V Viipaleet G-avaruuksissa (engl. slices)

Olk. G topologinen ryhmä ja $H \leq G$.
Jos X on H-avaruus, konstruoimme X:stä G-avaruuden seuraavasti:
Tuloavaruudessa $G \times X$ määritellään H:n toiminta
$$h \cdot (g, x) = (gh^{-1}, hx). \qquad (*)$$
Tämän toiminnan rata-avaruutta $G \times X / H$ merkitään
$$G \times_H X,$$
merkitään lisäksi $\pi : G \times X \to G \times_H X$ rata-avaruusprojektio.
Alkion (g, x) H-rataa merkitään $[g, x]$.
Määr. G:n toiminta
$$\tilde{\varphi} : G \times (G \times_H X) \to G \times_H X$$
$$(g', [g, x]) \mapsto [g'g, x]. \qquad (**)$$
Tämä on hyvin määr. jatkuva toiminta (HT).

G-avaruutta $G \times_H X$ sanotaan usein (H-avaruuden X) indusoiduksi G-avaruudeksi.

Määritellään sitten kuvaukset
$$i_e : X \to G \times X$$
$$x \mapsto (e, x)$$
ja
$$i = \pi \circ i_e : X \to G \times_H X$$
$$x \longmapsto [e, x].$$

Lause 5.1. Jos H on kompakti, niin i on H-ekvivariantti suljettu upotus.

Tod.
- i on jatkuva: ok.
- i on H-ekvivariantti:
$$i(hx) = [e, hx] \overset{(*)}{=} [eh, h^{-1}(hx)]$$
$$= [h, x] \overset{(**)}{=} h[e, x] = h\, i(x).$$
- i injektio: Jos $i(x) = i(y)$, on siis $[e, x] = [e, y]$, joten $(*) \Rightarrow \exists\, h \in H$ s.e. $(eh^{-1}, hx) = (e, y)$.
Tästä seuraa $eh^{-1} = e$ eli $h = e$ ja $x = hx = y$.
- i suljettu kuvaus: i_e on suljettu kuvaus. Samoin π on suljettu Teoreeman 2.13. nojalla.
Siis i on sulj. kuvaus.

$\square$

Lause 5.2. Projektio $G \times X \to G$ indusoi projektion

$$p : G \times_H X \to G/H, \quad [g, x] \mapsto gH \qquad \text{(HT)}.$$

□

Indusoidulla G-avaruudella on seuraava universaaliominaisuus:

Teoreema 5.3. Jos Y on G-avaruus ja $f : X \to Y$ H-ekvivariantti jatkuva kuvaus, niin on olemassa yksikäsitteinen G-kuvaus $\tilde{f} : G \times_H X \to Y$ s.e. kaavio

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & G \times_H X \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

kommutoi. $(*)$

Tod. Määr. $\tilde{f}$ kaavalla

$$\tilde{f}([g, x]) = g f(x), \quad g \in G,\ x \in X.$$

- $\tilde{f}$ hyvin määr.: jos $[g, x] = [g', x']$, on siis $(gh^{-1}, hx) = (g', x')$ jollakin $h \in H$. Nyt
$$\tilde{f}([g', x']) = \tilde{f}([gh^{-1}, hx]) = gh^{-1} f(hx) \overset{f\ H\text{-ekviv.}}{=} gh^{-1}h f(x) = g f(x) = \tilde{f}([g, x]).$$

- kaavio kommutoi: $\tilde{f}(i(x)) = \tilde{f}([e, x]) = e f(x) = f(x)$ ok.

- $\tilde{f}$ on G-ekvivariantti:
$$\tilde{f}(g'[g, x]) = \tilde{f}([g'g, x]) = (g'g) f(x) = g'(g f(x)) = g' \tilde{f}([g, x]).$$

- $\tilde{f}$ jatkuva: merk. $\Psi : G \times Y \to Y$ G:n toiminta Y:ssä.
Saadaan kommutoiva kaavio

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "id \times f"] \arrow[d, "\pi"'] & G \times Y \arrow[d, "\Psi"] \\ G \times_H X \arrow[r, "\tilde{f}"] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (g, x) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (g, f(x)) \arrow[d, mapsto] \\ {[g, x]} \arrow[r, mapsto] & g f(x) \end{tikzcd}$$

Koska $\mathrm{id}\times f$ ja $\mathcal{F}$ ovat jatkuvia ja π on tekijäkuvaus, on $\tilde f$ jatkuva Lemman 1.18 nojalla.

- Yksikäsitteisyys:

Jos $\tilde f' : G\times_H X \to Y$ on toinen jatkuva G-kuvaus, jolle $\tilde f' \circ i = f$, niin

$$\tilde f'([g,x]) = \tilde f'(g[e,x]) \overset{\tilde f' \text{ G-ekviv.}}{=} g\tilde f'([e,x]) = g\underbrace{\tilde f' i}_{=f}(x) = g f(x) = \tilde f([g,x]), \quad \forall g,x.$$

Siis $\tilde f' = \tilde f$, mikä osoittaa yksikäsitteisyyden. $\square$

4.11.13 →

<u>Teoreema 5.4.</u> Jos H on top. ryhmän G aliryhmä ja X on H-avaruus, niin $\exists$ yksikäsitteinen G-avaruus $\tilde X$ ja yksikäsitteinen injektiivinen H-kuvaus $i : X \to \tilde X$, jolla on Teoreeman 5.3 universaaliominaisuus $(*)$:

Jos Y on G-avaruus ja $f : X \to Y$ on jatkuva H-kuvaus, niin $\exists$ yksikäsitt. G-kuvaus $\tilde f$ s.e. kaavio

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & \tilde X \\ & \searrow^{f} & \downarrow \tilde f \\ & & Y \end{array}$$

kommutoi.

<u>Tod.</u> Olemassaolo seuraa ed. teoreemasta $(\tilde X = G\times_H X)$.

<u>Yksikäsitteisyys:</u>

Ol. että kuvauksilla $i_1 : X \to \tilde X_1$ ja $i_2 : X \to \tilde X_2$ on ominaisuus $(*)$. Valitsemalla $Y = \tilde X_2$, $f = i_2$ saadaan $(*)$:stä, että $\exists!$ G-kuvaus $\tilde i_2 : \tilde X_1 \to \tilde X_2$ s.e.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_1} & \tilde X_1 \\ & \searrow^{i_2} & \downarrow \tilde i_2 \\ & & \tilde X_2 \end{array}$$

kommutoi.

Valitsemalla $Y = \tilde X_1$, $f = i_1$ saadaan $(*)$:stä, että $\exists!$ G-kuvaus $\tilde i_1 : \tilde X_2 \to \tilde X_1$ s.e.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_2} & \tilde X_2 \\ & \searrow^{i_1} & \downarrow \tilde i_1 \\ & & \tilde X_1 \end{array}$$

kommutoi.

Yhdistämällä nämä kaaviot kahdella tavalla, saadaan kommutoivat kaaviot

$$\begin{tikzcd} \bar{X} \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "i_1"'] & \tilde{\bar{X}}_1 \arrow[d, "\tilde{i}_1 \circ \tilde{i}_2"] \\ & \tilde{\bar{X}}_1 \end{tikzcd} \quad \text{ja} \quad \begin{tikzcd} \bar{X} \arrow[r, "i_2"] \arrow[dr, "i_2"'] & \tilde{\bar{X}}_2 \arrow[d, "\tilde{i}_2 \circ \tilde{i}_1"] \\ & \tilde{\bar{X}}_2 \end{tikzcd}.$$

Jos korvataan kuvaukset $\tilde{i}_1 \circ \tilde{i}_2$ ja $\tilde{i}_2 \circ \tilde{i}_1$ identtisillä kuvauksilla, kaaviot kommutoivat edelleen. Koska funktio $\tilde{f}$ ominaisuudessa $(*)$ on yksikäsitteinen, on välttämättä

$$\tilde{i}_1 \circ \tilde{i}_2 = id_{\tilde{\bar{X}}_1} \quad \text{ja} \quad \tilde{i}_2 \circ \tilde{i}_1 = id_{\tilde{\bar{X}}_2}.$$

Siis $\tilde{i}_1$ ja $\tilde{i}_2$ ovat G-homeomorfismeja, eli $\tilde{\bar{X}}$ on tässä mielessä yksikäsitteinen.

Lisäksi injektiot i_1 ja i_2 vastaavat toisiaan näiden G-homeomorfismien välityksellä, joten ne ovat tässä mielessä yksikäsitteiset. $\square$

Teoreema 5.5. (Transitiivisuus)

Olk. G top. ryhmä, H, K G:n aliryhmiä ja $H \subset K$.
Jos $\bar{X}$ on H-avaruus, niin funktio

$$f : G \times_K (K \times_H \bar{X}) \longrightarrow G \times_H \bar{X}$$
$$[g, [k, x]] \longmapsto [gk, x] \qquad , g \in G, k \in K, x \in \bar{X},$$

on G-homeomorfismi.

Tod. f on hyvin määritelty jatkuva G-kuvaus (HT).
Määr. nyt

$$f' : G \times_H \bar{X} \longrightarrow G \times_K (K \times_H \bar{X})$$
$$[g, x] \longmapsto [g, [e, x]].$$

- f' hyvin määr.:

Jos $[g, x] = [g', x']$, niin $\exists\, h \in H$ s.e. $g' = gh^{-1}$ ja $x' = hx$, jolloin

$$\begin{aligned} f'([g', x']) &= f'([gh^{-1}, hx]) = [gh^{-1}, [e, hx]] \\ &= [gh^{-1}, [h, x]] = [gh^{-1}, h[e, x]] \\ &= [gh^{-1}h, [e, x]] = [g, [e, x]] = f'([g, x]). \end{aligned}$$

- f' jatkuva: Tark. kommutoivaa kaaviota

$$\begin{tikzcd} G\times X \arrow[r, "\tilde{f}'"] \arrow[ddd, "\pi"'] & G\times K\times X \arrow[d, "id\times\pi_1"] \\ & G\times(K\times_H X) \arrow[dd, "\pi_2"] \\ & \\ G\times_H X \arrow[r, "f'"] & G\times_K(K\times_H X) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (g,x) \arrow[r, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] & (g,e,x) \arrow[d, mapsto] \\ & (g,[e,x]) \arrow[dd, mapsto] \\ & \\ {[g,x]} \arrow[r, mapsto] & {[g,[e,x]]} \end{tikzcd}$$

Funktiot π, $\tilde{f}'$, $id\times\pi_1$ ja π_2 ovat jatkuvia ja π on tekijäkuvaus, joten f' on jatkuva.

- $f\circ f' = id$: $f\circ f'([g,x]) = f([g,[e,x]]) = [ge,x] = [g,x]$.
  $f'\circ f = id$: $f'\circ f([g,[k,x]]) = f'([gk,x]) = [gk,[e,x]]$
  $= [g,k[e,x]] = [g,[k,x]]$

$\therefore$ f ja f' ovat G-homeomorfismeja. $\square$

Seuraavaksi määrittelemme viipaleen (engl. slice) käsitteen.

Määr. 5.6. Olk. X G-avaruus ja $H\leq G$. X:n osajoukko S on H-ydin (H-kernel), jos on olemassa G-kuvaus
$$f: GS \to G/H$$
s.e. $f^{-1}(eH) = S$.
Jos lisäksi $GS \circledcirc X$, sanotaan, että S on H-viipale (H-slice) X:ssä.
Jos $x\in X$, niin viipaleella pisteessä x tarkoitetaan G_x-viipaletta X:ssä, joka sisältää pisteen x.

Teoreema 5.7. Olk. G Lien ryhmä ja X täysin säännöllinen G-avaruus. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:

(1) Jokaisella $x\in X$, G_x on kompakti ja on olemassa viipale pisteessä x.

(2) X on Cartan G-avaruus.

Tod. R.S. Palais: "On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups", Ann. of Math., 1961. $\square$

Huom. [Väisälä: Top. II, s. 142] Top. avaruus X on täysin säännöllinen, jos se on Hausdorff ja jokaista $a \in X$ ja jokaista a:n ympäristöä U kohti on olemassa sell. jatkuva kuvaus $f : X \to I$, että $f(a) = 1$ ja $f(x) = 0$ $\forall\, x \in X \setminus U$. Pätee implikaatiot

Normaali $\Rightarrow$ Täysin säänn. $\Rightarrow$ säännöllinen.

ol. X Hausdorff

Teoreema 5.8. Oletetaan, että G on Lien ryhmä tai kompakti ryhmä. Olk. H G:n suljettu aliryhmä ja X G-avaruus. Jos $f : X \to G/H$ on G-kuvaus, niin $S = f^{-1}(eH)$ on H-invariantti ja kuvaus

$$\varphi : G \times_H S \to X$$
$$[g, s] \mapsto gs$$

on G-homeomorfismi.

Tod.

- $f^{-1}(eH)$ on H-invariantti:

  Jos $x \in f^{-1}(eH)$ ja $h \in H$, niin
  $$f(hx) \underset{\uparrow\ f \text{ ekviv.}}{=} hf(x) \underset{\uparrow\ x \in f^{-1}(eH)}{=} h \cdot eH = hH = eH,$$
  joten $hx \in f^{-1}(eH)$.

- φ hyvin määr.:

  Jos $[g, s] = [g', s']$, niin $\exists\, h \in H$ s.e. $(gh^{-1}, hs) = (g', s')$
  ja $\varphi[g', s'] = \varphi[gh^{-1}, hs] = gh^{-1}hs = gs = \varphi[g, s]$.

- φ jatkuva, koska kaaviossa

$$(*) \quad \begin{tikzcd} G \times S \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\Phi|"] & \\ G \times_H S \arrow[r, "\varphi"'] & X \end{tikzcd}$$

  ($\Phi|$ = toiminnan $G \times X \to X$ rajoittuma)

  $\Phi|$ on jatkuva ja π on tekijäkuvaus.

- φ G-ekvivariantti:
  $$\varphi(g'[g, s]) = \varphi([g'g, s]) = (g'g)s$$
  $$= g'(gs) = g'\varphi([g, s]).$$

- φ surjektio:

  olk. $x \in X$, olk. $gH = f(x) \in G/H$.
  Tällöin $g^{-1}x \in S$, koska $f(g^{-1}x) = g^{-1}f(x) = g^{-1}gH = eH$.
  Siis $[g, g^{-1}x] \in G \times_H S$ ja
  $$\varphi([g, g^{-1}x]) = g(g^{-1}x) = x.$$

- φ injektio: olk. $\varphi[g, s] = \varphi[g', s']$, eli $gs = g's'$.

  Nyt
  $$gH \underset{\uparrow\ f(s) = eH}{=} gf(s) \underset{\uparrow\ \text{ekviv.}}{=} f(gs) = f(g's') \underset{\uparrow\ \text{ekviv.}}{=} g'f(s') \underset{\uparrow\ f(s') = eH}{=} g'H,$$

joten $h = g^{-1}g' \in H$. Siis $gs = g's' = ghs'$, joten $s = hs'$ ja

$$[g', s'] = [\underbrace{g'h^{-1}}_{=g}, \underbrace{hs'}_{=s}] = [g, s].$$

• φ^{-1} jatkuva:

(1) G kompakti ryhmä:

Nyt toimintakuvaus on suljettu kuvaus, koska G on kompakti (Teoreema 2.10). Koska $S \in \mathfrak{X}$, on $\Phi| : G \times S \to \mathfrak{X}$ suljettu. Jos nyt $C \in G \times_H S$, saadaan kaaviosta $(*)$

$$\varphi(C) = \Phi| (\underbrace{\pi^{-1}C}_{\in G \times S}) \in \mathfrak{X}.$$

6.11.13 $\longrightarrow$ Siis φ on suljettu kuvaus $\Rightarrow$ φ^{-1} on jatkuva.

(2) G Lien ryhmä:

Tarvitsemme Lien ryhmistä seuraavaa lisätietoa: Projektiolla $q : G \to G/H$ on n.s. lokaali sektio, eli on olemassa eH:n ympäristö U G/H:ssa ja jatkuva kuvaus $\sigma : U \to G$ s.e. $q \circ \sigma = id_U$, esim. [Kawakubo: The theory of transformation groups, Th. 3.37].

$$\begin{tikzcd} G \times_H S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & \mathfrak{X} \arrow[d, "f"] \\ & G/H \end{tikzcd}$$

Jos $x \in f^{-1}(U) \subset \mathfrak{X}$, niin $(\sigma f(x))^{-1} x \in S$:

jos merk. $f(x) = gH \in G/H$ ja $\sigma f(x) = \bar{g} \in G$, on siis $\bar{g}H = gH$ eli $\bar{g}^{-1}g \in H$. Siis

$$f((\sigma f(x))^{-1} x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ekviv.}}}{=} (\sigma f(x))^{-1} f(x) = \underbrace{\bar{g}^{-1} g}_{\in H} H = eH,$$ eli väite ok.

Merkitään $p : G \times_H S \to G/H$ projektio (Lause 5.2), ja määritellään $\varphi^* : f^{-1}(U) \to p^{-1}(U)$ kaavalla

$$x \longmapsto [\sigma f(x), (\sigma f(x))^{-1} x].$$

Selvästi φ^* on jatkuva.

Ei ole vaikea tarkistaa, että $\varphi| : p^{-1}U \to f^{-1}U$ ja φ^* ovat toistensa käänteiskuvauksia, joten $\varphi|$ on homeomorfismi.

Jos nyt $[g, s] \in G \times_H S$, niin $gp^{-1}U$ on $[g,s]$:n ympäristö $G \times_H S$:ssä ja $gf^{-1}U$ on gs:n ympäristö $\mathfrak{X}$:ssä.

Nyt $\varphi| : gp^{-1}U \to gf^{-1}U$ on yhdiste homeomorfismeista

$$gp^{-1}U \xrightarrow{g^{-1}\cdot} p^{-1}U \xrightarrow{\varphi|} f^{-1}U \xrightarrow{g\cdot} gf^{-1}U.$$

Tämä osoittaa, että φ on homeomorfismi. $\square$

Teoreema 5.9. Olk. X G-avaruus, H G:n kompakti aliryhmä. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

1) S on H-ydin X:ssä

2) a) $S \Subset GS$

b) S on H-invariantti

c) $G(S|S) = H$

d) S:llä on ympäristö V GS:ssä, s.e. $\overline{G(V|V)}$ on kompakti.

Tod. 1) ⇒ 2): HT

2) ⇒ 1): Määr. $f : GS \to G/H$ kaavalla
$$gs \longmapsto gH.$$

- f on hyvin määritelty: Jos $gs = g's'$ $(g, g' \in G;\ s, s' \in S)$, niin $s = g^{-1}g's'$, joten $g^{-1}g' \in G(S|S) \overset{c)}{=} H$, joten $g' \in gH$ eli $g'H = gH$.
- f G-ekvivariantti: $f(\bar{g}(gs)) = f((\bar{g}g)s) = (\bar{g}g)H = \bar{g}(gH) = \bar{g}f(gs)$.
- f jatkuva:

Käytetään verkkoja (nets), kts. Teoreema 2.10 ja Huomautus 2.11. Oletetaan, että on annettu verkot (g_α) G:ssä ja (s_α) S:ssä, s.e. $g_\alpha s_\alpha \to gs$. On osoitettava, että $f(g_\alpha s_\alpha) \to f(gs)$, eli että $g_\alpha H \to gH$ G/H:ssa.

Tapaus 1: $g = e$ eli $g_\alpha s_\alpha \to s \in S$.

Jos $g_\alpha H \not\to eH$ niin on olemassa eH:n ympäristö $\tilde{U}$ s.e. löytyy mieliv. suuria α s.e. $g_\alpha H \notin \tilde{U}$. Nyt $U = \pi^{-1}(\tilde{U})$ on H:n ympäristö G:ssä ja löytyy mieliv. suuria α s.e. $g_\alpha \notin U$. Muodostamalla näistä osaverkko, void. ol. että mikään (g_α):n osaverkko ei suppene H:n pistettä kohti. $\Big\}\ (*)$

Olkoon nyt V S:n ympäristö GS:ssä s.e. $\overline{G(V|V)}$ on kompakti. Koska $g_\alpha s_\alpha \to s \in S$, on $g_\alpha s_\alpha \in V$ ja siis $g_\alpha \in G(V|V)$ tarpeeksi suurilla α. Koska $\overline{G(V|V)}$ on kompakti, voidaan olettaa, että $g_\alpha \to \bar{g} \in G$.

Koska nyt $g_\alpha s_\alpha \to s$, on $s_\alpha = g_\alpha^{-1}(g_\alpha s_\alpha) \to \bar{g}^{-1}s$.

Koska $S \Subset GS$, niin $\bar{g}^{-1}s \in S$, eli $\bar{g} \in G(S|S) \overset{c)}{=} H$.

Siis (g_α):n osaverkko $\to \bar{g} \in H$, ristiriita $(*)$:n kanssa.

Tapaus 2: $g_\alpha s_\alpha \to gs$.

Nyt $g^{-1}g_\alpha s_\alpha \to s \in S$, joten Tapaus 1 ⇒ $g^{-1}g_\alpha H \to eH$, josta seuraa $g_\alpha H \to gH$.

□