VI Perusjoukoista (engl. fundamental sets)

Määr. 6.1. Olk. G topologinen ryhmä ja $\bar{X}$ G-avaruus.
Sanomme, että osajoukko $F \subset \bar{X}$ on *pieni* (engl. small),
jos jokaisella pisteellä $x \in \bar{X}$ on olemassa ympäristö U s.e.
$\overline{G(F|U)}$ on kompakti.

(Vrt. Määr. 3.22: Toiminta on Palais-toiminta $\Leftrightarrow$
jokaisella $\bar{X}$:n pisteellä on olemassa pieni ympäristö.)

Määr. 6.2. Olk. $\bar{X}, Y$ top. avaruuksia. Jatkuva kuvaus $f: \bar{X} \to Y$
on *vahva*, jos se on suljettu kuvaus ja $f^{-1}(y)$ on kompakti $\forall y \in Y$.

Määr. 6.3. Olk. $\bar{X}$ G-avaruus. Osajoukko $F \subset \bar{X}$ on *perusjoukko*
(k.o. toiminnalle), jos
(1) $GF = \bar{X}$
(2) $\bar{F}$ on pieni.

(Esim. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $t\cdot(x,y) = (t+x, y)$
$\{0\} \times \mathbb{R}$ on perusjoukko

Lemma 6.4. Jos toiminnalle on olemassa perusjoukko, niin
G on lokaalisti kompakti ja toiminta on Palais-toiminta.

Tod. Jos $F \subset \bar{X}$ on perusjoukko, $x \in F$ ja U x:n ympäristö
s.e. $\overline{G(F|U)}$ on kompakti, niin $e \in G(F|U)$ ja Harj. 8/Teht. 3
nojalla $G(F|U)$ on e:n ympäristö. Siis e:llä on ympäristö, jonka
sulkeuma on kompakti, mistä seuraa, että G on lok. kompakti.

"vähän enemmän kuin Palais"

Valitaan jokaiselle $x \in \bar{X}$ ympäristö U_x s.e. $\overline{G(F|U_x)}$ on kompakti.
Osoitetaan, että tällöin $\overline{G(U_x|U_y)}$ on kompakti $\forall x, y \in \bar{X}$,
mistä väite seuraa:

olk. $g \in G(U_x|U_y)$. Siis $\exists\, u \in U_x$, $u' \in U_y$ s.e. $gu' = u$.
Koska $GF = \bar{X}$, niin $\exists\, \bar{g}$ s.e. $\bar{g}u = f \in F$. Siis $\bar{g}g \in G(F|U_y)$.
$\bar{g}gu'$
Koska $\bar{g}^{-1}f = u \in U_x$, on siis $\bar{g}^{-1} \in G(U_x|F)$.
Nyt
$$g = \bar{g}^{-1}(\bar{g}g) \in G(U_x|F) \cdot G(F|U_y),$$
joten
$$\overline{G(U_x|U_y)} \subset \overline{G(F|U_x)}^{-1} \cdot \overline{G(F|U_y)},$$ joka on kompakti. $\square$

Lemma 6.5. Jos F on perusjoukko, niin myös $\overline{F}$ on.

Tod. Jos $GF = \mathbb{X}$, niin myös $G\overline{F} = \mathbb{X}$.
Olk. $x \in \mathbb{X}$ ja U ymp. s.e. $\overline{G(F|U)}$ on kompakti.
Jos $g \in G(\overline{F}|U)$, on siis $gU \cap \overline{F} \neq \emptyset$; jos avoin joukko leikkaa joukon sulkeumaa, se leikkaa myös itse joukkoa: siis $gU \cap F \neq \emptyset$, eli $g \in G(F|U)$.
Siis $G(\overline{F}|U) = G(F|U)$, joten $\overline{G(\overline{F}|U)} = \overline{G(F|U)}$ on kompakti. □

Lause 6.6. Olk. G lok. kompakti top. ryhmä, $\mathbb{X}$ vahva (Hausdorff) G-avaruus ja $F \Subset \mathbb{X}$. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:
(1) F on perusjoukko.
(2) rata-avaruusprojektion $\pi : \mathbb{X} \to \mathbb{X}/G$ rajoittuma $\pi' = \pi|F$ on vahva surjektio.
(3) toimintakuvauksen $\Phi : G \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ rajoittuma $\Phi' = \Phi|G \times F$ on vahva surjektio.

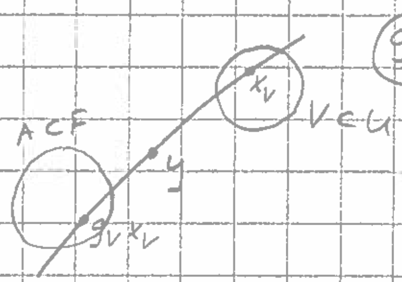
Tod.

(1) ⇒ (2):
- Koska $GF = \mathbb{X}$, on π' surjektio
- jos $\pi(x) \in \mathbb{X}/G$, niin $(\pi|F)^{-1}(\pi(x)) = G(F|\{x\})x$:

  "$\subset$" jos $y \in$ ↗, niin $y \in F$ ja $y \in \pi^{-1}\pi(x)$, joten $y = gx$ jollain g. Siis $g \in G(F|\{x\})$ ja $y = gx \in G(F|\{x\})x$.

  "$\supset$" jos $y \in G(F|\{x\})x$, niin $y = gx$ jollain $g \in G(F|\{x\})$. Tästä seuraa $gx \in F$ eli $y \in F$. Lisäksi $y \in \pi^{-1}\pi(x)$. Siis $y \in (\pi|F)^{-1}(\pi(x))$.

  Perusjoukon määr. ehdosta (2) seuraa, että $\overline{G(F|\{x\})}$ on kompakti, Lemman 3.10 nojalla $G(F|\{x\}) \Subset G$, joten pisteen alkukuva $(\pi|F)^{-1}(\pi(x)) = G(F|\{x\})x$
  $= \overline{G(F|\{x\})}x$ on kompakti.
- π' on suljettu kuvaus:
  olk. $A \Subset F$. väite: $\pi(A) \Subset \mathbb{X}/G$.
  olk. $\pi(x) \in \overline{\pi(A)}$. Valitaan x:n ymp. U s.e. $\overline{G(F|U)}$ on kompakti.
  Jos $x \in V \Subset U$, niin $\pi(V) \Subset \mathbb{X}/G$ (π avoin kuvaus), joten (koska $\pi(x) \in \overline{\pi(A)}$) $\exists\ \pi(y) \in \pi(A) \cap \pi(V)$.



Siis $\exists\, x_V \in V \subset U$ ja $g_V \in G$ s.e. $g_V x_V \in A \subset F$, jolloin siis $g_V \in G(F|U)$.
Joukot V ($x \in V \in \mathcal{U}$) muodostavat suunnatun joukon $\mathcal{V}$ ($V \geq V' \Leftrightarrow V \subset V'$) ja saadaan verkot $(x_V)_{\mathcal{V}}$ ja $(g_V)_{\mathcal{V}}$.
Nyt $x_V \to x$ ja (koska $\overline{G(F|U)}$ on kompakti), verkolla $(g_V)_{\mathcal{V}}$ on suppeneva osaverkko $(g_W)_{\mathcal{W}} \to g \in G$.
Nyt

$$g_W x_W \longrightarrow gx \in A, \quad \text{koska } g_W x_W \in A \Subset F \Subset X.$$

Siis $\pi(x) \in \pi(A)$, joten $\overline{\pi(A)} = \pi(A)$ eli $\pi(A)$ on suljettu.

(2) ⇒ (3):
- koska $\pi|F$ on surjektio, niin $\Phi| : G\times F \to X$ on surjektio.
- olkoon $(g_i, y_i)_i$ verkko avaruudessa $G\times F$, jolle verkko $(g_i y_i)$ suppenee X:ssä.
  Teoreeman B.13 nojalla riittää osoittaa, että verkolla $(g_i, y_i)_i$ on kasautumisarvo (eli Teoreeman B.9 nojalla suppeneva osaverkko) avaruudessa $G\times F$.
  Koska $(g_i y_i)$ suppenee, suppenee myös $(\pi(g_i y_i)) = (\pi(y_i))$, joten oletuksen (2) (ja Teoreemojen B.12 ja B.9) nojalla verkolla (y_i) on suppeneva osaverkko $(y_j)_j$ F:ssä.
  Tästä seuraa, että verkko $(g_j y_j, y_j)$ suppenee $X \times X$:ssä.
  Nyt Lauseen 6.7 nojalla kuvaus
  $$G\times X \to X\times X, \quad (g,x) \mapsto (gx, x)$$
  on vahva, joten verkolla (g_j, y_j) on suppeneva osaverkko $G\times X$:ssä, siis myös $G\times F$:ssä ($y_j \to y \in F$).

(3) ⇒ (1):
- koska $\Phi' : G\times F \to X$ on surjektio, on $GF = X$.
- Havaitaan ensin, että $(\Phi')^{-1}(x) = \{(g, g^{-1}x) \mid g \in G(\{x\}|F)\}$
  "⊂" jos $(g,y) \in (\Phi')^{-1}(x)$, niin $g \in G$, $y \in F$ ja $gy = x$.
  Siis $y = g^{-1}x$ ja $g \in G(\{x\}|F)$.
  "⊃" $\Phi'(g, g^{-1}x) = x$, lisäksi $g^{-1}x \in F$, koska $g \in G(\{x\}|F)$
  ($gy = x$ joll. $y \in F \Rightarrow g^{-1}x = y \in F$).
  Koska Φ' on vahva, niin $(\Phi')^{-1}(x)$ on kompakti, joten $G(\{x\}|F) = pr_1((\Phi')^{-1}(x))$ on kompakti.

Os. seuraavaksi, että jokaista joukon $G(\{x\}|F)$ ympäristöä W kohti löytyy x:n ympäristö U s.e. $G(U|F) \subset W$:

Antiteesi: $\forall$ x:n ympäristöillä U $\exists$ $g_U \notin W$ ja $g_U \in G(U|F)$,
eli $\exists$ $y_U \in F$ s.e. $g_U y_U = x_U \in U$, k.o. ympäristöt muodostavat suunnatun joukon ja verkolle (x_U) pätee $x_U \to x$.
Nyt $x_U = g_U y_U$ suppenee, joten ehdon (3) nojalla verkolla (g_U, y_U) on suppeneva osaverkko (g_V, y_V) $(G\times F)$:ssä.
Siis $g_V \to g \in G$, $y_V \to y \in F$ ja $g_V y_V = x_V \to x$, mistä seuraa $gy = x$, eli $g \in G(\{x\}|F)$. Nyt kuitenkin W on joukon $G(\{x\}|F)$ ympäristö ja $g_V \notin W$ $\forall V$, joten ei voi olla $g_V \to g$, ristiriita.

Koska $G(\{x\}|F)$ on kompakti ja G on lokaalisti kompakti, niin joukolle $G(\{x\}|F)$ on ympäristö W, jolle $\overline{W}$ on kompakti.
Edellisen nojalla x:llä on ymp. U s.e. $G(U|F) \subset W$, jolloin $G(U|F)$ on kompakti.

Siis Määritelmän 6.3 ehto (2) on voimassa.

$\square$

Lause 6.7. Olk. G lokaalisti kompakti top. ryhmä ja $\overline{X}$ Hausd. G-avaruus.
Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:
1) toiminta on vahva'
2) kuvaus $\vartheta : G\times\overline{X} \to \overline{X}\times\overline{X}$

$$(g,x) \mapsto (x, gx)$$

on vahva'.

Tod. "$\Rightarrow$" 1) ϑ on suljettu kuvaus:
olk. $A \subseteq G\times\overline{X}$ ja $(x_j, y_j)_j$ verkko joukossa $\vartheta(A)$, $(x_j, y_j) \to (x,y) \in \overline{X}\times\overline{X}$. Os., että $(x,y) \in \vartheta(A)$.
Valitaan jokaisella j alkio g_j s.e. $y_j = g_j x_j$, missä $(g_j, x_j) \in A$.
Valitaan seuraavaksi ympäristöt V_x ja V_y s.e. $K = G(V_y|V_x)$ on kompakti.
Koska $x_j \to x$, $y_j \to y$, void. ol., että $x_j \in V_x$, $y_j \in V_y$ $\forall j$.
Tästä seuraa, että $g_j \in K$ $\forall j$, joten verkolla (g_j) on suppeneva osaverkko (g_α), merk. $g_\alpha \to g \in K$.
Koska A on suljettu, on $(g,x) \in A$ ja
$$(x,y) = \lim(x_\alpha, g_\alpha x_\alpha) = \lim \vartheta(g_\alpha, x_\alpha) \overset{!}{=} \vartheta \lim(g_\alpha, x_\alpha) = \vartheta(g,x) \in \vartheta(A).$$

2) $\vartheta^{-1}(x_0,y_0)$ on kompakti, kun $x_0, y_0 \in \bar{X}$:

Selvästi, jos $y_0 \notin Gx_0$, on $\vartheta^{-1}(x_0,y_0) = \emptyset$.

Jos taas $y_0 = g_0 x_0 \in Gx_0$, on $\vartheta^{-1}(x_0,y_0) = g_0 G_{x_0} \times \{x_0\}$:

"$\subset$" $(g,x) \in \vartheta^{-1}(x_0,y_0) \Rightarrow (x,gx) = (x_0,y_0)$

$\Rightarrow x = x_0$ ja $gx = gx_0 = y_0 = g_0 x_0$

$\Rightarrow g_0^{-1} g x_0 = x_0 \Rightarrow g_0^{-1} g \in G_{x_0} \Rightarrow g \in g_0 G_{x_0}$

Siis $(g,x) \in g_0 G_{x_0} \times \{x_0\}$.

"$\supset$" Seuraa siitä, että jos $\bar{g} \in G_{x_0}$, niin

$$\vartheta(g_0\bar{g}, x_0) = (x_0, g_0 \underbrace{\bar{g}x_0}_{=x_0}) = (x_0, g_0 x_0) = (x_0,y_0).$$

Koska toiminta on vahva, on isotropiaryhmä G_{x_0} kompakti ja $\vartheta^{-1}(x_0,y_0) = g_0 G_{x_0} \times \{x_0\}$ on kompakti.

$\square$ "$\Rightarrow$"

"$\Leftarrow$" Olk. $x_0, y_0 \in \bar{X}$. Etsitään määritelmän ehdon ympäristöt V_{x_0}, V_{y_0}.

Tarkastellaan kuvausta

$$G \times \bar{X} \to G \times \bar{X} \times \bar{X}$$
$$(g,x) \mapsto (g,x,gx),$$

joka on upotus, merkitään kuvajoukkoa $D \subset G \times \bar{X} \times \bar{X}$.

Saadaan kuvaus

$$p: D \xrightarrow{\approx} G \times \bar{X} \xrightarrow{\vartheta} \bar{X} \times \bar{X}$$
$$(g,x,gx) \mapsto (g,x) \longmapsto (x,gx),$$

joka on vahva, koska $\approx$ ja ϑ ovat (HT).

Olkoon $F = G \cup \{\infty\}$ yhden pisteen kompaktisointi.

Osoitetaan seuraavaksi, että $D \Subset F \times \bar{X} \times \bar{X}$:

Joukko $E = \{(g,g) \mid g \in G\} \Subset F \times G$, koska se on inkluusion $G \hookrightarrow F$ kuvaaja. Siis

$$U := (E \times \bar{X} \times \bar{X}) \cap (F \times D) \Subset F \times D \subset F \times G \times \bar{X} \times \bar{X}.$$

Koska p on vahva, on

$$u = id \times p : F \times D \to F \times \bar{X} \times \bar{X}$$
$$(h,g,x,y) \mapsto (h,x,y)$$ suljettu (HT).

Nyt $u(U) = D$:

"$\subset$" Olk. $(h,g,x,y) \in U$. $(h,g) \in E \Rightarrow h = g \in G$;
$(g,x,y) \in D \Rightarrow y = gx$. Siis $u(g,g,x,y) = (g,x,gx) \in D$.

"$\supset$" Olk. $(g,x,gx) \in D$. Tällöin
$(g,g,x,gx) \in (E \times \bar{X} \times \bar{X}) \cap (F \times D)$ ja
$u(g,g,x,gx) = (g,x,gx)$.

Siis $D \Subset F \times \bar{X} \times \bar{X}$.

Nyt $(\{\infty\} \times \bar{X} \times \bar{X}) \cap D = \emptyset$, joten $\exists$ pisteen ∞ ympäristö $V \Subset F$ ja pisteen $(x_0, y_0) \in \bar{X} \times \bar{X}$ ympäristö $W \Subset \bar{X} \times \bar{X}$ s.e.

$$(V \times W) \cap D = \emptyset .$$

Koska F on G:n yhden pisteen kompaktisointi, voidaan valita $V = (G/K) \cup \{\infty\}$, missä K on kompakti.

Jos nyt valitaan ympäristöt V_{x_0} ja V_{y_0} s.e. $V_{x_0} \times V_{y_0} \subset W$, on siis

$$((G/K) \times (V_{x_0} \times V_{y_0})) \cap D = \emptyset .$$

Jos nyt $g \notin K$, $x \in V_{x_0}$ ja $y \in V_{y_0}$, niin $(g, x, y) \notin D$ eli $y \neq gx$.
Siis jos $g \notin K$, on $gV_{x_0} \cap V_{y_0} = \emptyset$ eli

$$G(V_{y_0} | V_{x_0}) \subset K ,$$

mistä väite seuraa, koska K on kompakti.

$\square$