IV Haarin integraali kompakteille ryhmille

Olk. G kompakti topologinen ryhmä

Merk.

$$C(G,\mathbb{R}) = \{ f : G \to \mathbb{R} \mid f \text{ jatkuva} \}.$$

Tunnetusti $C(G,\mathbb{R})$ on $\mathbb{R}$-kertoiminen vektoriavaruus, kun laskutoimitukset määritellään pisteittäin:

$$(f_1+f_2)(g) = f_1(g) + f_2(g) \quad , \quad f_1, f_2 \in C(G,\mathbb{R}), g \in G$$

$$(af)(g) = a f(g) \quad , \quad f \in C(G,\mathbb{R}), a \in \mathbb{R}, g \in G,$$

kts. esim. [Väisälä: Topologia I, s. 15].

Olk. $h \in G$. Määr.

$$R_h : C(G,\mathbb{R}) \to C(G,\mathbb{R})$$
$$f \longmapsto R_h f,$$

missä $R_h f(g) = f(gh)$.

Vastaavasti $L_h : C(G,\mathbb{R}) \to C(G,\mathbb{R})$, $L_h f(g) = f(hg)$

(Esim.: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $R_t f(x) = f(x+t) = L_t f(x)$)

Huom. R_h on lineaarinen isomorfismi $C(G,\mathbb{R}) \to C(G,\mathbb{R})$ ja $R_{h'} \circ R_h = R_{h'h}$ $\forall h', h \in G$.
Samoin L_h on lin. isomorfismi ja $L_{h'} \circ L_h = L_{hh'}$ $\forall h', h \in G$.
(HT)

Teoreema 4.1. Olk. G kompakti topologinen ryhmä. On olemassa yksikäsitteinen funktio

$$I : C(G,\mathbb{R}) \to \mathbb{R},$$

jolla on seuraavat ominaisuudet:

(a) $I(f_1+f_2) = I(f_1) + I(f_2)$

(b) $I(cf) = c\,I(f)$ $\quad (c \in \mathbb{R})$

(c) Jos $f \in C(G,\mathbb{R})$ ja $f(g) \geq 0$ $\forall g$, niin $I(f) \geq 0$

(d) $I(1) = 1$, missä $1 : G \to \mathbb{R}$, $1(g) = 1$ $\forall g$

(e) $I(R_h f) = I(f) = I(L_h f)$ $\quad (\forall h \in G)$

Funktio I on G:n <u>Haarin integraali</u>.

Ominaisuuksien (a) ja (b) mukaan I on (vektoriavaruuksien välinen) lineaarinen kuvaus. Ominaisuus (c) on luonnollinen integraalin ominaisuus. (d) on normalisointi, jota tarvitaan funktion I yksikäsitteisyyteen (Nimittäin, jos $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $J : C(G,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $J(f) = a \cdot I(f)$, toteuttaa kaikki muut ominaisuudet paitsi (d). Myös vakiofunktio toteuttaa muut paitsi (d):n). Ominaisuus (e) tarkoittaa, että integraali on translaatioiden suhteen invariantti.

Todistus on melko pitkä, emme käy sitä yksityiskohtaisesti läpi; kts. esim. [L.S. Pontryagin: Topological groups, 2. painos, 1966; section 29, s. 192-201]. Mielivaltaiselle lokaalisti kompaktille separoituvalle topologiselle ryhmälle integraalin konstruoi Haar (1933). Seuraavana vuonna von Neumann esitti yksinkertaisemman konstruktion kompakteille ryhmille.

Yleensä merkitään $I(f) = \int_G f(g)\,dg$ tai vielä lyhyemmin $\int f(g)\,dg$. Tätä merkintää käyttäen ehto (e) saa muodon

$$\int f(gh)\,dg = \int f(g)\,dg = \int f(hg)\,dg .$$

Helppoja seurauksia ominaisuuksista (a) - (e):

$$\int (c_1 f_1 + c_2 f_2)(g)\,dg = c_1 \int f_1(g)\,dg + c_2 \int f_2(g)\,dg .$$

$$\int (f_1 - f_2)(g)\,dg = \int f_1(g)\,dg - \int f_2(g)\,dg .$$

Jos $f_1 \leq f_2$ (eli $f_1(g) \leq f_2(g)\ \forall g$), niin $\int f_1(g)\,dg \leq \int f_2(g)\,dg$.

Jos $m \leq f(g) \leq M \quad \forall g \quad (m, M \in \mathbb{R})$, niin $m \leq \int f(g)\,dg \leq M$.

Jos $f : G \to \mathbb{R}$ on jatkuva, niin myös funktio

$$|f| : G \to \mathbb{R},$$

$|f|(g) = |f(g)|$, on jatkuva, ja

$$\left| \int f(g)\,dg \right| \leq \underbrace{\int |f|(g)\,dg}_{= \int |f(g)|\,dg} . \qquad \text{(HT)}$$

Jos merk. $M = \max\{|f(g)| \mid g \in G\}$, niin
$$\left|\int f(g)\,dg\right| \le \int |f(g)|\,dg \le M.$$

Lause 4.2. Olk. $f \in C(G,\mathbb{R})$, $f(g) \ge 0$ $\forall g$ ja $f(g) > 0$ jollakin g. Tällöin
$$\int f(g)\,dg > 0$$

Tod. Merk. $U = f^{-1}(]0,\infty[) \in G$, $U \ne \emptyset$.
Joukot $\{hU\}_{h\in G}$ muodostavat G:n avoimen peitteen, joten (G komp.) $\exists\, h_1,\dots,h_n \in G$ s.e. $h_1U \cup h_2U \cup \dots \cup h_nU = G$.
Nyt funktio $L_{h_i^{-1}}f$ on positiivinen joukossa h_iU ja ei-negatiivinen kaikkialla, sillä jos $h_ig \in h_iU$ $(g\in U)$, niin
$$(L_{h_i^{-1}}f)(h_ig) = f(h_i^{-1}h_ig) = f(g) > 0 \quad (\text{koska } g \in U),$$
ja $\forall g' \in G$ on $(L_{h_i^{-1}}f)(g') = f(h_i^{-1}g') \ge 0$.
Siis funktio
$$F = \sum_{i=1}^{n} L_{h_i^{-1}}f : G \to \mathbb{R}$$
on positiivinen koko G:ssä (jokainen x kuuluu johonkin joukoista h_iU).
Koska F on jatkuva ja G kompakti, F saa pienimmän arvonsa (joka siis on >0), eli $\exists\, c>0$ s.e.
$$F(g) \ge c \quad \forall g \in G.$$
Siis
$$\int F(g)\,dg \ge c.$$
Toisaalta
$$\int F(g)\,dg = \int \Big(\sum_{i=1}^{n} L_{h_i^{-1}}f\Big)(g)\,dg \overset{(a)}{=} \sum_{i=1}^{n}\int (L_{h_i^{-1}}f)(g)\,dg \overset{(e)}{=} \sum_{i=1}^{n}\int f(g)\,dg = n\int f(g)\,dg,$$
joten $n\int f(g)\,dg \ge c$ ja $\int f(g)\,dg \ge \frac{c}{n} > 0$. $\square$

Käytetään merkintää $f \ge h$, jos $f(g) \ge h(g)$ $\forall g \in G$ ja merkintää $f > h$, jos $f \ge h$ ja $f \ne h$, eli $f(g) \ge h(g)$ $\forall g$ ja $\exists\, g$ s.e. $f(g) > h(g)$.

Korollaari 4.3. Jos $f_1, f_2 \in C(G, \mathbb{R})$ ja $f_1 < f_2$, niin

$$\int f_1(g)\,dg < \int f_2(g)\,dg.$$

Tod. Koska $f_1 < f_2$, on $(f_2 - f_1)(g) \geq 0 \ \forall g$ ja $\exists\, g$ s.e. $(f_2 - f_1)(g) > 0$, joten 4.2. $\Rightarrow$

$$\int (f_2 - f_1)(g)\,dg > 0.$$

$$\Rightarrow \int f_2(g)\,dg - \int f_1(g)\,dg > 0 \quad \Rightarrow \int f_1(g)\,dg < \int f_2(g)\,dg.$$

$\square$

Korollaari 4.4. Jos $f \in C(G, \mathbb{R})$ ja $m < f(g) < M \ \forall g \in G$, niin

$$m < \int f(g)\,dg < M.$$

Tod. Sovelletaan edellistä korollaaria vakiofunktioihin $\underline{m}$ ja $\underline{M}$ (ja muistetaan, että $\int \underline{m}(g)\,dg = \int m \cdot \underline{1}(g)\,dg = m \cdot \int \underline{1}(g)\,dg = m \cdot 1 = m$ ja $\int \underline{M}(g)\,dg = \ldots = M$.)

$\square$

Korollaari 4.5. Jos $f \in C(G, \mathbb{R})$ ja $|f(g)| < M \ \forall g \in G$, niin

$$\left| \int f(g)\,dg \right| \leq \int |f(g)|\,dg < M.$$

$\square$

Olk. G kompakti top. ryhmä ja X top. avaruus, ja

$$f : G \times X \to \mathbb{R}$$

jatkuva funktio.

Kiinteällä $x \in X$ saadaan jatkuva funktio $f_x : G \to \mathbb{R}$ ja voidaan määritellä

$$F(x) = \int f_x(g)\,dg = \int f(g, x)\,dg.$$

Saadaan funktio

$$F : X \to \mathbb{R}.$$

Teoreema 4.6. Olk. G kompakti top. ryhmä ja $f : G \times \overline{X} \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio ($\overline{X}$ top. avaruus). Tällöin funktio
$$F : \overline{X} \to \mathbb{R}$$
$$F(x) = \int f(g,x)\, dg$$
on jatkuva.

Tod. Olk. $x_0 \in \overline{X}$. Osoitetaan, että F on jatkuva x_0:ssa.
Olk. $\varepsilon > 0$.
Tarkastellaan funktiota $\varphi : G \times \overline{X} \to \mathbb{R}$
$$(g,x) \longmapsto |f(g,x) - f(g,x_0)|.$$
Huom. $|f(g,x) - f(g,x_0)| < \varepsilon \iff (g,x) \in \underbrace{\varphi^{-1}(]-\infty, \varepsilon[)}_{\text{merk. } U} \subset G \times \overline{X}$.
Koska $(g,x_0) \in U \quad \forall g \in G$, niin
U on joukon $G \times \{x_0\}$ ympäristö $G \times \overline{X}$:ssä.
Koska G on kompakti, löytyy Lemman 3.9 nojalla
pisteen x_0 ympäristö V s.e. $G \times V \subset U$, eli
$$|f(g,x) - f(g,x_0)| < \varepsilon \quad \forall g \in G,\ x \in V.$$
Jos nyt $x \in V$, niin
$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int f(g,x)\, dg - \int f(g,x_0)\, dg \right|$$
$$= \left| \int f(g,x) - f(g,x_0)\, dg \right|$$
$$\overset{4.4.}{\leq} \int \underbrace{|f(g,x) - f(g,x_0)|}_{< \varepsilon \ \forall g}\, dg < \varepsilon.$$
Siis F on jatkuva pisteessä x_0. $\square$

Tarkastellaan sitten kahta kompaktia top. ryhmää G, H, ja tuloa $G \times H$.
Koska $G \times H$ on myös kompakti top. ryhmä, on Teoreeman 4.1 nojalla olemassa Haarin integraali $I_{G \times H}$.

Olk. $f : G \times H \to \mathbb{R}$ jatkuva.
Jokaisella kiinteällä $h \in H$ voidaan määritellä
$$K(h) = \int_G f(g,h)\, dg$$
ja Teoreeman 4.6 nojalla saadaan jatkuva funktio
$$K : H \to \mathbb{R}.$$
Siis voidaan muodostaa integraali
$$\int_H K(h)\, dh = \int_H \left(\int_G f(g,h)\, dg \right) dh.$$

Samoin jokaisella kiinteällä $g \in G$ voidaan määritellä
$$L(g) = \int_H f(g,h)\,dh$$
ja saadaan jatkuva funktio $L : G \to \mathbb{R}$.
Siis voidaan muodostaa
$$\int_G L(g)\,dg = \int_G \left(\int_H f(g,h)\,dh \right) dg .$$

Teoreema 4.7. Olk. G ja H kompakteja top. ryhmiä, ja $f : G \times H \to \mathbb{R}$ jatkuva.
Tällöin
$$\underset{(1)}{I_{G\times H}(f)} = \underset{(2)}{\int_H \left(\int_G f(g,h)\,dg \right) dh} = \underset{(3)}{\int_G \left(\int_H f(g,h)\,dh \right) dg} .$$

Tod.
Osoitamme, että $(1) = (2)$ osoittamalla, että (2) toteuttaa Haarin integraalin ominaisuudet (a) - (e) ryhmälle $G \times H$.
Väite seuraa sitten integraalin yksikäsitteisyydestä.

Merk. $I^*(f) = \int_H \left(\int_G f(g,h)\,dg \right) dh \quad \left(= \int_H k(h)\,dh \right)$

(a) Olk. $f_1, f_2 \in C(G\times H, \mathbb{R})$. Tällöin
$$\begin{aligned} I^*(f_1+f_2) &= \int_H \left(\int_G (f_1+f_2)(g,h)\,dg \right) dh \\ &= \int_H \left(\int_G f_1(g,h) + f_2(g,h)\,dg \right) dh \\ &= \int_H \left(\int_G f_1(g,h)\,dg + \int_G f_2(g,h)\,dg \right) dh \\ &= \int_H k_1(h) + k_2(h)\,dh \\ &= \int_H k_1(h)\,dh + \int_H k_2(h)\,dh = I^*(f_1) + I^*(f_2). \end{aligned}$$

(b) Vastaavasti
(c) Selvä
(d) Selvä
(e) Olk. $(g_0,h_0) \in G \times H$. Tällöin
$$I^*(R_{(g_0,h_0)} f) = \int_H \left(\int_G R_{(g_0,h_0)} f(g,h)\,dg \right) dh$$
$$= \int_H \left(\int_G f(gg_0, hh_0)\,dg \right) dh \overset{(e)}{=} \int_H \left(\int_G f(g, hh_0)\,dg \right) dh$$
$$= \int_H k(hh_0)\,dh \overset{(e)}{=} \int_H k(h)\,dh = I^*(f).$$

Vastaavasti $I^*(L_{(g_0,h_0)} f) = I^*(f)$.

Siis Haarin integraalin yksikäsitteisyyden nojalla
$$I^*(f) = I_{G\times H}(f) \qquad \forall f \in C(G\times H, \mathbb{R}).$$

Vastaavasti osoitetaan, että (1) = (3). $\square$

Tarkastellaan seuraavaksi vektoriarvoisia kuvauksia $f: G \to \mathbb{R}^n$ (G kompakti top. ryhmä). Siis f on muotoa $f = (f_1, \dots, f_n)$. Jokainen koordinaattifunktio $f_i = pr_i \circ f : G \to \mathbb{R}$ on jatkuva reaaliarvoinen funktio, ja siis on olemassa
$$\int_G f_i(g)\,dg, \qquad 1 \le i \le n.$$

Määr. f:n Haarin integraali

$$\int_G f(g)\,dg = \left(\int f_1(g)dg, \dots, \int f_n(g)\,dg\right) \in \mathbb{R}^n.$$

Lause 4.8. Olk. $f \in C(G, \mathbb{R}^n)$ ja $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lineaarikuvaus. Tällöin $T\circ f: G \to \mathbb{R}^k$ ja
$$\int (T\circ f)(g)\,dg = T\left(\int f(g)\,dg\right) \in \mathbb{R}^k.$$

Tod. Olk. $\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn}\end{bmatrix}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, T:n matriisi (tavall. kantojen suhteen).

Siis $T(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$, missä $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$.

Nyt
$$T\left(\int f(g)\,dg\right) = T\left(\int f_1(g)dg, \dots, \int f_n(g)\,dg\right)$$
$$= \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} \int f_j(g)\,dg, \dots, \sum_{j=1}^n a_{kj} \int f_j(g)\,dg\right)$$
$$= \left(\int \sum_{j=1}^n a_{1j} f_j(g)\,dg, \dots, \int \sum_{j=1}^n a_{kj} f_j(g)\,dg\right)$$
$$= \left(\int (T\circ f)_1(g)\,dg, \dots, \int (T\circ f)_k(g)\,dg\right)$$
$$= \int (T\circ f)(g)\,dg. \qquad \square$$

Olk. $A : V^n \to W^m$ lineaarikuvaus, missä V, W ovat äärellisulotteisia vektoriavaruuksia. Olk. $\mathcal{V} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ kanta V^n:lle ja $\mathcal{W} = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m\}$ kanta W^m:lle.

Merk.

$$(*) \qquad A(\bar{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \bar{w}_i \qquad , \quad 1 \le j \le n$$

($A(\bar{v}_j) \in W$, joten koska $\{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m\}$ on kanta, niin löytyy yksikäsitteiset $a_{ij} \in \mathbb{R}$ s.e. $(*)$ pätee).

Lineaarikuvauksen A matriisi kantojen $\mathcal{V}$ ja $\mathcal{W}$ suhteen on siis $(m \times n)$-matriisi

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

Olk. $B : W^m \to U^p$ toinen lineaarikuvaus ja $\mathcal{U} = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_p\}$ U^p:n kanta. Tunnetusti lin. kuvauksen $B \circ A : V^n \to U^p$ matriisi kantojen $\mathcal{V}$ ja $\mathcal{U}$ suhteen saadaan matriisikertolaskulla

$$(**) \qquad [B \circ A]_{\mathcal{U},\mathcal{V}} = [B]_{\mathcal{U},\mathcal{W}} \cdot [A]_{\mathcal{W},\mathcal{V}} .$$

Ol. nyt, että $\mathcal{V} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ ja $\mathcal{V}' = \{\bar{v}_1', \dots, \bar{v}_n'\}$ ovat V^n:n kantoja. Kuvauksen $Id : V^n \to V^n$ matriisia näiden kantojen suhteen merkitään

$$[\mathcal{V}' | \mathcal{V}] = [Id]_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} = [a_{ij}] ,$$

missä alkiot a_{ij} toteuttavat $\bar{v}_j = Id(\bar{v}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \bar{v}_i'$, kuten kaavassa $(*)$.

Tark. sitten matriisia $[\mathcal{V} | \mathcal{V}'] = [Id]_{\mathcal{V},\mathcal{V}'}$;
Kaavan $(**)$ nojalla saadaan

$$[Id]_{\mathcal{V},\mathcal{V}'} \cdot [Id]_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} = [Id \circ Id]_{\mathcal{V},\mathcal{V}} = I_n = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

ja

$$[Id]_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} \cdot [Id]_{\mathcal{V},\mathcal{V}'} = [Id \circ Id]_{\mathcal{V}',\mathcal{V}'} = I_n ,$$

joten $[Id]_{\mathcal{V},\mathcal{V}'} = [Id]_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}^{-1}$, toisin merkittynä $[\mathcal{V} | \mathcal{V}'] = [\mathcal{V}' | \mathcal{V}]^{-1}$.

Tark. taas lineaarikuvausta $A: V^n \to W^m$.

Olk. $\mathcal{V} = \{\bar v_1, \dots, \bar v_n\}$ ja $\mathcal{V}' = \{\bar v_1', \dots, \bar v_n'\}$ kantoja V^n:lle ja
$\mathcal{W} = \{\bar w_1, \dots, \bar w_m\}$ ja $\mathcal{W}' = \{\bar w_1', \dots, \bar w_m'\}$ kantoja W^m:lle.

Tällöin (**):n nojalla on

$$[A]_{\mathcal{W}',\mathcal{V}'} = [Id_{W^m}]_{\mathcal{W}',\mathcal{W}} \cdot [A]_{\mathcal{W},\mathcal{V}} \cdot [Id_{V^n}]_{\mathcal{V},\mathcal{V}'}$$

eli
$$[A]_{\mathcal{W}',\mathcal{V}'} = [\mathcal{W}' | \mathcal{W}] \cdot [A]_{\mathcal{W},\mathcal{V}} \cdot [\mathcal{V} | \mathcal{V}']$$

eli
$$[A]_{\mathcal{W}',\mathcal{V}'} = [\mathcal{W}' | \mathcal{W}] \cdot [A]_{\mathcal{W},\mathcal{V}} \cdot [\mathcal{V}' | \mathcal{V}]^{-1}.$$

Olk. $A: V^n \to V^n$ lin. isomorfismi. Tällöin

$$[A^{-1}]_{\mathcal{V},\mathcal{V}} \cdot [A]_{\mathcal{V},\mathcal{V}} = [A^{-1} \circ A]_{\mathcal{V},\mathcal{V}} = I_n$$

ja

$$[A]_{\mathcal{V},\mathcal{V}} \cdot [A^{-1}]_{\mathcal{V},\mathcal{V}} = I_n,$$

joten $[A]_{\mathcal{V},\mathcal{V}}$ on kääntyvä matriisi ja $[A^{-1}]_{\mathcal{V},\mathcal{V}} = [A]_{\mathcal{V},\mathcal{V}}^{-1}$.

Siis $[A]_{\mathcal{V},\mathcal{V}} \in G\ell(n,\mathbb{R})$.

Jos merkitään $G\ell(V^n)$ = kaikkien lineaaristen isomorfismien $V^n \to V^n$ muodostama ryhmä, ja $\mathcal{V}$ on V^n:in kanta, niin saadaan bijektio

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{V}} : G\ell(V^n) &\to G\ell(n,\mathbb{R}) \\ A &\longmapsto [A]_{\mathcal{V},\mathcal{V}} . \end{aligned}$$

Koska $[B \circ A]_{\mathcal{V},\mathcal{V}} = [B]_{\mathcal{V}} \cdot [A]_{\mathcal{V}}$, on $M_{\mathcal{V}}$ homomorfismi, ja siis ryhmien välinen isomorfismi.

Joukkoon $G\ell(V^n)$ voidaan myös määritellä topologia s.e. $M_{\mathcal{V}}$ tulee olemaan homeomorfismi, ja $G\ell(V^n)$ on tällöin topologinen ryhmä.

Oletetaan nyt, että vektoriavaruudessa V^n on määrätelty sisätulo $\langle\ ,\ \rangle$.

Määr. 4.9. Sanomme, että lineaarinen isomorfismi

$$A : (V^n, \langle,\rangle) \to (V^n, \langle,\rangle)$$

on ortogonaalinen kuvaus, jos

$$\langle A\bar{x}, A\bar{y}\rangle = \langle \bar{x}, \bar{y}\rangle \quad \forall\, \bar{x}, \bar{y} \in V^n.$$

Huom. Sisätuloavaruudelle $(V^n, \langle,\rangle)$ on aina olemassa ortonormaali kanta (Gram-Schmidt ortogonalisointi), eli kanta $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$, jolle

$$\langle \bar{v}_i, \bar{v}_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Lause 4.10. Ol. $A : (V^n, \langle,\rangle) \to (V^n, \langle,\rangle)$ on ortogonaalinen kuvaus, ja $\mathcal{V} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ on ortonormaali kanta V^n:lle. Tällöin $[A]_{\mathcal{V},\mathcal{V}} \in O(n)$.

Tod.

Nyt siis

$$(*) \qquad \langle A\bar{v}_i, A\bar{v}_j\rangle \underset{\text{ortog. kuvaus}}{\overset{\uparrow}{=}} \langle \bar{v}_i, \bar{v}_j\rangle \underset{\text{orton. kanta}}{\overset{\uparrow}{=}} \delta_{ij} \qquad \forall\ 1 \le i, j \le n.$$

Huomataan ensin, että jos $\bar{x}, \bar{y} \in V^n$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{\mathcal{V}}$, $\bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}_{\mathcal{V}}$,

niin

$$(**) \begin{cases} \langle \bar{x}, \bar{y}\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i\bar{v}_i, \sum_{j=1}^n y_j\bar{v}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \left\langle \bar{v}_i, \sum_{j=1}^n y_j\bar{v}_j\right\rangle \\ = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \underbrace{\langle \bar{v}_i, \bar{v}_j\rangle}_{=\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^n x_i y_i = [\bar{x}]_{\mathcal{V}} \underset{\text{pistetulo}}{\overset{\uparrow}{\cdot}} [\bar{y}]_{\mathcal{V}} = [\bar{x}]_{\mathcal{V}}^T \overset{\substack{\text{matriisi-}\\ \text{tulo}\\ \downarrow}}{\cdot} [\bar{y}]_{\mathcal{V}} \end{cases}$$

$$\text{Nyt } \langle \overbrace{A\bar{v}_i}^{\in V^n}, \overbrace{A\bar{v}_j}^{\in V^n} \rangle \overset{(**)}{=} \overbrace{([A]_{\mathcal{V},\mathcal{V}} \cdot \bar{e}_i)}^{\text{vektorin } A\bar{v}_i \text{ koordinaatit kannassa } \mathcal{V}}{}^T \cdot \underbrace{([A]_{\mathcal{V},\mathcal{V}} \cdot \bar{e}_j)}_{\text{vektorin } A\bar{v}_j \text{ koord. kannassa } \mathcal{V}}$$

$$= \bar{e}_i^T [A]_{\mathcal{V},\mathcal{V}}^T [A]_{\mathcal{V},\mathcal{V}}\, \bar{e}_j \overset{(**)}{=} \delta_{ij}.$$

Nyt

$$\delta_{ij} = \bar{e}_i^T [A]_{\mathcal{V},\mathcal{V}}^T \cdot [A]_{\mathcal{V},\mathcal{V}} \cdot \bar{e}_j = \begin{array}{c} \hspace{2.2em} i \\ [0 \dots 1 \dots 0] \end{array} \overbrace{\begin{bmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{n1} & \cdots & s_{nn} \end{bmatrix}}^{A^TA} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} j$$

$$= \begin{array}{c} \hspace{2.2em} i \\ [0 \dots 1 \dots 0] \end{array} \begin{bmatrix} s_{1j} \\ \vdots \\ s_{nj} \end{bmatrix} = s_{ij}.$$

Siis $A^TA = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} = I^n$, eli $A \in \mathcal{O}(n)$.

$\square$

Määr. 4.11. Olk. G topologinen ryhmä. G:n lineaarinen esitys on jatkuva homomorfismi
$$\varphi : G \to Gl(n, \mathbb{R}).$$
Sanomme, että kaksi lin. esitystä $\varphi_1, \varphi_2 : G \to Gl(n, \mathbb{R})$ ovat ekvivalentit, jos $\exists\, C \in Gl(n, \mathbb{R})$ s.e.
$$\varphi_2(g) = C\,\varphi_1(g)\,C^{-1}, \quad \forall g \in G.$$

Huom. Jos $\varphi : G \to Gl(n, \mathbb{R})$ on lin. esitys, niin voidaan määritellä G:n toiminta $\mathbb{R}^n$:ssä $(g, \bar{x}) \longmapsto \varphi(g)\bar{x}$.

Tavoitteena on osoittaa, että kompaktin ryhmän esitys $\varphi : G \to Gl(n, \mathbb{R})$ on ekvivalentti ortogonaalisen esityksen $\varphi' : G \to \mathcal{O}(n)$ kanssa.

Ol., että $\varphi : G \to Gl(n, \mathbb{R})$ on G:n lin. esitys. Jokaisella $g \in G$, olk.
$$\Phi(g) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
se lin. isomorfismi, jolle
$$[\Phi(g)]_{e,e} = \varphi(g) \qquad (e = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\} \text{ tavall. kanta}).$$

Saadaan kuvaus $\Phi : G \to Gl(\mathbb{R}^n)$, ja
$$m_e \circ \Phi = \varphi : G \to Gl(n, \mathbb{R}),$$
missä $m_e : Gl(\mathbb{R}^n) \to Gl(n, \mathbb{R})$, $A \mapsto [A]_{e,e}$, on topologisten ryhmien välinen isomorfismi.
Vastaavasti $\Phi = m_e^{-1} \circ \varphi : G \to Gl(\mathbb{R}^n)$ on myös jatkuva homomorfismi.

Oletetaan, että olemme löytäneet $\mathbb{R}^n$:lle sisätulon $\langle \, , \rangle$, s.e
$$\Phi(g) : (\mathbb{R}^n, \langle \, , \rangle) \to (\mathbb{R}^n, \langle \, , \rangle)$$
on ortogonaalinen lineaarikuvaus $\forall g \in G$.

Gram-Schmidtin menetelmällä voimme löytää $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$:lle ortonormaalin kannan $\mathcal{V} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$.
Lauseen 4.10 nojalla $[\Phi(g)]_{\mathcal{V},\mathcal{V}} \in \mathcal{O}(n) \quad \forall g \in G$.

Olk. $\psi(g) = [\Phi(g)]_{\nu,\nu} = \eta_\nu(\Phi(g)) = (\eta_\nu \circ \Phi)(g)$, $g \in G$. (76)

Nyt

$$\psi : G \to O(n) \subset Gl(n, \mathbb{R})$$

on jatkuva homomorfismi, eli G:n lineaarinen esitys. Koska $\psi : G \to O(n)$, sanomme, että ψ on G:n ortogonaalinen esitys.

Siis

$$[\Phi(g)]_{e,e} = [e|\nu]\,[\Phi(g)]_{\nu,\nu}\,[e|\nu]^{-1} \quad \forall g \in G.$$

Jos merk. $C = [e,\nu] \in Gl(n,\mathbb{R})$, saadaan siis

$$\varphi(g) = C\,\psi(g)\,C^{-1} \quad \forall g \in G.$$

Siis esitykset φ ja ψ ovat ekvivalentit, eli φ on ekvivalentti ortogonaalisen esityksen kanssa.

Olemme siis osoittaneet

Lause 4.12. Olk. G top. ryhmä ja $\varphi : G \to Gl(n,\mathbb{R})$ G:n lin. esitys. Olk. $\Phi : G \to Gl(\mathbb{R}^n)$ määritelty kaavalla $[\Phi(g)]_{e,e} = \varphi(g)$, $g \in G$. Oletetaan, että on olemassa sisätulo $\langle\, ,\, \rangle$ $\mathbb{R}^n$:lle s.e. $\Phi(g) : (\mathbb{R}^n, \langle\, ,\, \rangle) \to (\mathbb{R}^n, \langle\, ,\, \rangle)$ on ortogonaalinen lin. kuvaus $\forall g \in G$. Tällöin $\varphi : G \to Gl(n,\mathbb{R})$ on ekvivalentti ortogonaalisen esityksen kanssa.

$\square$

Teoreema 4.13. Jokainen kompaktin top. ryhmän esitys on ekvivalentti ortogonaalisen esityksen kanssa.

Tod. Olk. G komp. top. ryhmä ja $\varphi : G \to Gl(n,\mathbb{R})$ lin. esitys. Kuten aiemmin, määr. $\Phi : G \to Gl(\mathbb{R}^n)$ kaavalla $[\Phi(g)]_{e,e} = \varphi(g)$, jolloin $\Phi = \eta_e^{-1} \circ \varphi : G \to Gl(\mathbb{R}^n)$ on jatkuva homomorfismi.

Edellisen lauseen nojalla riittää osoittaa, että $\exists$ $\mathbb{R}^n$:n sisätulo $\langle\, ,\, \rangle$ s.e. $\Phi(g) : (\mathbb{R}^n, \langle\, ,\, \rangle) \to (\mathbb{R}^n, \langle\, ,\, \rangle)$ on ortogonaalinen $\forall g \in G$. Konstruoidaan tällainen sisätulo.

Olk. $\cdot$ $\mathbb{R}^n$:n tavallinen sisätulo (pistetulo), eli

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \qquad \bar{x} = (x_1, \dots, x_n),\ \bar{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Siis $\cdot$ on bilineaarinen, symmetrinen ja positiivisesti definiitti (eli $\bar{x}\cdot\bar{x} > 0$, kun $\bar{x} \neq \bar{0}$).
Tarkastellaan funktiota

$$f : G \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$(g, \bar{x}, \bar{y}) \longmapsto (\Phi(g)\bar{x}) \cdot (\Phi(g)\bar{y}),$$

joka on jatkuva (HT).
Jokaisella kiinteällä $(\bar{x}, \bar{y})$ on siis

$$f(\cdot, \bar{x}, \bar{y}) : G \to \mathbb{R}, \quad g \mapsto f(g, \bar{x}, \bar{y}),$$

jatkuva, joten on olemassa

$$\int_G f(g, \bar{x}, \bar{y})\, dg = \int_G (\Phi(g)\bar{x}) \cdot (\Phi(g)\bar{y})\, dg.$$

Määritellään

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \int_G (\Phi(g)\bar{x}) \cdot (\Phi(g)\bar{y})\, dg.$$

Osoitetaan, että tämä on sisätulo $\mathbb{R}^n$:ssä:

1) symmetrisyys: selvä, koska $(\Phi(g)\bar{x}) \cdot (\Phi(g)\bar{y}) = (\Phi(g)\bar{y}) \cdot (\Phi(g)\bar{x})$.

2) bilineaarisuus: jos $\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2 \in \mathbb{R}^n$ ja $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, niin

$$\langle \bar{x}, \alpha_1\bar{y}_1 + \alpha_2\bar{y}_2 \rangle = \int (\Phi(g)\bar{x}) \cdot (\Phi(g)(\alpha_1\bar{y}_1 + \alpha_2\bar{y}_2))\, dg$$
$$\overset{\Phi(g)\ \text{lin.}}{=} \int (\Phi(g)\bar{x}) \cdot (\alpha_1\Phi(g)\bar{y}_1 + \alpha_2\Phi(g)\bar{y}_2)\, dg$$
$$\overset{\cdot\ \text{bilin.}}{=} \int \alpha_1(\Phi(g)\bar{x} \cdot \Phi(g)\bar{y}_1) + \alpha_2(\Phi(g)\bar{x} \cdot \Phi(g)\bar{y}_2)\, dg$$
$$\overset{\int\ \text{lin.}}{=} \alpha_1 \int \Phi(g)\bar{x} \cdot \Phi(g)\bar{y}_1\, dg + \alpha_2 \int \Phi(g)\bar{x} \cdot \Phi(g)\bar{y}_2\, dg$$
$$= \alpha_1 \langle \bar{x}, \bar{y}_1 \rangle + \alpha_2 \langle \bar{x}, \bar{y}_2 \rangle.$$

Lineaarisuus 1. muuttujan suhteen vastaavasti (seuraa tietysti myös symmetrisyydestä ja äskeisestä).

3) $\forall\, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ pätee $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = \int \underbrace{\Phi(g)\bar{x} \cdot \Phi(g)\bar{x}}_{\substack{\geq 0 \text{ pistetulon} \\ \text{ominaisuuden} \\ \text{nojalla}}} \geq 0$

integraalin ominaisuus (c)

Jos $\bar{x} \neq \bar{0}$, on $\Phi(g)\bar{x} \neq \bar{0}$ $\forall g \in G$, koska $\Phi(g)$ on lin. isomorfismi $\forall g$.
Siis $\Phi(g)\bar{x} \cdot \Phi(g)\bar{x} > 0$ $\forall g$, joten Lauseen 4.2 nojalla on $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle > 0$.

Siis määrittelemämme $\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on sisätulo.

Olk. $g_0 \in G$ mielivaltainen. Os. lopuksi, että
$$\Phi(g_0) : (\mathbb{R}^n, \langle , \rangle) \to (\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$$
on ortogonaalinen:
olk. $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$. Tällöin

$$\langle \Phi(g_0)\bar{x}, \Phi(g_0)\bar{y} \rangle = \int \Phi(g)\big(\Phi(g_0)\bar{x}\big) \cdot \Phi(g)\big(\Phi(g_0)\bar{y}\big)\, dg$$
$$= \int (\Phi(g) \circ \Phi(g_0))(\bar{x}) \cdot (\Phi(g) \circ \Phi(g_0))(\bar{y})\, dg$$
$$\overset{\Phi \text{ homomorfismi}}{=} \int (\Phi(gg_0))(\bar{x}) \cdot (\Phi(gg_0))(\bar{y})\, dg$$
$$= \int f(gg_0, \bar{x}, \bar{y})\, dg \underset{\substack{\text{integraalin} \\ \text{ominaisuus (e)}}}{=} \int f(g, \bar{x}, \bar{y})\, dg = \langle x, y \rangle .$$

□

Olk. V^n $\mathbb{R}$-vektoriavaruus, $\dim(V^n) = n$. Lin. isomorfismien $V^n \to V^n$ ryhmä on topologinen ryhmä, kuten aiemmin todettiin.
Ryhmän G lineaariselle esitykselle V^n:ssä tarkoitetaan jatkuvaa homomorfismia
$$\Psi : G \to G\ell(V^n).$$

Jos $\mathcal{V} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ on kanta V^n:lle, ja $\varphi : G \to G\ell(n, \mathbb{R})$ on G:n lin. esitys, niin saadaan G:n lin. esitys V^n:ssä määrittelemällä
$$\Phi = m_{\mathcal{V}}^{-1} \circ \varphi : G \to G\ell(V^n),$$
missä $m_{\mathcal{V}} : G\ell(V^n) \to G\ell(n, \mathbb{R})$ on top. ryhmien isomorfismi.
$$A \mapsto [A]_{\mathcal{V},\mathcal{V}}$$

Kääntäen, jos $\Psi : G \to G\ell(V^n)$ on lin. esitys V^n:ssä, saadaan G:n lin. esitys määrittelemällä
$$\Psi = m_{\mathcal{V}} \circ \Phi : G \to G\ell(n, \mathbb{R}).$$

Määr. 4.14. Topologisen ryhmän G lineaarisella esityssavaruudella V^n tarkoitamme äärellisulotteista vektoriavaruutta V^n ja lineaarista esitystä $\Phi : G \to Gl(V^n)$.

Yleensä merk. lyhyemmin $\Phi(g)\bar{x} = g\bar{x}$, $g \in G$, $\bar{x} \in V^n$.

Määr. 4.15. Olk. V ryhmän G lineaarinen esityssavaruus. Sanomme, että V:n (lineaarinen) aliavaruus W on G-invariantti, jos

$$\Phi(g)\bar{x} = g\bar{x} \in W \quad \forall g \in G, \bar{x} \in W.$$

Teoreema 4.16. Olk. V kompaktin top. ryhmän G lineaarinen esityssavaruus, ja W V:n G-invariantti lin. aliavaruus. Tällöin $\exists$ V:n G-invariantti lin. aliavaruus U s.e. $V = U \oplus W$.

Tod. Olk. $\mathcal{V} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ V:n kanta. Avaruudelle V voidaan määr. sisätulo $\cdot$ kaavalla

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

missä $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{\mathcal{V}}$ ja $\bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}_{\mathcal{V}}$ eli $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{v}_i$ ja $\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \bar{v}_i$.

(Siis $\bar{v}_i \cdot \bar{v}_j = \delta_{ij}$ eli kanta $\mathcal{V}$ on ortonormaali kanta tämän sisätulon suhteen).

Kuten Teoreeman 4.13 todistuksessa nähdään, että jos määritellään

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \int (\Phi(g)\bar{x}) \cdot (\Phi(g)\bar{y}) \, dg$$

niin saadaan V:lle sisätulo, joka on G-invariantti

$$\left(\text{eli } \langle g_0\bar{x}, g_0\bar{y} \rangle = \langle \Phi(g_0)\bar{x}, \Phi(g_0)\bar{y} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \quad \forall g_0 \in G \right).$$

Määr. nyt

$$U = W^{\perp} = \{ \bar{v} \in V \mid \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = 0 \quad \forall \bar{w} \in W \}.$$

Pidetään tunnettuna [Honkasalo: Lin. alg. s. 72-73]

U on lin. aliavaruus ja $V = U \oplus W$.

Os. vielä, että U on G-invariantti, eli

$$gU = \Phi(g)(U) \subset U \quad \forall g \in G.$$

Olk. $\bar{u} \in U$, merk. $\bar{u}' = \Phi(g)(\bar{u})$.

Jokaisella $\bar{w} \in W$ pätee nyt

$$\langle \bar{u}', \bar{w} \rangle = \langle \Phi(g)\bar{u}, \bar{w} \rangle \overset{\langle,\rangle \text{ G-invariantti}}{=} \langle \Phi(g^{-1})(\Phi(g)\bar{u}), \Phi(g^{-1})\bar{w} \rangle$$

$$= \langle \Phi(g^{-1}g)\bar{u}, \Phi(g^{-1})\bar{w} \rangle = \langle \Phi(e)\bar{u}, \Phi(g^{-1})\bar{w} \rangle$$

$$= \langle \bar{u}, \Phi(g^{-1})\bar{w} \rangle = 0 .$$

koska W on G-invariantti ja $\bar{u} \in W^{\perp}$.

Siis $\bar{u}' = \Phi(g)(\bar{u}) \in W^{\perp} = U$, mikä todistaa väitteen.

$\square$

Olk. V G:n lineaarinen esitysavaruus, $\Phi : G \to Gl(V)$.

Ol. että W on V:n G-invariantti lin. aliavaruus. Tällöin, jokaisella $g \in G$,

$$\Phi(g)| : W \to W$$

on lin. isomorfismi.

Siis saadaan G:n lineaarinen esitys W:ssä

$$\Phi' : G \to Gl(W)$$

määrittelemällä

$$\Phi'(g) = \Phi(g)|_W \qquad \forall g \in G.$$

Ei ole vaikea osoittaa, että Φ' on jatkuva, jos Φ on (HT).

Täten W siis on G:n lin. esitysavaruus.

Vastaavasti Teoreemassa 4.16 saatava G-invariantti aliavaruus U on G:n lin. esitysavaruus.

Siis suora summa $U \oplus W$ on G:n lineaaristen esitysavaruuksien suora summa. Toiminta on tällöin muotoa $g \cdot (u, w) = (gu, gw)$ ja matriisit muotoa $\begin{pmatrix} A(g) & 0 \\ 0 & B(g) \end{pmatrix}$.

<u>Määr. 4.17.</u> Olk. V G:n lineaarinen esitysavaruus. Sanomme, että V on redusoitumaton (engl. irreducible), jos V:n ainoat G-invariantit lin. aliavaruudet ovat $\{\bar{0}\}$ ja V.

<u>Teoreema 4.18.</u> Olk. G kompakti ryhmä ja V G:n lin. esitysavaruus. Tällöin V voidaan esittää suorana summana G:n redusoitumattomista lin. esitysavaruuksista V_i, $1 \le i \le m$; t.s.

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m,$$

missä jokainen V_i on G:n redusoitumaton lin. esitysavaruus.

<u>Tod.</u> Käytetään toistuvasti Teoreemaa 4.16.

$\square$

Tietzen-Gleasonin jatkolause

Pal. mieleen Tietzen jatkolause [Väisälä: Topologia II, s. 146]:

Olk. X T_4-avaruus, $A \subset X$ suljettu ja $f: A \to [a,b]$ jatkuva.
Tällöin f:llä on jatkuva jatke $g: X \to [a,b]$.

Väite pätee myös, jos suljetun välin $[a,b]$ tilalla on avoin väli tai $\mathbb{R}$
[Väisälä: Top. II, s. 147].

Olk. G kompakti top. ryhmä ja
$$\varphi : G \to Gl(n, \mathbb{R})$$
G:n lineaarinen esitys.
Merkitään $\mathbb{R}^n(\varphi)$ vastaavaa G:n lin. esitysavaruutta;
siis $\mathbb{R}^n(\varphi)$ on $\mathbb{R}^n$, jossa G toimii esityksen φ välityksellä:

$$\theta : G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$(g, \bar{x}) \longmapsto \underbrace{\varphi(g) \cdot \bar{x}}_{\text{matr. kertolasku}} \quad , \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n .$$

Kuten aiemmin, merk. $\Phi(g): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se lin. isomorfismi, jolle $[\Phi(g)]_{e,e} = \varphi(g)$.
Tällöin voidaan kirj. myös
$$\theta : G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$(g, \bar{x}) \longmapsto \Phi(g)(x) .$$

Teoreema 4.19 (Tietze-Gleason)
Olk. G kompakti top. ryhmä, joka toimii normaalissa top. avaruudessa X, ja olkoon A X:n G-invariantti suljettu osajoukko. Olk. $\mathbb{R}^n(\varphi)$ G:n lineaarinen esitysavaruus ja
$$\alpha : A \to \mathbb{R}^n(\varphi)$$
G-ekvivariantti jatkuva kuvaus.
Tällöin α:lla on G-ekvivariantti jatkuva jatke $\bar{\alpha} : X \to \mathbb{R}^n(\varphi)$.

Tod. Se, että α on G-ekvivariantti, on tässä yhteydessä
$$\alpha(ga) = \varphi(g) \cdot \alpha(a) = \Phi(g)(\alpha(a)) \quad \forall g \in G, a \in A.$$

Tietzen jatkolauseen nojalla α:lla on jatkuva jatke $\alpha' : X \to \mathbb{R}^n$.
Kuvaus α' ei välttämättä ole G-ekvivariantti.

Määr. nyt $\bar{\alpha} : X \to \mathbb{R}^n(\varphi)$ kaavalla

$$\bar{\alpha}(x) = \int_G \Phi(g^{-1})(\alpha'(gx))\, dg \quad \forall x \in X.$$

Kuvaus $f : G \times X \to \mathbb{R}^n$
$(g, x) \mapsto \Phi(g^{-1})(\alpha'(gx))$
on jatkuva (HT), joten sen jokainen komponenttifunktio $f_i = pr_i \circ f : G \times X \to \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq n)$ on jatkuva. Vektoriarvoisten funktioiden Haarin integraalin määritelmän nojalla on nyt

$$\bar{\alpha}(x) = \int_G f(g,x)\,dg = \left(\int_G f_1(g,x)\,dg, \ldots, \int_G f_n(g,x)\,dg\right) \overset{\text{merk.}}{=} (\bar{\alpha}_1(x), \ldots, \bar{\alpha}_n(x)).$$

Teoreeman 4.6 nojalla jokainen $\bar{\alpha}_i : X \to \mathbb{R}$ on jatkuva, ja siis $\bar{\alpha} : X \to \mathbb{R}^n$ on jatkuva.

Osoitetaan vielä, että $\bar{\alpha}$ on G-ekvivariantti:
olk. $h \in G$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha}(hx) &= \int_G \Phi(g^{-1})(\alpha'(ghx))\, dg \\
&= \int_G \Phi(h(gh)^{-1})(\alpha'(ghx))\, dg \\
&= \int_G \Phi(h)\Phi((gh)^{-1})(\alpha'(ghx))\, dg \\
&\overset{4.8.}{=} \Phi(h) \int_G \Phi((gh)^{-1})(\alpha'(ghx))\, dg \\
&\overset{4.1.(e)}{=} \Phi(h) \int_G \Phi(g^{-1})(\alpha'(gx))\, dg \\
&= \Phi(h)(\bar{\alpha}(x)).
\end{aligned}$$

Os. lopuksi, että $\bar{\alpha}|A = \alpha$:
olk. $a \in A$. Tällöin jokaisella $g \in G$ on

$$\begin{aligned}
\Phi(g^{-1})\alpha'(ga) &= \Phi(g^{-1})(\Phi(g)(\alpha'(a))) = (\Phi(g^{-1}) \circ \Phi(g))(\alpha'(a)) \\
&= \Phi(e)(\alpha'(a)) = \alpha'(a) = \alpha(a),
\end{aligned}$$
joten

$$\bar{\alpha}(a) = \int_G \Phi(g^{-1})\alpha'(ga)\, dg = \int_G \overbrace{\alpha(a)}^{\text{vakio}}\, dg = \alpha(a). \qquad \square$$

G-invariantin metriikan olemassaolo

Teoreema 4.20 Olk. X G-avaruus (G kompakti top. ryhmä) ja oletetaan, että X on metristyvä. Tällöin on olemassa metriikka $\hat{d}$ X:ille, joka on G-invariantti, t.s. $\hat{d}(gx, gy) = \hat{d}(x, y)$ $\forall g \in G$, $x, y \in X$.

Tod. Olk. d metriikka X:lle (eli metriikan d antama topologia on X:n alkuperäinen topologia).

Määr.

$$\hat{d} : X \times X \to \mathbb{R}$$
$$\hat{d}(x, y) = \int_G d(gx, gy)\, dg .$$

Integraali on olemassa, koska funktio $G \times X \times X \to \mathbb{R}$

$$(g, x, y) \mapsto d(gx, gy)$$

on jatkuva.

On osoitettava, että $\hat{d}$ on $\overbrace{\text{metriikka}}^{G\text{-inv.}}$ ja $\hat{d}$:n antama topologia on X:n alkuperäinen topologia.

$\hat{d}$ on metriikka:

- Koska $d(gx, gy) \geq 0$ $\forall g, x, y$, on $\hat{d}(x, y) \geq 0$ $\forall x, y$.
- $\hat{d}(x, x) = \int_G d(gx, gx)\, dg = \int_G 0\, dg = 0$.
- olk. $x \neq y$. Tällöin integroitava funktio on > 0 ainakin arvolla $g = e$, tällöin $d(gx, gy) = d(x, y) > 0$.
  Lauseen 4.2 nojalla $\hat{d}(x, y) = \int_G d(gx, gy)\, dg > 0$.
  (Itse asiassa integroitava funktio on > 0 kaikilla g)
- Jos $x, y \in X$, on $\hat{d}(x, y) = \int_G d(gx, gy)\, dg = \int_G d(gy, gx)\, dg = \hat{d}(y, x)$.
- Jos $x, y, z \in X$, niin

$$\hat{d}(x, z) = \int_G d(gx, gz)\, dg \leq \int_G d(gx, gy) + d(gy, gz)\, dg$$
$$= \int_G d(gx, gy)\, dg + \int_G d(gy, gz)\, dg = \hat{d}(x, y) + \hat{d}(y, z).$$

$\therefore$ $\hat{d}$ on metriikka.

$\hat{d}$ on G-invariantti:

jos $h \in G$, niin
$$\hat{d}(hx, hy) = \int_G d(ghx, ghy)\, dg \overset{(e)}{=} \int_G d(gx, gy)\, dg = \hat{d}(x,y)$$

$\hat{d}$:n määräämä topologia on sama kuin d:n:

Olk. $x_0 \in X$. Merk. $B(x_0, r) = \{ x \in X \mid d(x, x_0) < r \}$
$$\hat{B}(x_0, r) = \{ x \in X \mid \hat{d}(x, x_0) < r \}$$

1) Osoitetaan, että
$$\forall r > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ s.e. } B(x_0, \delta) \subset \hat{B}(x_0, r).$$

Olk. $r > 0$. Tarkastellaan funktiota
$$d^* : G \times (X, d) \times (X, d) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(g, x, y) \longmapsto d(gx, gy),$$
joka on jatkuva.

Teoreeman 4.6 nojalla myös funktio
$$\hat{d} : (X, d) \times (X, d) \to \mathbb{R}$$
$$\hat{d}(x,y) = \int_G d(gx, gy)\, dg = \int_G d^*(g, x, y)\, dg$$
on jatkuva. Kun kiinnitetään $y = x_0$, saadaan jatkuva funktio
$$\hat{d}' : (X, d) \to \mathbb{R}$$
$$\hat{d}'(x) = \hat{d}(x, x_0).$$

Koska $\hat{d}'$ on jatkuva pisteessä x_0 ja $\hat{d}'(x_0) = 0$, niin
$\exists \delta > 0$ s.e. $d(x, x_0) < \delta \Rightarrow \hat{d}(x, x_0) = |\hat{d}(x, x_0) - \hat{d}(x_0, x_0)| < r$.

Siis
$$B(x_0, \delta) \subset \hat{B}(x_0, r),$$ mikä oli väite.

2) Os., että
$$\forall r > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ s.e. } \hat{B}(x_0, \delta) \subset B(x_0, r).$$

Olk. $r > 0$.

Antiteesi: tällaista lukua δ ei ole, eli $\forall \delta > 0 : \hat{B}(x_0, \delta) \not\subset B(x_0, r)$.

Erityisesti $\hat{B}(x_0, \frac{1}{n}) \not\subset B(x_0, r) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

eli $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists y_n \in \hat{B}(x_0, \frac{1}{n})$ s.e. $y_n \notin B(x_0, r)$

eli $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists y_n$ s.e. $\hat{d}(y_n, x_0) < \frac{1}{n}$ ja $d(y_n, x_0) \geq r$. $\quad (*)$

Val. jokaisella $n \in \mathbb{N}$ tällainen y_n.

Jos olisi $d(gy_n, gx_0) \geq \frac{1}{n} \ \forall g$, niin olisi
$$\hat{d}(y_n, x_0) = \int d(gy_n, gx_0)\, dg \geq \int \frac{1}{n}\, dg = \frac{1}{n},$$
ristiriita $(*)$:n kanssa. Siis
$$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists g_n \in G \text{ s.e. } d(g_n y_n, g_n x_0) < \frac{1}{n}. \quad (**)$$

Koska G on kompakti, voidaan olettaa, että jono (g_n) suppenee, $g_n \to \bar{g} \in G$ (tarkemmin: kompaktisuudesta seuraa, että jokin osajono suppenee; tarkastellaan tästä eteenpäin k.o. osajonoa). (Kun jatkossa tark. jonoja $\bar{X}$:ssä, käytetään metriikkaa d).
Koska $\Phi| : G \times \{x_0\} \to \bar{X}$, $(g, x_0) \mapsto gx_0$, on jatkuva, niin $g_n x_0 \to \bar{g} x_0$ ja edelleen (**):sta seuraa, että

$$g_n y_n \to \bar{g} x_0 .$$

Siis $(G \times \bar{X})$:ssä on

$$(g_n^{-1}, g_n y_n) \to (\bar{g}^{-1}, \bar{g} x_0),$$

ja koska toiminta $\Phi : G \times \bar{X} \to \bar{X}$ on jatkuva, on

$$\lim \underbrace{\Phi(g_n^{-1}, g_n y_n)}_{= y_n} = \Phi(\bar{g}^{-1}, \bar{g} x_0) = \bar{g}^{-1}(\bar{g} x_0) = x_0 ,$$

mistä seuraa, että

$$\lim y_n = x_0 ,$$

ristiriita, koska (*):n nojalla $d(y_n, x_0) \geq r \quad \forall n$.
Siis antiteesi on väärä, ja halutunlainen $\delta > 0$ on olemassa. $\square$

Haarin integraali on olemassa myös lokaalisti kompakteille ryhmille G, kts. esim. [Husain: Introduction to topological groups, Chapter VI], [Hewitt-Ross: Abstract Harmonic Analysis I, §15.].

Joitakin eroja:

- perustilanteessa voidaan integroida vain funktioita $f : G \to \mathbb{R}$, joilla on kompakti kantaja (funktion f kantaja on G:n osajoukko $\overline{\{g \in G \mid f(g) \neq 0\}}$).
- ominaisuutta (d): $I(1) = 1$ ei ole samassa muodossa, koska vakiofunktion 1 kantaja ei ole kompakti, jos G on epäkomp. Voidaan osoittaa yksikäsitteisyys vakiokerrointa vaille: jos I, J ovat Haarin integraaleja, niin $I = c \cdot J$ jollakin vakiolla $c \in \mathbb{R}$.
- kaikille ryhmille G ei ole olemassa integraalia, joka olisi invariantti sekä R_h- että L_h-operaation suhteen.

Käytännön esimerkkejä Haarin integraalista esim. joillekin matriisiryhmille, kts. [Husain, s. 120-123], [Hewitt-Ross, §15].