tyyppillinen osake- ja valuuttakurssituotoilla.

¹⁷Jos satunnaisuuttajalle X pätee $\mathbf{E}(X^4) < \infty$ ja $\mathbf{E}(X) = 0$, niin sen jakauman huipukkuus on määritelmän mukaan $\mathbf{E}(X^4)/(\mathbf{E}(X^2))^2$. Määritelmä ei riipu X :n varianssista, joka voidaan skaalata ykköseksi. $\mathbf{N}(0, 1)$ -jakauman huipukkuus on 3, joka usein vähennetään edellä esitetystä huipukkuuden määritelmästä.

5.3 ARCH(s)-malli

DAX-indeksistä laskettujen neliöityjen havaintojen ensimmäinen autokorrelaatiokerroin on pieni (≈ 0.13). Jotta ARCH(1)-malli sopisi tähän sarjaan, täytyisi parametrin α arvon olla pieni ja neliöityjen havaintojen autokorrelaatiofunktion α^k täytyisi vaimentua nopeasti nolaa kohti. Näin ei selvästikään käy, mikä viittaa yleisemmän mallin tarpeellisuuteen.

Ilmeinen ARCH(1)-mallin yleistys on ARCH(s)-malli, jossa yhtälöön (5.1) liitetään yhtälön (5.4) laajennus

$$h_t = \omega + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_s y_{t-s}^2. \quad (5.6)$$

Jotta vaatimus $h_t > 0$ (ja siten $\text{Var}(y_t) > 0$) toteutuisi, oletetaan $\omega > 0$ ja $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, s$. Yhtälön (5.5) vastineeksi tulee nyt

$$y_t^2 = \omega + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_s y_{t-s}^2 + \xi_t, \quad (5.7)$$

jossa jälleen $\xi_t = y_t^2 - h_t = h_t(\varepsilon_t^2 - 1)$ ja, kuten edellisessä jaksossa, pätee $E_{t-1}(\xi_t) = 0$ ja edelleen $E(\xi_t) = 0$ ja ξ_t :n autokorreloimattomuus.

Olettaen stationaarisuus voidaan edellisessä jaksossa tapauksessa $s = 1$ esitetyt tulokset yleistää. Erityisesti, ottamalla yhtälöstä (5.7) puolittain odotusarvot saadaan y_t :n varianssille lauseke

$$\sigma_y^2 = \omega / (1 - \alpha_1 - \cdots - \alpha_s).$$

Tämä osoittaa, että välttämätön ehto heikolle stationaarisuudelle on $\alpha_1 + \cdots + \alpha_s < 1$. Tämä ehto voidaan osoittaa myös riittäväksi sekä heikolle että vahvalle stationaarisuudelle.

Koska $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, s$, voidaan ehto $\alpha_1 + \cdots + \alpha_s < 1$ todeta yhtäpitäväksi sen kanssa, että polynomien $1 - \alpha_1 z - \cdots - \alpha_s z^s$ juuret sijaitsevat kompleksitasossa yksikköympyrän kehän ulkopuolella (vrt. AR(p)-prosessin riittävä stationaarisuusehto jaksossa 3.1). Kuten tapauksessa $s = 1$, ARCH(s)-prosessin stationaarisuutta ei kuitenkaan voida päätellä soveltamalla AR(s)-prosessin stationaarisuusehtoa muodollisesti samanlaiseen prosessiin (5.7). Jos oletetaan stationaarisuus ja $E(y_t^4) < \infty$, voidaan yhtälöä (5.7) ja ξ_t :n autokorreloimattomuutta käyttäen johtaa neliöidyn prosessin y_t^2 autokovarianssifunktio samaan tapaan kuin AR(p)-prosessin tapauksessa (ks. jakso 3.1) ja saada Yule-Walker -yhtälöiden vastineet. Yksityiskohdat sivuutetaan.

Edellä todettu yhteys AR(p)-mallin Yule-Walker -yhtälöihin havainnollistaa sitä muutenkin varsin ilmeistä seikkaa, että ARCH-tyyppinen ehdollinen heteroskedastisuus ilmenee tarkasteltavan aikasarjan neliöiden autokorreloituneisuutena. Neliöityjen havaintojen otosautokorrelaatioista laskettua McLeodin ja Lin testisuuretta (ks. jakson 2.4 loppu) voidaan siten käyttää testattaessa nollahypoteesia $y_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$ ARCH-tyyppistä ehdollista heteroskedastisuutta vastaan (vähentämällä havainnoista otoskeskiarvo voidaan ottaa huomioon y_t :n nolasta poikkeava odotusarvo). Voidaan itse

asiassa osoittaa, että tämä testi on asympotoottisesti yhtäpitävä tilastollisen päätelyn kurssilta tutun Raon pistemäärätestin kanssa, kun oletetaan, että yhtälössä (5.1) $\varepsilon_t \sim \text{nid}(0, 1)$ ja että vaihtoehtona on ARCH(s)-malli, jossa s on McLeodin ja Lin testisuureessa käytettyjen neliöidyistä havainnoista laskettujen otosautokorrelaatioiden lukumäärä. Monissa sovelluksissa tämän testin formaali soveltaminen voi kuitenkin tuntua tarpeettomalta, koska ehdollisen heteroskedastisuuden olemassaolo on ilmeistä aikaisempien sovellusten ja/tai aikasarjan luonteen perusteella.

5.4 GARCH(1,1)-malli

On havaittu, että sovellettaessa ARCH(s)-mallia vaaditaan usein suuri s:n arvo ja siten suuri määrä estimoitavia parametreja. Tämä on johtanut vaihtoehtoisten, parametrien suhteen säästävämppien mallien kehittämiseen. Onnistuneeksi vaihtoehdoksi on osoittautunut ratkaisu, jossa ARCH(1)-mallin (5.4) oikealle puolelle lisätään viivästetty ehdollinen varianssi h_{t-1} . Tällöin päädytään ns. GARCH(1,1)-malliin (G \leftrightarrow 'generalized')

$$h_t = \omega + \beta h_{t-1} + \alpha y_{t-1}^2, \quad (5.8)$$

jossa oletetaan $\omega > 0$, $\alpha \geq 0$ ja $\beta \geq 0$ (tapaus $\alpha = 0$ vain, jos samalla $\beta = 0$, koska muuten differenssiyhtälöstä tulee ei-satunnainen).

Yhtälöstä (5.8) saadaan peräkkäisillä sijoituksilla

$$\begin{aligned} h_t &= \omega + \beta (\omega + \beta h_{t-2} + \alpha y_{t-2}^2) + \alpha y_{t-1}^2 \\ &= \omega + \beta \omega + \beta \alpha y_{t-2}^2 + \alpha y_{t-1}^2 + \beta^2 h_{t-2} \\ &= \omega + \beta \omega + \beta \alpha y_{t-2}^2 + \alpha y_{t-1}^2 + \beta^2 (\omega + \beta h_{t-3} + \alpha y_{t-3}^2) \\ &= \omega + \beta \omega + \beta^2 \omega + \beta^2 \alpha y_{t-3}^2 + \beta \alpha y_{t-2}^2 + \alpha y_{t-1}^2 + \beta^3 h_{t-3} \\ &\quad \vdots \\ &= \omega \sum_{j=0}^k \beta^j + \alpha \sum_{j=0}^k \beta^j y_{t-1-j}^2 + \beta^{k+1} h_{t-k-1}. \end{aligned}$$

Tämä viittaa siihen, että tapauksessa $\beta < 1$ saadaan

$$h_t = \omega \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j y_{t-1-j}^2$$

eli GARCH(1,1)-malli voidaan tulkita (tietyn tyypiseksi) ARCH(∞)-malliksi. Edellä mainittu ehto $\beta < 1$ ei kuitenkaan riitä takaamaan y_t :n stationaarisuutta eikä äärellistä varianssia. Tätä varten täytyy olettaa $\alpha + \beta < 1$.

Edellä mainittua heikon ja vahvan stationaarisuuden ehtoa $\alpha + \beta < 1$ voidaan havainnollistaa huomaamalla, että yhtälö (5.8) voidaan kirjoittaa

$$y_t^2 = \omega + (\alpha + \beta) y_{t-1}^2 + \xi_t - \beta \xi_{t-1}, \quad (5.9)$$

jossa jälleen $\xi_t = y_t^2 - h_t = h_t(\varepsilon_t^2 - 1)$ on autokorreloimaton (ks. yhtälön (5.5) jälkeinen teksti). Toisin sanoen, prosessilla y_t^2 on ARMA(1,1)-prosessin mukainen esitys ja ehto $\alpha + \beta < 1$ (kun $\alpha \geq 0$ ja $\beta \geq 0$) vastaa sitä mitä ARMA-mallien teorian perusteella voi odottaa. Aiemmat varoitukset pätevät kuitenkin tässäkin eli ehtoa $\alpha + \beta < 1$ ei voida perustella aikaisemmasta ARMA(1,1)-mallille jaksoissa 2.2.4 ja 3.3 esitetystä tuloksista. Tämän ehdon välttämättömyys heikolle stationaarisuudelle nähdään kuitenkin yhtälön (5.9) avulla. Jos heikko stationaarisuus oletetaan ja yhtälöstä (5.9) otetaan puolittain osotusarvo saadaan $E(y_t^2) = \omega + (\alpha + \beta)E(y_t^2)$ ja y_t :n varianssille edelleen esitys

$$\sigma_y^2 = \omega / (1 - \alpha - \beta),$$

joka ei voi päteä, ellei $\alpha + \beta < 1$.

Jos stationaarisuuden lisäksi oletetaan $E(y_t^4) < \infty$ voidaan johtaa y_t^2 :n autokorrelaatiofunktio. Menemättä yksityiskohtiin todetaan, että y_t^2 :n autokorrelaatiofunktio vaimenee nollaan viipymän kasvaessa eksponentiaalisesti ja vaimenemisen vauhdin määrää summa $\alpha + \beta$ (vaimenenminen on sitä hitaampaa mitä lähempänä ykköstä $\alpha + \beta$ on). Kuviossa 5.1 esitetyn DAX-indeksi tapauksessa tämä vaimeneminen näyttää hitaalta, mikä viittaa siihen, että summan $\alpha + \beta$ täytyy olla melko lähellä ykköstä, jotta GARCH(1,1)-malli voisi olla sopiva.

Todetaan vielä, että edellä mainittu ehto $\alpha + \beta < 1$ on riittävä vahvalle stationaarisuudella ja välttämätön ja riittävä heikolle stationaarisuudelle. Vahvaan stationaarisuuteen riittää kuitenkin huomattavasti lievempi ehto, nimittäin $E[\log(\beta + \alpha\varepsilon_t^2)] < 0$. Tämä ehto on myös välttämätön vahvalle stationaarisuudelle. Siitä seuraa $\beta < 1$ ja ehdosta $\alpha + \beta < 1$ poiketaan se riippuu virhetermin ε_t jakaumasta.

5.5 GARCH(r,s)-malli

GARCH(1,1)-mallin ilmeinen yleistys on GARCH(r,s)-malli

$$\begin{aligned} h_t &= \omega + \beta_1 h_{t-1} + \cdots + \beta_r h_{t-r} + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_s y_{t-s}^2 \\ &= \omega + \beta(B) h_t + \alpha(B) y_{t-1}^2, \end{aligned} \quad (5.10)$$

jossa $\beta(B) = \beta_1 B + \cdots + \beta_r B^r$ ja $\alpha(B) = \alpha_1 B + \cdots + \alpha_s B^s$. Jotta vaatimus $h_t > 0$ toteutuisi, täytyy mallin parametreille asettaa ehtoja. Usein asetetaan ehdot $\omega > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, s$, ja $\beta_i \geq 0$, $i = 1, \dots, r$, jotka eivät α - ja β -parametrien osalta ole kuitenkaan välttämättömiä tapauksessa $r = s = 1$ lukuun ottamatta. Jotteri differenssiyhtälöstä tulisi ei-satunnainen, vaaditaan myös, että ainakin yksi parametreista $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ on nollasta poikkeava. Parametrien estimointi vaatii ARMA-mallien identifioituvuusehdon tapaan lisäksi, että polynomeilla $\alpha(z)$ ja $1 - \beta(z)$ ei ole yhteisiä juuria ja että joko α_s tai β_r on nollasta poikkeava.

Stationaarisuus ja varianssin $E(y_t^2)$ äärellisyys vaativat, että polynomien $1 - \beta(z) - \alpha(z)$ juuret sijaitsevat yksikköympyrän kehän ulkopuolella. Tätä ehtoa voidaan

havainnollistaa johtamalla yhtälöistä (5.1) ja (5.10) yhtälö

$$y_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^m (\alpha_j + \beta_j) y_{t-j}^2 + \xi_t - \sum_{j=1}^r \beta_j \xi_{t-j},$$

jossa $m = \max\{r, s\}$, $\alpha_j = 0$, jos $j > s$, ja $\beta_j = 0$, jos $j > r$. Lisäksi, $\xi_t = y_t^2 - h_t = h_t(\varepsilon_t^2 - 1)$ on kuten aikaisemminkin. Edellä mainittu polynomin $1 - \beta(z) - \alpha(z)$ juuria koskeva ehto on muodollisesti identtinen ARMA(m,r)-mallin stationaarisuusehdon kanssa, joskin *aiemmat varoitukset ARMA-mallien stationaarisuusehtojen soveltuvuudesta pätevät tässäkin yhteydessä*. Tämän ehdon välttämättömyys heikolle stationaarisuudelle voidaan todeta samaan tapaan kuin edellisessä jaksossa tapauksessa $r = s = 1$. Edellisen jakson lopussa mainittu GARCH(1,1)-mallin vahvan stationaarisuuden välttämätön ja riittävä ehto voidaan yleistää myös GARCH(r,s)-mallille, mutta yleistys on hieman monimutkainen esittää. Tästä ehdosta seuraa, että polynomin $1 - \beta(z)$ juuret sijaitsevat yksikköympyrän kehän ulkopuolella, joten tapauksessa $r = s = 1$ esitetty peräkkäisiin sijoituksiin perustuva tarkastelu voidaan yleistää ja nähdä, että GARCH(r,s)-malli voidaan tulkita ARCH(∞)-mallina. Olettamalla $E(y_t^4) < \infty$ voidaan niin ikään johtaa y_t^2 :n autokorrelaatiofunktio käyttäen sille edellä esitettyä ARMA(m,r)-esitystä.

5.6 Muita malleja

Edellisessä jaksossa esitettyä GARCH(r,s)-mallia voidaan pitää ehdollisen varianssin ”perusmallina”. Sille on esitetty useita laajennuksia ja vaihtoehtoja, joista seuraavassa esitetään kaksi rajoittuen ensimmäisen asteen tapaukseen.

Ensimmäiseksi tarkasteltavassa mallissa sallitaan muuttujan y_{t-1} etumerkin vaikuttavan ehdolliseen varianssiin. Tässä ns. kynnyksmallissa ehdollinen varianssi määritellään yhtälöllä

$$h_t = \omega + \beta h_{t-1} + \alpha y_{t-1}^2 + \pi \mathbf{1}(y_{t-1} > 0) y_{t-1}^2,$$

jossa $\omega > 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ ja $\alpha + \pi \geq 0$. Lisäksi, indikaattorifunktio $\mathbf{1}(y_{t-1} > 0)$ saa arvon yksi, kun $y_{t-1} > 0$, ja nolla, kun $y_{t-1} \leq 0$.¹⁸ Parametreja koskevat epäyhtälörajoitteet takaavat jälleen ehdollisen varianssin positiivisuuden. Huomaa, että indikaattorifunktiossa voisi olla ε_{t-1} muuttujan y_{t-1} paikalla (ks. (5.1)). Stationaarisuus ja varianssin $E(y_t^2)$ äärellisyys riippuvat virhetermin ε_t jakaumasta. Symmetrisen jakauksen tapauksessa vaaditaan $\alpha + \beta + \pi/2 < 1$.

Erityisesti osaketuottojen tapauksessa muuttuja y_{t-1} tulkitaan usein markkinoille tulevaksi uutiseksi. Kynnyksmallin mukaan positiivisilla ja negatiivisilla uutisilla voi olla erilainen vaikutus seuraavan periodin ehdolliseen varianssiin. Jos eroa on, on

¹⁸Tästä mallista käytetään myös nimitystä GJR-malli, jossa lyhennys tulee mallin esittäjien sukunimistä (Glosten, Jagannathan ja Runkle).

negatiivisten uutisten havaittu kasvattavan ehdollista varianssia enemmän kuin positiivisten uutisten, joten tällöin $\pi \leq 0$.

Ns. EGARCH-mallissa ($E \leftrightarrow$ 'exponent') uutisten etumerkillä voi myös olla vaikutusta. Muista edellä tarkastelluista malleista poiketen siinä mallinnetaan ehdollisen varianssin logaritmia. Määrittely-yhtälö on

$$\log h_t = \omega + \beta \log h_{t-1} + \alpha \varepsilon_{t-1} + \pi (|\varepsilon_{t-1}| - \mathbf{E}(|\varepsilon_{t-1}|)).$$

Logaritmin käytöllä on se etu, ettei parametreille tarvitse asettaa ehtoja, jotta ehdollinen varianssi olisi positiivinen. Koska malliyhtälön oikealla puolella on ε_{t-1} eikä y_{t-1} , voidaan prosessin $\log h_{t-1}$ ja siten h_t :n ja y_t :n stationaarisuus päätellä kuten AR(1)-prosessin tapauksessa. Koska $g(\varepsilon_{t-1}) \equiv \alpha \varepsilon_{t-1} + \pi (|\varepsilon_{t-1}| - \mathbf{E}(|\varepsilon_{t-1}|))$ on iid-prosessi, jonka odotusarvo on nolla ja varianssi äärellinen, takaa ehto $|\beta| < 1$ ehdollisen varianssin h_t ja yhtälön (5.1) mukaan edelleen y_t :n stationaarisuuden. Kirjoittamalla

$$g(\varepsilon_{t-1}) = (\alpha + \pi)\varepsilon_{t-1}\mathbf{1}(\varepsilon_{t-1} > 0) + (\alpha - \pi)\varepsilon_{t-1}\mathbf{1}(\varepsilon_{t-1} \leq 0) - \pi\mathbf{E}(|\varepsilon_{t-1}|)$$

nähdään, että negatiivisten uutisten vaikutus on $\alpha - \pi$ ja positiivisten $\alpha + \pi$.

5.7 Ehdollisen varianssin ennustaminen

Seuraavassa tarkastellaan ehdollisen varianssin ennustamista, jolla todettiin jakson 5.1 lopussa olevan mielenkiintoa erityisesti osaketuottojen tapauksessa. Prosessin y_t ennustaminen ei sen sijaan ole kiinnostava kysymys, koska $\mathbf{E}_{t-1}(y_t) = 0$ kuten yhtälön (5.1) jälkeen todettiin. Yksinkertaisuuden vuoksi rajoitutaan GARCH(1,1)-malliin, joka oletetaan vahvasti stationaariseksi. Ehdollisen varianssin määritelmä vaatii lisäksi ehdon $\mathbf{E}(y_{t+1}^2) < \infty$ ja ennusteen keskineliövirheen äärellisyys ehdon $\mathbf{E}(y_{t+1}^4) < \infty$. Laskelmissa käytetään toistuvasti jakson 3.4 alussa esitettyjä ehdollisen odotusarvon ominaisuuksia EO1-EO4.

Tarkastellaan ehdollisen varianssin ennustamista ajankohtana t . Jaksossa 5.4 nähtiin, että h_{t+1} on funktio muuttujista y_t, y_{t-1}, \dots , joten ensimmäinen ehdollinen varianssi, jota tarvitsee ennustaa on h_{t+2} . Ottamalla yhtälöstä

$$h_{t+2} = \omega + \beta h_{t+1} + \alpha y_{t+1}^2$$

puolittain ehdollinen odotusarvo ehdolla $\{y_t, y_{t-1}, \dots\}$ saadaan h_{t+2} :n (keskineliövirheen mielessä) optimaalinen ennuste

$$\mathbf{E}_t(h_{t+2}) = \omega + \beta \mathbf{E}_t(h_{t+1}) + \alpha \mathbf{E}_t(y_{t+1}^2),$$

jossa $\mathbf{E}_t(h_{t+1}) = h_{t+1}$ (ks. EO4). Yhtälöstä (5.1) saadaan lisäksi (ks. EO2 ja EO4)

$$\mathbf{E}_t(y_{t+1}^2) = \mathbf{E}_t(h_{t+1}\varepsilon_{t+1}^2) = h_{t+1}\mathbf{E}_t(\varepsilon_{t+1}^2) = h_{t+1}\mathbf{E}(\varepsilon_{t+1}^2) = h_{t+1},$$

joten

$$\mathbf{E}_t(h_{t+2}) = \omega + (\alpha + \beta)h_{t+1}.$$

Kun ennustehorisontti $k \geq 3$, saadaan samalla tavalla yhtälö

$$\mathbf{E}_t(h_{t+k}) = \omega + \beta\mathbf{E}_t(h_{t+k-1}) + \alpha\mathbf{E}_t(y_{t+k-1}^2).$$

Tässä

$$\mathbf{E}_t(y_{t+k-1}^2) = \mathbf{E}_t(h_{t+k-1}\varepsilon_{t+k-1}^2) = \mathbf{E}_t[\mathbf{E}_{t+k-2}(h_{t+k-1}\varepsilon_{t+k-1}^2)],$$

jossa jälkimmäinen yhtälö voidaan perustella ehdollisen odotusarvon ominaisuuden EO3 eli iteroidun odotusarvon lain yleistyksellä.¹⁹ Koska

$$\mathbf{E}_{t+k-2}(h_{t+k-1}\varepsilon_{t+k-1}^2) = h_{t+k-1}\mathbf{E}_{t+k-2}(\varepsilon_{t+k-1}^2) = h_{t+k-1},$$

saadaan

$$\mathbf{E}_t(y_{t+k-1}^2) = \mathbf{E}_t(h_{t+k-1}), \quad k = 3, 4, \dots$$

Kaiken kaikkiaan on todettu, että

$$\mathbf{E}_t(h_{t+k}) = \omega + (\alpha + \beta)\mathbf{E}_t(h_{t+k-1}), \quad k = 2, 3, \dots$$

Koska $\mathbf{E}_t(h_{t+1}) = h_{t+1}$, saadaan tästä induktiolla ratkaisu

$$\mathbf{E}_t(h_{t+k}) = \omega \sum_{j=0}^{k-2} (\alpha + \beta)^j + (\alpha + \beta)^{k-1} h_{t+1}, \quad k = 2, 3, \dots,$$

jossa h_{t+1} on funktio ennustejankohtana tunnetuista muuttujista $\{y_t, y_{t-1}, \dots\}$.

Käytännössä parametrien ω , α ja β paikalla täytyy tietenkä käyttää estimaatteja. Toisin kuin ARMA-malleissa, on nyt ennustettava suurekin ei-havaittava, mutta voidaan laskea yhtälön (5.8) avulla kaikilla $t \geq 1$, kunhan (parametriarvojen lisäksi myös) alkuarvot h_0 ja y_0 tunnetaan. Jälkimmäinen voidaan olettaa tunnetuksi, mutta edellistä ei. Alkuarvoksi h_0 valitaan usein havaitusta aikasarjasta laskettu otosvarianssi. Stationaarisessa tapauksessa alkuarvojen vaikutus häviää t :n kasvaessa.

Yleisen GARCH(r,s)-mallin ennustaminen sujuu periaatteessa samalla tavalla kuin edellä esitetyn erikoistapauksen, joskin kaavoista tulee monimutkaisempia. Ennusteiden luottamusvälien muodostaminen on niin ikään monimutkaista mm. siksi, että ehdollisen varianssin jakauma on vahvasti normaalista poikkeava.

5.8 GARCH-mallien parametrien estimointi

Tarkastellaan edellä esitettyjen GARCH-mallien parametrien estimointia olettaen, että yhtälössä (5.1) $\varepsilon_t \sim \text{nid}(0, 1)$ ja että aineiston taustalla oleva GARCH-prosessi on stationaarinen. Tarkastelu on yleisluonteinen ja soveltuu myös muille kuin edellä esitetuille ehdollisen varianssin malleille.

¹⁹Tämän yleistyksen mukaan $\mathbf{E}(Y|X_2) = \mathbf{E}[\mathbf{E}(Y|X_1)|X_2]$, kun (mahdollisesti ääretönulotteisen) satunnaisvektorin X_2 komponentit muodostavat X_1 :n komponenttien osajoukon (tai yleisemmin X_2 on X_1 :n funktio).

Normaalijakaumaan perustuva uskottavuusfunktio. Koska yhtälössä (5.1) h_t riippuu prosessin y_t menneistä arvoista y_{t-1}, y_{t-2}, \dots ja on riippumaton virhetermistä ε_t , on y_t :n ehdollinen jakauma ehdolla $\{y_{t-1}, y_{t-2}, \dots\}$ normaalin odotusarvona nolla ja varianssina h_t eli lyhennysmerkinnöin pätee

$$y_t | \{y_{t-j}, j \geq 1\} \sim \mathbf{N}(0, h_t). \quad (5.11)$$

Oletetaan, että käytettävissä on havaittu aikasarja $y_{-l}, \dots, y_0, y_1, \dots, y_T$, jossa ensimmäiset $l + 1$ havaintoa käytetään uskottavuusfunktiossa esiintyvien ehdollisten varianssien h_1, \dots, h_T arvojen laskemiseen. Esimerkiksi GARCH(1,1)-mallissa $l = 0$ (ks. (5.10)). Seuraavassa johdetaan havaintoja vastaavien satunnaismuuttujien yhteistihyysfunktio käyttäen yleistä menettelyä, joka soveltuu muissakin yhteyksissä.

Merkitään $\mathbf{Y}_t = (\mathbf{Y}_0, y_1, \dots, y_t)$, $t = 1, \dots, T$, jossa $\mathbf{Y}_0 = (y_{-l}, \dots, y_0, h_{-k}, \dots, h_0)$ eli \mathbf{Y}_0 sisältää myös ehdollisten varianssien h_1, \dots, h_T arvojen laskemisessa tarvittavat aikaisemmat ehdollisen varianssin arvot. Esimerkiksi GARCH(1,1)-mallin tapauksessa $k = 0$ ja $\mathbf{Y}_0 = (h_0, y_0)$. Jättäen argumentit yksinkertaisuuden vuoksi pois merkitään satunnaisvektorin \mathbf{Y}_t tiheysfunktioita symbolilla $f_{\mathbf{Y}_t}$. Tällöin alkuarvoilla h_{-k}, \dots, h_0 täydennetyin aineiston tiheysfunktio on $f_{\mathbf{Y}_T}$. Käyttäen ehdollisen tiheysfunktion kaavaa saadaan

$$f_{\mathbf{Y}_T} = f_{y_T | \mathbf{Y}_{T-1}} \cdot f_{\mathbf{Y}_{T-1}} = f_{y_T | \mathbf{Y}_{T-1}} \cdot f_{y_{T-1} | \mathbf{Y}_{T-2}} \cdot f_{\mathbf{Y}_{T-2}} = \dots = \prod_{t=1}^T f_{y_t | \mathbf{Y}_{t-1}} f_{\mathbf{Y}_0}.$$

Alkuarvossa \mathbf{Y}_0 olevia ehdollisia variansseja ei käytännössä havaita eikä alkuarvon jakaumaakaan tunneta. Tästä syystä \mathbf{Y}_0 :n tiheysfunktio $f_{\mathbf{Y}_0}$ jätetään pois uskottavuusfunktioista eli uskottavuusfunktio perustetaan ehdolliseen tiheysfunktioon

$$f_{\mathbf{Y}_T} / f_{\mathbf{Y}_0} = \prod_{t=1}^T f_{y_t | \mathbf{Y}_{t-1}}.$$

Tämä merkitsee, että alkuarvo \mathbf{Y}_0 tulkitaan ei-satunnaiseksi. Stationaarisuuden voimassa ollessa tällaisen alkuarvo-oletuksen vaikutus on suurissa otoksissa kuitenkin mitätön. Huomaa, että edellä esitetyssä ei käytetty normaalisuusoletusta, joten esitetty päättely pätee muillakin jakaumilla.

Edellä todetun perusteella riittää (ehdollisen) uskottavuusfunktion johtamiseksi selvittää satunnaismuuttujien y_t ehdollinen jakauma ehdolla \mathbf{Y}_{t-1} ($t = 1, \dots, T$).²⁰ Normaalisuusoletuksesta seuraavan tuloksen (5.11) mukaan nämä ehdolliset jakaumat ovat normaalisia odotusarvona nolla ja varianssina h_t . Tällöin siis $f_{y_t | \mathbf{Y}_{t-1}} = (2\pi h_t)^{-1/2} \exp\{-y_t^2 / 2h_t\}$ ja log-uskottavuusfunktioiksi saadaan

$$\tilde{l}(\boldsymbol{\delta}) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log h_t(\boldsymbol{\delta}) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{y_t^2}{h_t(\boldsymbol{\delta})},$$

²⁰Jatkossa puhutaan yksinkertaisuuden vuoksi yleensä uskottavuusfunktioista unohtaen sen approksimatiivinen luonne.

jossa argumentti $\boldsymbol{\delta}$ ehdollisessa varianssissa sisältää tarkasteltavan GARCH-mallin parametrit eli esimerkiksi GARCH(1,1)-mallin tapauksessa $\boldsymbol{\delta} = (\omega, \alpha, \beta)$.

Uskottavuusfunktion maksimointi vaatii numeerisia menetelmiä, jotka ovat periaatteessa samanlaisia kuin ARMA(p,q)-mallin yhteydessä jaksossa 4.4 kuvatut menetelmät. Tarvittavan log-uskottavuusfunktion arvon laskeminen annetuilla parametriarvoilla vaatii ehdollisen varianssin arvon laskemisen, mikä ei onnistu, ellei alkuarvoja h_{-k}, \dots, h_0 valita tavalla tai toisella. Tyypillisin valinta lienee aineistosta laskettu otosvariassi. Jos uskottavuusfunktion maksimointi suoritetaan jaksossa 4.4 kuvattua Newton-Raphson -tyyppistä menetelmää käyttäen, tarvitaan log-uskottavuusfunktion ensimmäiset ja toiset derivaatat tai yhtäpitävästi funktion $h_t(\boldsymbol{\delta})$ ensimmäiset ja toiset derivaatat. Esimerkiksi GARCH(r,s)-mallin tapauksessa ne voidaan laskea analyttisesti yhtälöä (5.10) käyttäen. Laskelmat ovat periaatteessa suoraviivaisia, mutta toisten derivaattojen tapauksessa hieman monimutkaisia. Vaihtoehtoisesti voidaan käyttää numeerisesti laskettuja derivaattoja.

Tilastollinen päättely. Jos normaalisuusoletus pätee, voidaan tavanomaiset SU-estimaattorin $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ asymptoottiset tulokset osoittaa päteviksi huolimatta uskottavuusfunktion approksimatiivisesta luonteesta. Toisin sanoen, pätee

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}_{as} \sim \mathbf{N}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{V}(\boldsymbol{\delta})^{-1}), \quad (5.12)$$

jossa matriisi $\mathbf{V}(\boldsymbol{\delta}) = \mathbf{E}[-\partial^2 \tilde{l}(\boldsymbol{\delta}) / \partial \boldsymbol{\delta} \partial \boldsymbol{\delta}']$ on (approksimatiivisesta uskottavuusfunktiosta muodostettu) parametrin $\boldsymbol{\delta}$ Fisherin informaatiomatriisi. Todettakoon, että tulos (5.12) pätee myös silloin, kun havainnoista vähennetään otoskeskiarvo nolasta mahdollisesti poikkeavan odotusarvon huomioon ottamiseksi.

Käytännössä voi oletettu normaalijakauma osoittautua epärealistiseksi. Erityisesti osake- ja valuuttakurssituottojen tapauksessa residuaalien $\hat{\varepsilon}_t = y_t / \hat{h}_t^{1/2}$ ($\hat{h}_t^{1/2} = h_t^{1/2}(\hat{\boldsymbol{\delta}})$) jakauman on usein havaittu olevan normaalijakaumaa huipukkaampi ja paksuhäntäisempi. Toisin kuin ARMA(p,q)-mallin tapauksessa (ks. jakso 4.4) ei tulos (5.12) päde, jos virhetermin jakauma poikkeaa normaalijakaumasta. Tavanomaiseen uskottavuusteoriaan perustuvat keskivirheet, testit ja luottamusvälit ovat siten asymptoottisestikin pätemättömiä. Tätä ongelmaa voidaan yrittää ratkaista joko modifioidulla estimaattorin $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ asymptoottista jakaumaa (5.12) tai käyttämällä ei-normaalista jakaumaa.

Vaikka normaalisuusoletus (5.11) ei päisisikään, voidaan virheelliseen uskottavuusfunktioon perustuva estimaattori $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ osoittaa tarkentuvaksi ja asymptoottisesti normaaliseksi yleisin oletuksin. Tuloksen (5.12) asemesta pätee tällöin

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}_{as} \sim \mathbf{N}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{V}(\boldsymbol{\delta})^{-1} \mathbf{B}(\boldsymbol{\delta}) \mathbf{V}(\boldsymbol{\delta})^{-1}), \quad (5.13)$$

jossa

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{\delta}) = \mathbf{E} \left[\sum_{t=1}^T \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\delta}} \tilde{l}_t(\boldsymbol{\delta}) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\delta}} \tilde{l}_t(\boldsymbol{\delta}) \right)' \right]$$

ja $\tilde{l}_t(\boldsymbol{\delta})$ on havainnon y_t (ehdollinen) log-uskottavuus eli

$$\tilde{l}_t(\boldsymbol{\delta}) = -\frac{1}{2} \log h_t(\boldsymbol{\delta}) - \frac{y_t^2}{2h_t(\boldsymbol{\delta})}.$$

Jos normaalisuusoletus pätee, pätee tulos (5.13) yleisen uskottavuusteorian mukaisesti muodossa $\mathbf{B}(\boldsymbol{\delta}) = \mathbf{V}(\boldsymbol{\delta})$ eli saadaan aikaisempi tulos (5.12).²¹

Mainittakoon, että tulos (5.13) (ja siten myös (5.12)) voidaan osoittaa päteväksi siinäkin tapauksessa, että heikon stationaarisuuden ehto ei päde eikä h_t :tä voida siten tulkita ehdolliseksi varianssiksi. Tästä huolimatta prosessi h_t kuvaa havaitussa aikasarjassa ilmenevää ”volatiilisuuutta”. Vahvan stationaarisuuden ehto vaaditaan kuitenkin, joten esimerkiksi GARCH(1,1)-mallissa voi olla $\alpha + \beta \geq 1$, kunhan $E[\log(\beta + \alpha\varepsilon_t^2)] < 0$ pätee. Tällainen tilanne saattaa tulla vastaan joissakin vahvasti heteroskedastisissa tapauksissa. Tuloksen (5.13) hyvistä teoreettisista ominaisuuksista huolimatta on hyvä muistaa, että ei-normaalissa tapauksessa estimaattori $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ ei ole tehokas.

Käyttäen matriisien $\mathbf{V}(\boldsymbol{\beta})$ ja $\mathbf{B}(\boldsymbol{\delta})$ empiirisiä vastineita

$$\hat{\mathbf{V}}(\hat{\boldsymbol{\delta}}) = -\partial^2 \tilde{l}(\hat{\boldsymbol{\delta}}) / \partial \boldsymbol{\delta} \partial \boldsymbol{\delta}' \quad \text{ja} \quad \hat{\mathbf{B}}(\hat{\boldsymbol{\delta}}) = \sum_{t=1}^T \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\delta}} \tilde{l}_t(\hat{\boldsymbol{\delta}}) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\delta}} \tilde{l}_t(\hat{\boldsymbol{\delta}}) \right)'$$

voidaan tulokseen (5.13) perustuvan Waldin testin avulla testata parametria $\boldsymbol{\delta}$ koskevia hypoteeseja tilastollisen päättelyn kurssilla esitetyllä tavalla. Erityisesti matriisin $\hat{\mathbf{V}}(\hat{\boldsymbol{\delta}})^{-1} \hat{\mathbf{B}}(\hat{\boldsymbol{\delta}}) \hat{\mathbf{V}}(\hat{\boldsymbol{\delta}})^{-1}$ diagonaalialkioiden neliöjuuria voidaan käyttää estimaattorin $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ komponenttien likimääräisinä keskivirheinä ja tulkita vastaavat estimaatit ”merkitsevästi” nolasta poikkeaviksi, jos ne ylittävät itseisarvoltaan 2 kertaa likimääräisen keskivirheensä. Uskottavuusosamäärätestin soveltuvuus vaatii kuitenkin normaalisuusoletuksen paikkansapitävyyden. Tällöin voidaan edellä myös valita $\hat{\mathbf{B}}(\hat{\boldsymbol{\delta}}) = \hat{\mathbf{V}}(\hat{\boldsymbol{\delta}})$ eli muodostaa Waldin testi ja keskivirheet tavanomaiseen tapaan.

Ei-normaalisten jakaumien tapaus. Ei-normaalista virhejakaumaista yleisimmin käytetty lienee t-jakauma, jonka vapausasteluku on reaalinen ja joka standardoidaan siten, että $E(\varepsilon_t^2) = 1$ pätee. Tällöin virhetermin ε_t tiheysfunktio on

$$t(\varepsilon_t; \eta) = \frac{\Gamma((\eta + 1)/2)}{\sqrt{\pi}(\eta - 2)\Gamma(\eta/2)} \left(1 + \frac{\varepsilon_t^2}{\eta - 2} \right)^{-(\eta+1)/2},$$

²¹Jos $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$, on $\partial \tilde{l}_t(\boldsymbol{\delta}) / \partial \boldsymbol{\delta}$ havainnosta y_t muodostettu parametrin $\boldsymbol{\delta}$ pistemäärävektori ja eri havaintoihin liittyvät pistemäärävektorit ovat korreloimattomia (tämä tulos, jonka perustelu jätetään tehtäväksi, pätee myös ilman normaalisuusoletusta). Yhtälö $\mathbf{B}(\boldsymbol{\delta}) = \mathbf{V}(\boldsymbol{\delta})$ vastaa siten tilastollisen päättelyn kurssilla esitettyä tulosta, jonka mukaan pistemäärävektorin kovarianssimatriisi on yhtä kuin Fisherin informaatiomatriisi.

jossa $\Gamma(\cdot)$ on gammafunktio ja vapausasteluku $\eta > 2$ ($\eta > 4$, jos $E(\varepsilon_t^4) < \infty$ halutaan). Uskottavuusfunktiossa vapausasteluku on estimoitava parametri. Koska satunnaismuuttujan $y_t = h_t^{1/2} \varepsilon_t$ ehdollinen tiheysfunktio ehdolla $\{y_{t-1}, y_{t-2}, \dots\}$ on nyt $h_t^{-1/2} \mathbf{t}(y_t/h_t^{1/2}; \eta)$ ²², saadaan (approksimatiiviseksi) log-uskottavuusfunktioiksi

$$\tilde{l}(\boldsymbol{\delta}; \eta) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log h_t(\boldsymbol{\delta}) + \sum_{t=1}^T \log \mathbf{t}(y_t/h_t^{1/2}(\boldsymbol{\delta}); \eta),$$

joka voidaan maksimoida numeerisesti samaan tapaan kuin normaalijakauman tapauksessakin. Jos t-jakaumaoletus on oikea, voidaan käyttää tuloksen (5.12) vastineeseen perustuvia testejä ja luottamusvälejä, kunhan $\mathbf{V}(\boldsymbol{\delta})$ korvataan ilmeisellä tavalla määritellyllä vastineella $\mathbf{V}(\boldsymbol{\delta}; \eta)$. Jos t-jakaumakaan ei ole oikea, voidaan käyttää vastaavalla tavalla tuloksen (5.13) vastineeseen perustuvia testejä ja luottamusvälejä. Vastaavalla tavalla voidaan menetellä myös muiden ei-normaalisten virhejakaumien tapauksessa.

5.9 Mallin riittävyyden tarkistaminen

Kun mallin parametrit on estimoitu, on syytä tutkia estimoidun mallin riittävyyttä samaan tapaan kuin ARMA-malleissakin. Residuaalien $\hat{\varepsilon}_t = y_t/\hat{h}_t^{1/2}$ aikasarja on hyvä piirtää ja tutkia havaitaanko poikkeamia tehdyistä oletuksista. Kuten edellä jo mainittiin, on residuaalien jakauma usein huipukkaampi ja paksuhäntäisempi kuin normaalijakauma. Tehdyn jakaumaoletuksen realistisuutta voidaan tutkia residuaalien histogrammin avulla tavanomaiseen tapaan.

Toinen kiinnostava kysymys koskee estimoidun mallin kykyä kuvata sarjan ehdollista heteroskedastisuutta. Tätä voidaan tutkia neliöityjen residuaalien $\hat{\varepsilon}_t^2$ otosautokorrelaatiofunktion avulla. On kuitenkin syytä huomata, että aikaisemmin ARMA-malleilla soveltuvat tavanomaiset kriittiset rajat $\pm 1.96/\sqrt{T}$ eivät ole tässä tapauksessa (edes asymptoottisesti) päteviä. Sama koskee neliöityjen residuaalien $\hat{\varepsilon}_t^2$ otosautokorrelaatiofunktioista laskettua McLeodin ja Lin testisuuretta. Saman tyyppisiä asymptoottisesti päteviä testejä on kehitetty ja liitetty myös joihinkin yleisesti käytössä oleviin ohjelmistoihin. Näiden testien esittäminen sivuutetaan kuitenkin, koska testisuureet ovat melko monimutkaisia.

Valitun mallin riittävyyttä voidaan tutkia myös estimoimalla laajempia vaihtoehtoja. Esimerkiksi usein esiintyvän GARCH(1,1)-mallin tapauksessa voidaan estimoida GARCH(2,1)- ja GARCH(1,2)-mallit ja tutkia lisäparametrien tarpeellisuutta. Aiemmin mainitun identifiointiongelman vuoksi ei ole syytä kasvattaa molempia asteita samanaikaisesti. Eri malleja voidaan verrata myös mallinvalintakriteerejä käyttäen.

²²Tämä tulos saadaan satunnaismuuttujien muunnosten jakaumateoriasta. Vastaavasti voidaan menetellä myös muiden ei-normaalisten jakaumien tapauksessa.

GARCH(r,s)-mallin tapauksessa kriteerifunktioksi voidaan valita (vrt. jakso 4.4)

$$C(r, s) = -\frac{2}{T} \tilde{l}(\hat{\boldsymbol{\delta}}) + (r + s + 1) g(T) / T,$$

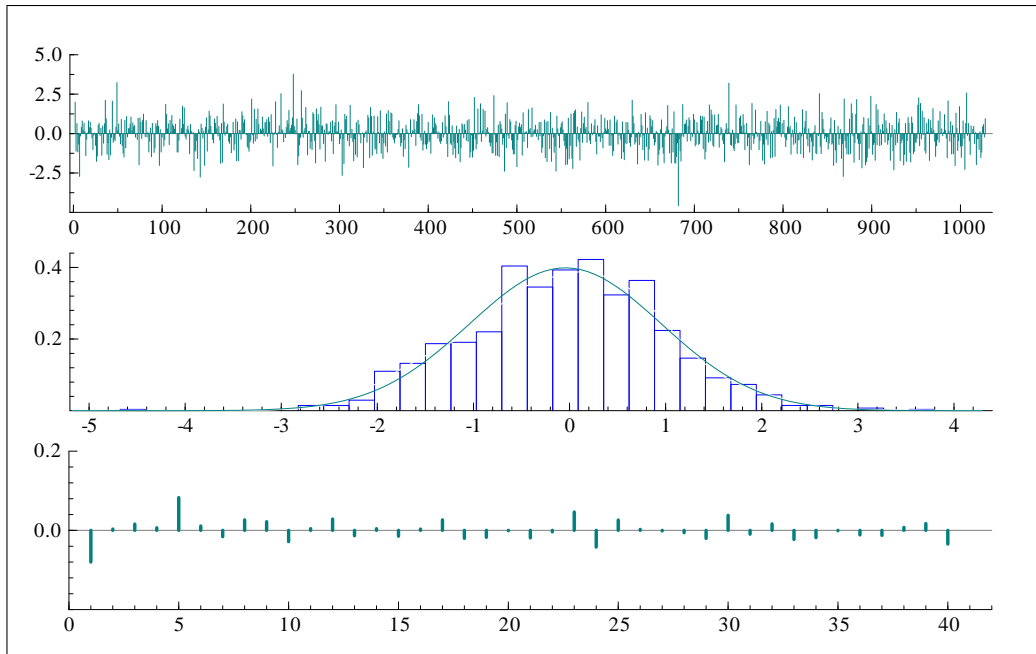
jossa sakkofunktio $g(\cdot)$ on kuten jaksossa 4.3. Tässä oletettu normaalijakaumaan perustuva (ehdollinen) uskottavuusfunktio voidaan korvata muulla kuten t-jakaumaan perustuvalla vastineella $\tilde{l}(\hat{\boldsymbol{\delta}}; \hat{\boldsymbol{\eta}})$.

5.10 Empiirinen esimerkki

Tarkastellaan empiirisenä esimerkkinä Kuvion 5.1 DAX-indeksin päivätuottosarjaa ($T = 1028$). Normaalijakaumaan perustuvan GARCH(1,1)-mallin SU-estimointi tuottaa estimoiduksi ehdolliseksi varianssiksi

$$\hat{h}_t = \underset{\substack{(0.025) \\ [0.023]}}{0.062} + \underset{\substack{(0.020) \\ [0.021]}}{0.887} \hat{h}_{t-1} + \underset{\substack{(0.017) \\ [0.020]}}{0.094} y_{t-1}^2, \quad (5.14)$$

jossa tavallisissa suluissa on tulokseen (5.12) perustuvat keskivirheet ja hakasuluissa tulokseen (5.13) perustuvat ns. robustit keskivirheet. Tässä tapauksessa molemmat



Kuvio 5.2. Kuvion 5.1 DAX-sarjaan sovitetusta GARCH(1,1)-mallista (5.14) laskettu residuaalisarja (ylinnä), sen histogrammi ja $N(0, 1)$ -jakauman tiheysfunktio (keskellä) sekä neliöityjen residuaalien otosautokorrelaatiofunktio viipymillä $h = 1, \dots, 40$ (alinna).

keskivirheet ovat lähellä toisiaan. Summan $\alpha + \beta$ estimaatiksi saadaan 0.981, mikä osoittaa voimakasta riippuvuutta ehdollisessa varianssissa. Heikon stationaarisuuden ehto ($\alpha + \beta < 1$) toteutuu kuitenkin.

Kuviossa 5.2 on esitetty malliin (5.14) perustuvat residuaalit, niiden histogrammi ja neliöiden autokorrelaatiofunktio. Tässä tapauksessa normaalijakauma näyttää toimivan varsin hyvin. Joitakin itseisarvoltaan suuria residuaaleja tosin esiintyy, mutta estimointitulos ei kuitenkaan muutu olennaisesti käytettäessä (normaalijakaumaa paksuhäntäisempää) t-jakaumaa. Estimoiduksi vapausasteluvuksi saadaan 32.89, jota vastaava t-jakauma on lähellä normaalijakaumaa. Neliöityjen residuaalien ensimmäinen ja viides autokorrelaatio ovat suurehkoja (≈ 0.08) havaintojen suuri lukumäärä huomioon ottaen ($1.96/\sqrt{1028} \approx 0.06$).

Kokeiltaessa GARCH(2,1)- ja GARCH(1,2)-malleja osoittautui jälkimmäinen sopivammaksi mm. mallinvalintakriteerien mukaan.²³ Käytettäessä normaalijakaumaan perustuvaa SU-estimointia saadaan ehdolliseksi varianssiksi

$$\hat{h}_t = \underset{\substack{(0.032) \\ [0.033]}}{0.086} + \underset{\substack{(0.026) \\ [0.032]}}{0.855}\hat{h}_{t-1} - \underset{\substack{(0.029) \\ [0.032]}}{0.027}y_{t-1}^2 + \underset{\substack{(0.034) \\ [0.042]}}{0.146}y_{t-2}^2. \quad (5.15)$$

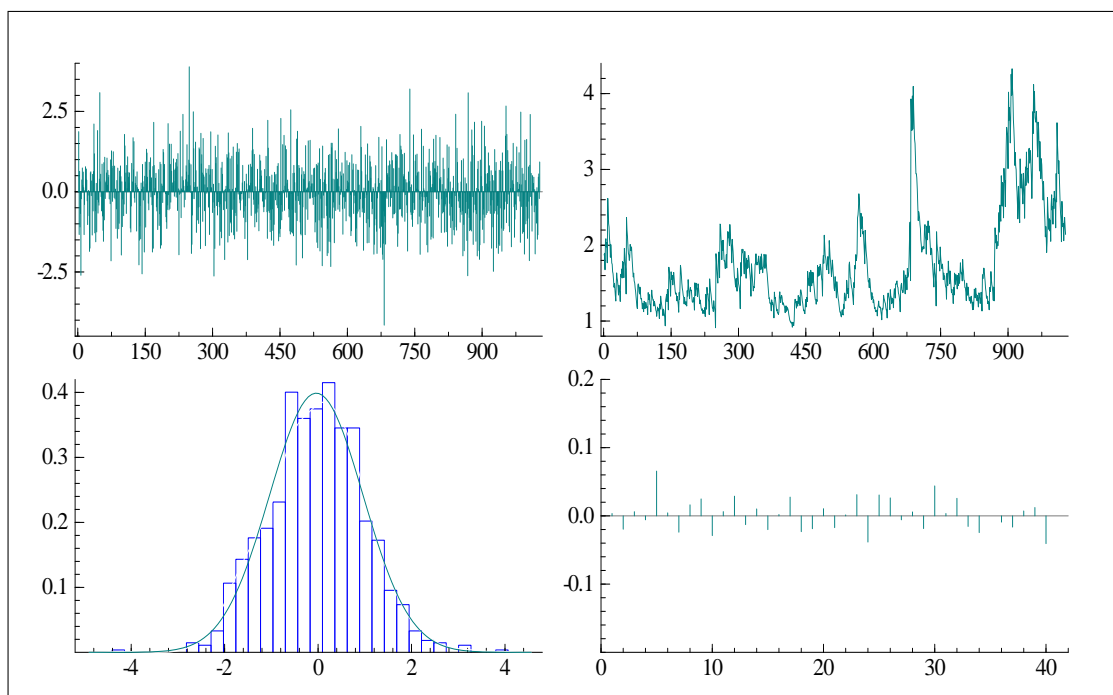
Estimointitulos näyttää tukevan asteen $s = 2$ valintaa. Huomaa, että käytetty tietokoneohjelma (PCGIVE) sallii parametrin α_1 negatiivisen estimaatin.²⁴ Estimoidun polynomin $1 - \beta(z) - \alpha(z)$ juuret ovat -6.69 ja 1.02 , joten heikon stationaarisuuden ehto on jälleen niukasti voimassa. Asteen s kasvattaminen näkyy positiivisesti myös Kuviossa 5.3 esitetystä neliöityjen residuaalien autokorelaatiofunktiossa, sillä ensimmäinen ja viides autokorrelaatio ovat pienentyneet aikaisemmasta (ensimmäinen on nyt 0.003 ja viides 0.066). Tavalliset ja robustit keskivirheet poikkeavat tässä tapauksessa jonkin verran enemmän toisistaan kuin mallissa (5.14). Joistakin hieman poikkeavista residuaaleista huolimatta jakauma ei poikkea histogrammin perusteella kovin selvästi normaalijakaumasta. Kokeiltaessa t-jakaumaa saadaan vapausasteluvun estimaatiksi 45.95, jota vastaava t-jakauma on lähellä normaalijakaumaa. Kuvion 5.3. oikeassa yläkulmassa esitetystä ehdollisen hajonnan aikasarjassa havaitaan voimakasta vaihtelua, mikä (odotetusti) vastaa sarjassa havaittua volatiilisuu-den vaihtelua (ks. Kuvio 5.1).

6 AR-GARCH-malli

Tähän mennessä on tarkasteltu erikseen ehdollisen odotusarvon mallintamista ARMA-malleilla ja ehdollisen varianssin mallintamista GARCH-malleilla. Nämä mallit on

²³Koska vertailtavissa malleissa on tässä tapauksessa yhtä monta parametria, on mallinvalintakriteerien käyttö yhtäpitävää uskottavuusfunktion maksimiarvojen vertailun kanssa.

²⁴GARCH(1,2)-mallissa ehdot $\omega > 0$, $\beta_1 \geq 0$ ja $\beta_1\alpha_1 + \alpha_2 \geq 0$ takaavat ehdollisen varianssin positiivisuuden. Mallin (5.15) estimaatit toteuttavat nämä ehdot.



Kuvio 5.3. Kuvion 5.1 DAX-sarjaan sovitetusta GARCH(1,2)-mallista (5.15) laskettu residuaalisarja (ylh. vas.), sen histogrammi ja $N(0, 1)$ -jakuman tiheysfunktio (alh. vas.), neliöityjen residuaalien otosautokorrelaatiofunktio viipymillä $h = 1, \dots, 40$ (alh. oik.) ja estimoitu ehdollinen hajonta $\hat{h}_t^{1/2}$ (ylh. oik.).

mahdollista yhdistää ARMA-GARCH-malliksi, jossa sekä prosessin ehdollinen odotusarvo että ehdollinen varianssi riippuvat prosessin menneisyydestä. Yksinkertaisuuden vuoksi rajoitutaan seuraavassa tapaukseen, jossa ehdollinen odotusarvo mallinnetaan autoregressiivisellä rakenteella.

6.1 Mallin määrittely

Tarkastellaan mallia

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + u_t \quad (6.1)$$

$$u_t = h_t^{1/2} \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}(0, 1), \quad (6.2)$$

jossa h_t on funktio muuttujista u_{t-j} , $j > 0$, ja virhetermi ε_t oletetaan riippumattomaksi muuttujista y_{t-j} , $j > 0$, ja siten myös muuttujista u_{t-j} , $j > 0$ (vrt. yhtälö (5.1)). Toisin sanoen, kysymyksessä on AR(p)-malli, jonka virhetermi on ehdollisesti heteroskedastinen (yhtälön (6.1) oikealle puolelle voitaisiin lisätä vakiotermi kuten jakson 4.2 AR(p)-mallissa). Kertoimien ϕ_1, \dots, ϕ_p oletetaan toteuttavan jaksossa 3.1

esitetty (riittävä) stationaarisuusehto. Ehdolliselle varianssille oletetaan konkreettisuuden vuoksi GARCH(r,s)-malli

$$h_t = \omega + \beta_1 h_{t-1} + \cdots + \beta_r h_{t-r} + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_s u_{t-s}^2, \quad (6.3)$$

jonka parametrit toteuttavat jaksossa 5.5 mainitut ei-negatiivisuusehdot, identifioituvuusehdon ja (ainakin vahvan) stationaarisuuden vaatiman ehdon. Jos myös heikon stationaarisuuden ehto täyttyy, ovat AR(p)-mallin (6.1) virheet autokorreloimattomia (ks. yhtälö (5.3)), mutta eivät riippumattomia. Ellei toisin mainita, oletetaan edellä mainitut oletukset seuraavassa.

Kuten aikaisemminkin, merkitään $\mathbf{E}_{t-1}(\cdot) = \mathbf{E}(\cdot \mid y_s, s \leq t-1)$. Koska h_t on myös funktio muuttujista y_{t-j} , $j > 0$, voidaan todeta samalla tavalla kuin yhtälön (5.1) jälkeen, että $\mathbf{E}_{t-1}(u_t) = h_t^{1/2} \mathbf{E}_{t-1}(\varepsilon_t) = h_t^{1/2} \mathbf{E}(\varepsilon_t) = 0$. Tämän ja yhtälön (6.1) avulla nähdään edellinen yhtälöistä

$$\mathbf{E}_{t-1}(y_t) = \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} \quad \text{ja} \quad \text{Var}_{t-1}(y_t) = h_t. \quad (6.4)$$

Jälkimmäinen voidaan todeta huomaamalla, että $y_t - \mathbf{E}_{t-1}(y_t) = u_t$ ja edelleen, että $\text{Var}_{t-1}(y_t) = \mathbf{E}_{t-1}(u_t^2) = h_t$, jossa jälkimmäinen yhtäsuuruus seuraa identiteetistä $u_t^2 = h_t \varepsilon_t^2$ samalla tavalla kuin jaksossa 5.8 (ks. s. 65). Yhtälöt (6.4) osoittavat prosessin ehdollisen odotusarvon ja varianssin riippuvan prosessin menneisyydestä.

6.2 Ennustaminen

Tarkastellaan havaintojen y_{t+k} ($k \geq 1$) arvojen ennustamista ajankohtana t . Oletetaan stationaarisuuden lisäksi $\mathbf{E}(y_t^2) < \infty$. Yhtälöistä (6.4) ensimmäisestä nähdään, että (keskineliövirheen mielessä) optimaalinen yhden askeleen ennuste on $\mathbf{E}_t(y_{t+1}) = \phi_1 y_t + \cdots + \phi_p y_{t+1-p}$. Kun $k \geq 2$, nähdään kuten jaksossa 5.8, että

$$\mathbf{E}_t(u_{t+k}) = \mathbf{E}_t[\mathbf{E}_{t+k-1}(u_{t+k})] = 0,$$

joten

$$\mathbf{E}_t(y_{t+k}) = \phi_1 \mathbf{E}_t(y_{t+k-1}) + \cdots + \phi_p \mathbf{E}_t(y_{t+k-p}), \quad k = 1, 2, \dots,$$

jossa $\mathbf{E}_t(y_{t+k-j}) = y_{t+k-j}$, kun $j \geq k$. Tästä ja jaksossa 3.4 esitetyistä AR(p)-prosessin ennustekaavoista voidaan päätellä edelleen, että optimaaliset ennusteet voidaan muodostaa rekursiivisesti aivan samalla tavalla kuin jakson 3.4 homoskedastisessa tapauksessa (ks. s. 35-36). Käytännössä täytyy tuntemattomat parametrit tietenkin korvata estimaateilla.

Vaikka ehdollinen heteroskedastisuus ei vaikutakaan ennusteisiin, vaikuttaa se ennusteiden kekkivirheisiin ja luottamusrajoihin. Koska ennusteet voidaan muodostaa samalla tavalla kuin homoskedastisessa AR(p)-mallissa, voidaan myös k :n askeleen ennustevirhe johtaa kuten AR(p)-mallissa. Edellä todetun nojalla

$$\mathbf{E}_t(u_{t+k-j}) = \begin{cases} u_{t+k-j}, & \text{kun } k \leq j \\ 0, & \text{kun } k > j, \end{cases}$$

joten (vrt. jakso 3.4, s. 37)

$$y_{t+k} - \mathbf{E}_t(y_{t+k}) = \sum_{j=0}^{k-1} \psi_j u_{t+k-j} = \sum_{j=0}^{k-1} \psi_j h_{t+k-j}^{1/2} \varepsilon_{t+k-j},$$

jossa ψ_j on saadaan (ilmeisin merkinnöin) potenssisarjasta $\psi(z) = \phi(z)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j$ ($\psi_0 = 1$).

Tarkastellaan lähemmin yhden askeleen ennustevirhettä, jonka ehdolliseksi odotusarvoksi saadaan

$$\mathbf{E}_t [y_{t+1} - \mathbf{E}_t(y_{t+1})] = \mathbf{E}_t(u_{t+1}) = 0$$

ja ehdolliseksi varianssiksi

$$\mathbf{E}_t [(y_{t+1} - \mathbf{E}_t(y_{t+1}))^2] = \mathbf{E}_t(u_{t+1}^2) = h_{t+1}.$$

Tämä osoittaa, että yhden askeleen ennustevirhe on ehdollisesti heteroskedastinen eli ennustetarkkuus riippuu siitä millaisia arvoja prosessi on saanut ennustejankohtana ja ennen sitä. Ennustevirheen lausekkeesta nähdään, että sama pätee myös ennustettaessa yhtä askelta pidemmälle. Ennustetarkkuutta koskevat tarkastelut kuten ennusteen luottamusrajat on näin ollen luonteva perustaa ehdolliseen jakaumaan, jossa ehdollistetaan prosessin ennustejankohtaan ulottuvaan historiaan asti.

Jos oletetaan, että $\varepsilon_t \sim \text{nid}(0, 1)$, on yhden askeleen ennustevirheen u_t ehdollinen jakauma ehdolla $\{y_{t-1}, y_{t-2}, \dots\}$ normaalin odotusarvona nolla ja varianssina h_t (vrt. (6.2) ja (5.11)). Tämän tuloksen avulla voidaan yhden askeleen ennusteelle muodostaa (ehdollisia) luottamusrajoja aivan kuten jaksossa 3.4. Usean askeleen ennusteiden luottamusrajoja ei kuitenkaan voida muodostaa yhtä helposti, sillä usean askeleen ennustevirheen ehdollinen jakauma ei ole normaalin eikä sille voida johtaa yksinkertaista esitystä.

Ehdollisen varianssin ennustaminen sujuu samalla tavalla kuin jaksossa 5.8, jossa $\mathbf{E}_{t-1}(y_t) = 0$, kun aikaisemmissa tarkasteluissa prosessi y_t korvataan prosessilla u_t .

6.3 Parametrien estimointi

Jos oletetaan $\varepsilon_t \sim \text{nid}(0, 1)$, voidaan (ehdollinen) uskottavuusfunktio johtaa käyttäen samaa periaatetta kuin jaksossa 5.8. Käyttäen samoja merkintöjä kuin jaksossa 5.8 voidaan todeta, että satunnaismuuttujan y_t ehdollinen jakauma ehdolla \mathbf{Y}_{t-1} ($t = 1, \dots, T$) on normaalin odotusarvona $\phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p}$ ja varianssina h_t (ks. (6.4)), jossa h_t määräytyy yhtälöstä (6.3) ja on siten parametrien $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_p)$ ja $\delta = (\omega, \alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_r)$ funktio. Asettamalla $\vartheta = (\phi, \delta)$ saadaan log-uskottavuusfunktioksi siten

$$\tilde{l}(\vartheta) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log h_t(\vartheta) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{u_t(\phi)^2}{h_t(\vartheta)},$$

jossa $u_t(\boldsymbol{\phi}) = y_t - \phi_1 y_{t-1} - \dots - \phi_p y_{t-p}$ ja $h_t(\boldsymbol{\vartheta})$ määritellään vastaavasti eli esimerkiksi tapauksessa $r = s = 1$ on $h_t(\boldsymbol{\vartheta}) = \omega + \beta h_{t-1}(\boldsymbol{\vartheta}) + \alpha u_{t-1}^2(\boldsymbol{\phi})$ (vrt. yhtälö (6.3)).

Uskottavuusfunktion maksimointi sujuu numeerisia menetelmiä käyttäen samaan tapaan kuin jaksojen 3.4 ja 5.8 ARMA- ja GARCH-malleissa. Jos uskottavuusfunktio maksimoituu pisteessä $\hat{\boldsymbol{\vartheta}} = (\hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\boldsymbol{\delta}})$, voidaan osoittaa, että ilman normaalisuusoletustakin pätee yleisin oletuksin²⁵

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_{as} \sim N(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{V}(\boldsymbol{\vartheta})^{-1} \mathbf{B}(\boldsymbol{\vartheta}) \mathbf{V}(\boldsymbol{\vartheta})^{-1}),$$

jossa

$$\mathbf{V}(\boldsymbol{\vartheta}) = E \left[-\partial^2 \tilde{l}(\boldsymbol{\vartheta}) / \partial \boldsymbol{\vartheta} \partial \boldsymbol{\vartheta}' \right] \quad \text{ja} \quad \mathbf{B}(\boldsymbol{\vartheta}) = E \left[\sum_{t=1}^T \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\vartheta}} \tilde{l}_t(\boldsymbol{\vartheta}) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\vartheta}} \tilde{l}_t(\boldsymbol{\vartheta}) \right)' \right].$$

Kuten jaksossa 5.8, on tässäkin $\tilde{l}_t(\boldsymbol{\vartheta})$ havainnon y_t (ehdollinen) log-uskottavuus eli

$$\tilde{l}_t(\boldsymbol{\vartheta}) = -\frac{1}{2} \log h_t(\boldsymbol{\vartheta}) - \frac{u_t(\boldsymbol{\phi})^2}{2h_t(\boldsymbol{\vartheta})}.$$

Käyttäen matriisien $\mathbf{V}(\boldsymbol{\vartheta})$ ja $\mathbf{B}(\boldsymbol{\vartheta})$ empiirisiä vastineita

$$\hat{\mathbf{V}}(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}) = -\partial^2 \tilde{l}(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}) / \partial \boldsymbol{\vartheta} \partial \boldsymbol{\vartheta}' \quad \text{ja} \quad \hat{\mathbf{B}}(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}) = \sum_{t=1}^T \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\vartheta}} \tilde{l}_t(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\vartheta}} \tilde{l}_t(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}) \right)'$$

voidaan edellä esitettyä estimaattorin $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$ asymptoottista jakaumaa käyttää likimääräisten keskivirheiden ja parametria $\boldsymbol{\vartheta}$ koskevien Waldin testien konstruoimiseen. Normaalisuusoletuksen voimassa ollessa pätee $\mathbf{V}(\boldsymbol{\vartheta}) = \mathbf{B}(\boldsymbol{\vartheta})$, joten keskivirheiden ja Waldin testien lausekkeet yksinkertaistuvat.

Kuten jaksossa 5.8, voidaan uskottavuusfunktio johtaa korvaamalla normaali-jakauma esimerkiksi t-jakaumalla, jolloin edellä esitetyt tulokset modifioidaan samaan tapaan kuin jaksossa 5.8 kuvattiin.

6.4 Empiirinen esimerkki

Tarkastellaan esimerkkinä Kuvion 4.1 USAn neljännesvuosittaista inflaatiotasarjaa, jolle estimoitiin jaksossa 4.4 normaalijakaumaan perustuva AR(3)-malli. Jaksossa 4.5 tämän mallin residuaalien todettiin olevan autokorreloimattomia, mutta ei-normaalaisia ja neliöidyissä residuaaleissa havaittiin lisäksi autokorreloituneisuutta, mikä saattaisi olla merkki ehdollisesta heteroskedastisuudesta.

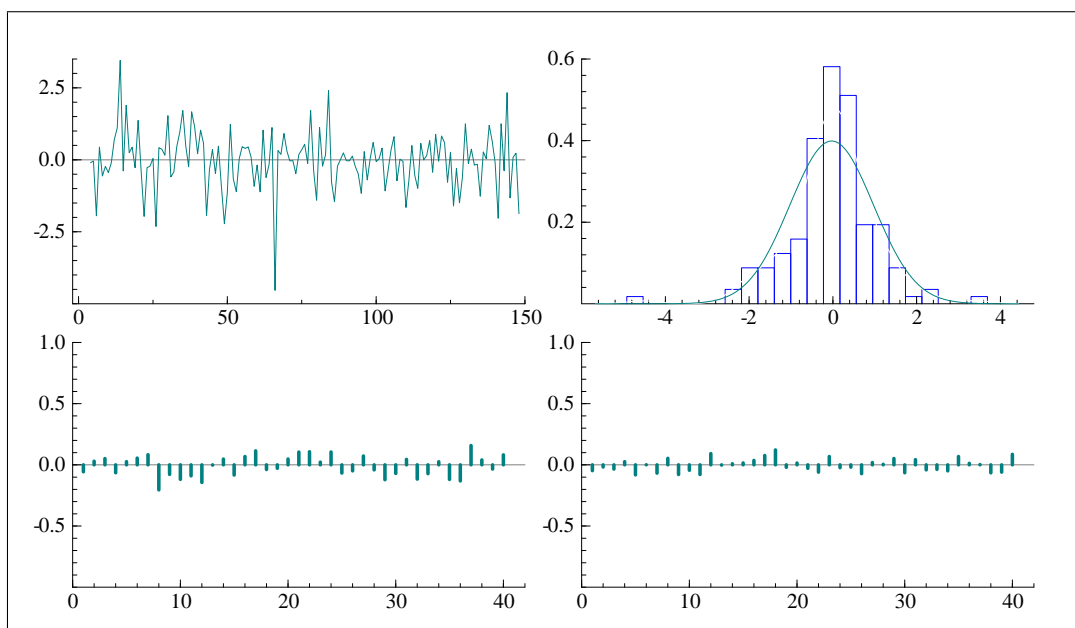
²⁵Jaksossa 5.8 esitetystä vastaavasta asymptoottisesta tuloksesta (5.13) poiketen vaativat tunnetut todistukset ehdon $E(y_t^4) < \infty$. Tarkentuvuuteen riittää kuitenkin, että vahva stationaarisuus on voimassa, joten edes ehtoa $E(y_t^2) < \infty$ ei vaadita.

Edellä sanotun perusteella estimoidaan AR(3)-malli, jonka virheterminä on GARCH(1,1)-malli. Normaalijakaumaan perustuva SU-estimointi tuottaa tuloksen

$$\begin{aligned} \bar{y}_t &= \underset{\substack{(0.088) \\ [0.077]}}{0.396} \bar{y}_{t-1} + \underset{\substack{(0.102) \\ [0.158]}}{0.278} \bar{y}_{t-2} + \underset{\substack{(0.092) \\ [0.128]}}{0.265} \bar{y}_{t-1} + \hat{u}_t \\ \hat{h}_t &= \underset{\substack{(0.240) \\ [0.254]}}{0.419} + \underset{\substack{(0.094) \\ [0.135]}}{0.489} \hat{h}_{t-1} + \underset{\substack{(0.232) \\ [0.418]}}{0.654} \hat{u}_{t-1}^2, \end{aligned} \tag{6.5}$$

jossa $\bar{y}_t = y_t - 4.56$ on jälleen otoskeskiarvolla keskistetty inflaatioasarja. Estimaattien alla on tavallisissa suluissa normaalijakaumaan (tai oletukseen $\mathbf{V}(\boldsymbol{\vartheta}) = \mathbf{B}(\boldsymbol{\vartheta})$) perustuvat tavanomaiset keskivirheet ja hakasuluissa robustit keskivirheet, jotka poikkeavat varsin paljon toisistaan. AR-parametrien estimaatit ovat jonkin verran suuremmat kuin jakson 4.4 homoskedastisessa AR(3)-mallissa. GARCH-parametrien estimaatit viittaavat voimakkaaseen ehdolliseen heteroskedastisuuteen. Summan $\alpha + \beta$ estimaatti on 1.14, joka ei toteuta heikon stationaarisuuden ehtoa. Vahvan stationaarisuuden ehto $E[\log(\beta + \alpha \varepsilon_t^2)] < 0$ (olettaen $\varepsilon_t \sim \text{nid}(0, 1)$) sen sijaan toteutuu.

Kuviossa 6.1 on esitetty estimoidun mallin (6.5) residuaalit, niiden histogrammi sekä residuaaleista ja neliöidyistä residuaaleista lasketut otosautokorrelaatiofunktiot.



Kuvio 6.1. Kuvion 4.1 inflaatioasarjaan sovitetusta AR-GARCH-mallista (5.14) laskettu residuaalisarja (ylh. vas.), sen histogrammi ja $N(0, 1)$ -jakauman tiheysfunktio (ylh. oik.) sekä residuaalien ja neliöityjen residuaalien otosautokorrelaatiofunktiot viipymillä $h = 1, \dots, 40$ (alh. vas. ja oik.).

Residuaalisarja näyttää kohtuullisen siistiltä, joskin joitakin itseisarvoltaan suurehkoja residuaaleja esiintyy. Nämä näkyvät myös histogrammissa, joka samaan kuvaan piirretyn $N(0, 1)$ -jakauman tiheysfunktion kanssa viittaa selvästi ei-normaalisuuteen. Residuaalien ja niiden neliöiden autokorrelaatiofunktioissa ei sen sijaan ole selviä merkkejä riippuvuudesta, joskin viipymällä 8 on itseisarvoltaan suurehko autokorrelaatiokerroin (-0.21 , kun $1.96/\sqrt{148} \approx 0.16$). Koska Kuvion 6.1 residuaalien histogrammi viittaa $N(0, 1)$ -jakaumaa huipukkaampaan ja paksuhäntäisempään jakaumaan, kokeillaan t-jakaumaan perustuvaa SU-estimointia. Estimoiduksi malliksi saadaan

$$\begin{aligned} \bar{y}_t &= \underset{\substack{(0.089) \\ [0.099]}}{0.316} \bar{y}_{t-1} + \underset{\substack{(0.085) \\ [0.091]}}{0.262} \bar{y}_{t-2} + \underset{\substack{(0.080) \\ [0.087]}}{0.311} \bar{y}_{t-1} + \hat{u}_t \\ \hat{h}_t &= \underset{\substack{(0.524) \\ [0.589]}}{0.635} + \underset{\substack{(0.137) \\ [0.142]}}{0.537} \hat{h}_{t-1} + \underset{\substack{(0.378) \\ [0.388]}}{0.610} \hat{u}_{t-1}^2, \quad \hat{\eta} = \underset{\substack{(1.130) \\ [1.278]}}{3.140}, \end{aligned} \tag{6.6}$$

jossa $\hat{\eta}$ on t-jakauman vapausasteluvun estimaatti. Estimaateissa ei ole kovin suurta eroa verrattuna mallin (6.5) estimaatteihin. Erityisesti, GARCH-parametrien estimaatit toteuttavat vahvan stationaarisuuden ehdon, mutta eivät heikoin stationaarisuuden ehtoa. Myös residuaalikuvista tuli silmämääräisesti hyvin samanlaisia kuin Kuviossa 6.1. Tavanomaiset ja robustit keskivirheet ovat nyt paljon lähempänä toisiaan kuin mallissa (6.5), mikä selittyy sillä, että t-jakauma sopii aineistoon normaalijakaumaa paremmin.