Ryhdymme nyt osoittamaan olemassaololausetta perusjoukoille.

Lause 6.8. Olk. G top. ryhmä, X Hausd. G-avaruus.
Merkitään $\pi : X \to X/G$ rata-avaruusprojektio. Jos $\mathcal{U}$ on perhe X:n pieniä osajoukkoja ja jos perhe $\{\pi(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$ on lokaalisti äärellinen, niin yhdiste $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ on pieni.

Tod. Olk. $x \in X$ ja V' $\pi(x)$:n ympäristö, joka leikkaa vain äärellisen montaa joukoista $\pi(U)$. Silloin $V = \pi^{-1}(V')$ on x:n ympäristö ja $\pi(V) = \pi\pi^{-1}(V') = V'$.
Nyt $G(V|U) \neq \emptyset$ vain äärellisen monella $U \in \mathcal{U}$ (koska jos $\pi(U) \cap \pi(V) = \emptyset$, niin $G(V|U) = \emptyset$), olkoot nämä $U_1, \dots, U_n$.
Koska joukot $U_1, \dots, U_n$ ovat pieniä, voidaan jokaisella $i = 1, \dots, n$ valita x:n ymp. $W_i \subset V$ s.e. $\overline{G(W_i|U_i)}$ on kompakti.
Val. sitten $W = W_1 \cap \dots \cap W_n$, joka on x:n ympäristö ja

$$G(W|\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U) \overset{3.2.}{=} \bigcup_{U \in \mathcal{U}} G(W|U) = \bigcup_{i=1}^{n} G(W|U_i)$$

$$\subset \bigcup_{i=1}^{n} \overline{G(W|U_i)}, \text{ joka on kompakti.}$$

□

Lemma 6.9. Olk. G lok. kompakti, X Cartan Hausd. G-avaruus.
Jos X/G on säännöllinen, niin toiminta toteuttaa Palais'n ehdon.

Tod. Merk. $\pi : X \to X/G$.
Olk. $x \in X$ ja ympäristö $U_1 \Subset X$ s.e. $\overline{G(U_1|U_1)}$ on kompakti.
Nyt $\pi(x) \in \pi(U_1) \Subset X/G$, joten (koska X/G on säännöllinen), $\exists$ $\pi(x)$:n ymp. W s.e. $\overline{W} \subset \pi(U_1)$.
Os., että $U = U_1 \cap \pi^{-1} W$ on x:n pieni ympäristö:
olk. $y \in X$. Jos $\pi(y) \notin \overline{W}$, niin valitsemalla $V = X \setminus \pi^{-1}(\overline{W})$ saadaan $y \in V \Subset X$ ja $G(U|V) = \emptyset$.
Jos taas $\pi(y) \in \overline{W} \subset \pi(U_1)$, niin $y \in gU_1$ jollakin $g \in G$, ja valitsemalla $V = gU_1$ saadaan

$$G(U|V) \subset G(U_1 | gU_1) \overset{3.4.}{=} G(U_1|U_1)g^{-1} \subset \overline{G(U_1|U_1)}g^{-1},$$

joka on kompakti.

□

Teoreema 6.10. Olk. G lok. komp. top. ryhmä ja $\overline{X}$ Hausd. vahva G-avaruus, s.e. rata-avaruus $\overline{X}/G$ on parakompakti. Tällöin toiminnalle on olemassa $\underbrace{\text{perusjoukko}}_{\text{avoin}}$.

Tod. Koska parakompakti $\Rightarrow$ normaali $\Rightarrow$ säännöllinen, niin $\overline{X}$ on Palais'n G-avaruus edellisen Lemman nojalla.
Siis jokaisella pisteellä $x \in \overline{X}$ on pieni ympäristö U_x.
Koska $\overline{X}/G$ on parakompakti, on peitteellä $\mathcal{U} = \{\pi(U_x) \mid x \in \overline{X}\}$ lokaalisti äärellinen tihennys $\mathcal{V}$. Siis $\exists$ funktio

$$\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$$
$$V \mapsto U_V,$$

s.e. $V \subset \pi(U_V) \; (\subset \overline{X}/G)$.
Jokaisella $V \in \mathcal{V}$ määritellään $W_V = U_V \cap \pi^{-1}V \subset \overline{X}$.
Joukot W_V ovat pieniä ja

$$\pi(W_V) = \pi(U_V \cap \pi^{-1}V) = \pi(U_V) \cap V = V,$$

joten perhe

$$\{\pi(W_V) \mid V \in \mathcal{V}\}$$

on lokaalisti äärellinen. Jos nyt määritellään

$$F = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} W_V,$$

niin ed. lauseen nojalla F on pieni.
Lisäksi

$$\pi(F) = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} \pi(W_V) = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V = \overline{X}/G.$$

Siis F on perusjoukko. Selvästi F on avoin.

$\square$

Yleisempi muoto:

Teoreema 6.11. Olk. G lok. komp. top. ryhmä ja $\overline{X}$ Hausd. vahva G-avaruus, s.e. rata-avaruus $\overline{X}/G$ on parakompakti. Olkoon lisäksi $A \subset \overline{X}$ pieni.
Tällöin toiminnalle on olemassa avoin perusjoukko, joka sisältää joukon A.

Tod. HT

$\square$

Perusjoukon olemassaololause sisältää oletuksen "$\bar{X}/G$ parakompakti". On olemassa lukuisia erikoistapauksia, joissa tiedetään, että $\bar{X}/G$ on parakompakti, mutta tietääkseni ei tiedetä, päteekö yleisesti "G lok. komp., $\bar{X}$ parakomp. vahva' G-avaruus $\Rightarrow$ $\bar{X}/G$ parakomp.".

Lause 6.12. Olk. G lok. kompakti ja $\bar{X}$ on N_2 topologinen monisto, jolla G:n toiminta on vahva'. Tällöin $\bar{X}/G$ on parakompakti.

Tod. Huom. Lauseen 3.25 nojalla tässä vahva $\Leftrightarrow$ vahva' ($\bar{X}$ lok. komp.).
Koska $\bar{X}$ on N_2, se on Lindelöf; koska $\pi: \bar{X} \to \bar{X}/G$ on jatk. avoin surjektio, on $\bar{X}/G$ Lindelöf [Dugundji, VIII, 6.6].
Lauseen 3.19 nojalla $\bar{X}/G$ on lokaalisti kompakti ja Hausdorff, joten [Väisälä, 17.4] $\Rightarrow$ $\bar{X}/G$ on säännöllinen.
Siis $\bar{X}/G$ on Lindelöf ja säännöllinen, joten [Dugundji, VIII, 6.5] $\Rightarrow$ $\bar{X}/G$ on parakompakti.

□

Lause 6.13. Olk. G lok. kompakti ja $\bar{X}$ vahva' G-avaruus, jolla on G-invariantti metriikka. Tällöin $\bar{X}/G$ on parakompakti.

Tod. Harj. 13/Tent. 5 $\Rightarrow$ $\bar{X}/G$ on metristyvä.
[Dugundji, IX, 5.3] $\Rightarrow$ $\bar{X}/G$ on parakompakti.

□

Kurssin loppupuolen tavoitteena on todistaa upotustulos: tietyt ehdot toteuttavat G-avaruudet voidaan upottaa Banach G-avaruuteen (Banach-avaruus, jossa G toimii lin. isomorfismeilla).

Tarvitsemme Haarin integraalia lokaalisti kompakteille ryhmille, kts. esim. [Husain: Introduction to topological groups, luku VI]:

Let G be a locally compact Hausdorff topological group. Then there exists a non-trivial (= not identically zero), non-negative, left-invariant, positive homogeneous, additive, functional I on $C_0^+(G)$.

Tässä
- $C_0^+(G) = \{ f: G \to \mathbb{R} \mid f$ jatkuva kompaktikantajainen funktio, $f \geq 0 \}$
- functional : $I: C_0^+(G) \to \mathbb{R}$
- additive : $I(f_1 + f_2) = I(f_1) + I(f_2)$
- pos. homog. : $I(\lambda f) = \lambda I(f)$, $\lambda \geq 0$
- left invariant : $I(L_h f) = I(f)$ $\forall h \in G$

- non-negative : $I(f) \geq 0$.

Kun verrataan Teoreeman 4.1 ominaisuuksiin, huomataan pari eroa:
- integraali ei ole määritelty kaikille jatkuville funktioille (y.o. tulos voidaan helposti laajentaa koskemaan joukkoa $C_0(G)$ = jatkuvat komp. kantajaiset funktiot)
- ehto $I(1) = 1$ puuttuu, koska vakiofunktio 1 ei ole kompaktikantajainen, jos G on epäkompakti.
- ehto $I(R_h f) = I(f)$ puuttuu: on ol. ryhmiä, joille ei ole olemassa integraalia, joka olisi sekä oikealta että vasemmalta invariantti. Y.o. tuloksessa voitaisiin "left invariant" korvata ominaisuudella "right invariant".

Voidaan osoittaa:
- I on vakiokerrointa vaille yksikäsitteinen: jos J toteuttaa y.o. ehdot, niin $\exists\, c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ s.e.

$$J(f) = c \cdot I(f) \qquad \forall f \in C_0^+(G).$$

- $f \geq 0$, f ei identtisesti $0 \Rightarrow I(f) > 0$.

Upotustulos, jonka todistamme, on sukua Kuratowskin upotuslauseelle, kts. esim. [Väisälä: Top. I, harj. teht. 2:16]:

olk. X metr. avaruus, $x_0 \in X$, $a \in X$.

Määr. $f_a : X \to \mathbb{R}$

$$f_a(x) = d(x,a) - d(x, x_0).$$

Nähdään, että f_a on rajoitettu, joten saadaan

$$\varphi : X \to \mathrm{Raj}(X, \mathbb{R})$$
$$a \longmapsto f_a$$

Sup-normilla varustettuna $\mathrm{Raj}(X,\mathbb{R})$ on Banachin avaruus.
Kuvaus φ on upotus.

Jos X on G-avaruus, joissakin tilanteissa voidaan määritellä G:n toiminta $\Phi : G \times \mathrm{Raj}(X,\mathbb{R}) \to \mathrm{Raj}(X,\mathbb{R})$

$$(\Phi(g,f))(x) = f(g^{-1}x).$$

Tämä toiminta ei välttämättä ole jatkuva, kts. Harj. 13 / Teht. 6.

Osoittautuu hyödylliseksi tutkia tiettyjä vektoriavaruuden $\mathrm{Raj}(X,\mathbb{R})$ aliavaruuksia, kuten kompaktikantajaisia funktioita tai funktioita, jotka "häviävät äärettömyydessä" (määritelmä alla).