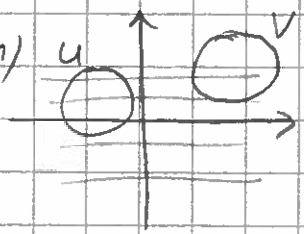
III Vahvat toiminnat (= proper actions)

Olemme nähneet, että kompaktien ryhmien toiminnoilla on topologisesti hyviä ominaisuuksia, esim. $Gx \approx G/G_x$, $Gx \Subset X$, rata-avaruus on Hausdorff. Lokaalisti kompaktien ryhmien n.s. vahvoilla toiminnoilla on vastaavia ominaisuuksia.

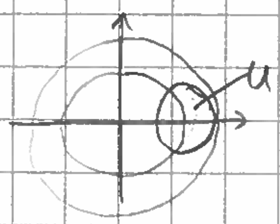
Esim 3.1. 1)



$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(t,(x,y)) \mapsto (x+t, y)$$

$\{ t \in \mathbb{R} \mid tU \cap V \neq \emptyset \}$ on rajoitettu

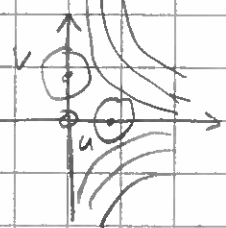
2)



$$\mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$(t, z) \mapsto e^{it} z$$

$\{ t \in \mathbb{R} \mid tU \cap U \neq \emptyset \}$ ei rajoitettu (G_x epäkomp.)

3)



$$\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$
$$(t, (x,y)) \longmapsto (e^t x, e^{-t} y)$$

$\{ t \in \mathbb{R} \mid tU \cap V \neq \emptyset \}$ ei rajoitettu, HT.
$\{ t \in \mathbb{R} \mid tU \cap U \neq \emptyset \}$ on rajoitettu, HT.

Olk. X G-avaruus, G top. ryhmä.
Jos $A, B \subset X$, merkitään
$$G(B \mid A) = \{ g \in G \mid gA \cap B \neq \emptyset \}.$$

Lemma 3.2. Olk. $A, B, C \subset X$. Tällöin

(i) $G(A \mid B) = G(B \mid A)^{-1}$

(ii) $G(B \cup C \mid A) = G(B \mid A) \cup G(C \mid A)$

(iii) $G(B \cap C \mid A) \subset G(B \mid A) \cap G(C \mid A)$.

---

4) Irrationaalinen virtaus torukselle (irrational flow on the torus):

$T^2 = S^1 \times S^1$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$$\mathbb{R} \times T^2 \to T^2$$
$$(t, (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})) = (e^{2\pi i (x+t)}, e^{2\pi i (y+\alpha t)})$$

- radat tiheitä
- $G_z = \{0\}$ $\forall z \in T^2$
- $\{ t \in \mathbb{R} \mid tU \cap U \neq \emptyset \}$ ei rajoitettu $\forall U \Subset T^2$.

Tod. (i) Olk. $g \in G$. Koska $g^{-1} : \bar{X} \to \bar{X}$, $x \mapsto g^{-1}x$, on bijektio (itse asiassa homeomorfismi), on $g^{-1}(A \cap gB) = g^{-1}A \cap g^{-1}gB = g^{-1}A \cap B$.

Siis $A \cap gB \neq \emptyset \iff g^{-1}A \cap B \neq \emptyset$.

Nyt

$$g \in G(A|B) \iff A \cap gB \neq \emptyset \iff B \cap g^{-1}A \neq \emptyset$$
$$\iff g^{-1} \in G(B|A) \iff g = (g^{-1})^{-1} \in G(B|A)^{-1}.$$

(ii)
$$g \in G(B \cup C | A) \iff (B \cup C) \cap gA \neq \emptyset$$
$$\iff (B \cap gA) \cup (C \cap gA) \neq \emptyset \iff B \cap gA \neq \emptyset \text{ tai } C \cap gA \neq \emptyset$$
$$\iff g \in G(B|A) \text{ tai } g \in G(C|A) \iff g \in G(B|A) \cup G(C|A).$$

(iii)
$$g \in G(B \cap C | A) \iff (B \cap C) \cap gA \neq \emptyset$$
$$\iff (B \cap gA) \cap (C \cap gA) \neq \emptyset$$
$$\implies B \cap gA \neq \emptyset \text{ ja } C \cap gA \neq \emptyset$$
$$\iff g \in G(B|A) \text{ ja } g \in G(C|A) \iff g \in G(B|A) \cap G(C|A).$$

$\square$

Korollaari 3.3. Olk. $A, B, C \subset \bar{X}$. Tällöin

(i) $G(A | B \cup C) = G(A|B) \cup G(A|C)$

(ii) $G(A | B \cap C) \subset G(A|B) \cap G(A|C)$

Tod. (i) Vastaavasti kuten Lemma 3.2. (ii) tai:

$$G(A | B \cup C) \overset{3.2(i)}{=} G(B \cup C | A)^{-1} \overset{3.2.(ii)}{=} (G(B|A) \cup G(C|A))^{-1}$$

$$= G(B|A)^{-1} \cup G(C|A)^{-1} = G(A|B) \cup G(A|C).$$

jos $L_1, L_2 \subset G$, on $(L_1 \cup L_2)^{-1} = \imath(L_1 \cup L_2) = \imath(L_1) \cup \imath(L_2)$
$= L_1^{-1} \cup L_2^{-1}$,

missä $\imath$ on homeomorfismi $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$.

(ii) Vastaavasti kuten Lemma 3.2. (iii) tai:

$$G(A | B \cap C) = G(B \cap C | A)^{-1} \subset (G(B|A) \cap G(C|A))^{-1}$$

$$= G(B|A)^{-1} \cap G(C|A)^{-1} = G(A|B) \cap G(A|C)$$

$(L_1 \cap L_2)^{-1} = \imath(L_1 \cap L_2) = \imath(L_1) \cap \imath(L_2) = L_1^{-1} \cap L_2^{-1}$.

Lemma 3.4.

(i) Jos $A' \subset A$ ja $B' \subset B$, niin
$$G(B'|A') \subset G(B|A).$$

(ii) Jos $g_0 \in G$, niin
$$G(g_0 B|A) = g_0 G(B|A)$$

(iii) Jos $g_0 \in G$, niin
$$G(B|g_0 A) = G(B|A) g_0^{-1}.$$

Tod. (i) $g \in G(B'|A') \Rightarrow gA' \cap B' \neq \emptyset \Rightarrow gA \cap B \neq \emptyset \Rightarrow g \in G(B|A)$.

(ii) $g \in G(g_0 B|A) \Leftrightarrow g_0 B \cap gA \neq \emptyset \Leftrightarrow B \cap g_0^{-1} g A \neq \emptyset$

$$\Leftrightarrow g_0^{-1} g \in G(B|A) \Leftrightarrow g \in g_0 G(B|A).$$

(iii) $g \in G(B|g_0 A) \Leftrightarrow B \cap g g_0 A \neq \emptyset \Leftrightarrow g g_0 \in G(B|A)$

$$\Leftrightarrow g \in G(B|A) g_0^{-1}.$$

$\square$

Esim. 3.5. Topologisen ryhmän G toiminta itsellään kertolaskulla
$$G \times G \to G$$
$$(g, g') \mapsto gg',$$

Olk. $A, B \subset G$. Tällöin
$$g \in G(B|A) \Leftrightarrow B \cap gA \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists\, a \in A, b \in B : b = ga$$
$$\Leftrightarrow \exists\, a \in A, b \in B : g = ba^{-1} \Leftrightarrow g \in BA^{-1}.$$

Siis tässä tilanteessa
$$G(B|A) = BA^{-1}.$$

$\square$

Jos X on G-avaruus ja $A \subset X$, merkitsemme
$$G_{[A]} = G(A|A) = \{ g \in G \mid gA \cap A \neq \emptyset \}.$$

Määr. 3.6. Olk. G lokaalisti kompakti ryhmä ja X Hausdorffin avaruus. Sanomme, että G:n (jatkuva) toiminta X:ssä on <u>vahva</u> (engl. <u>proper</u>), jos:

$$G_{[A]} \text{ on } G\text{:n kompakti osajoukko aina kun } A \text{ on } X\text{:n kompakti osajoukko.}$$

Huom. 3.7. Kirjallisuudessa esiintyy eri määritelmiä käsitteelle "proper", jotka eivät ole yhtäpitäviä keskenään. Tilanteissa, joissa esiintyy useita "proper"-käsitteitä, käytämme yllä olevasta nimitystä "Borel-proper".

Y.o. määritelmässä ei ole kyse siitä, etteikö $G_{[A]}$ olisi suljettu G:ssä. Alla olevan lemman nojalla $G_{[A]}$ on aina suljettu.

Esim. 3.8. Kts. Esimerkit 3.1.
(i) on vahva toiminta
(ii) ei ole
(iii) ei ole
(iv) ei ole

Lemma 3.10. Olk. G top. ryhmä, X G-avaruus, merk. toiminta $\Phi : G \times X \to X$. $A \subset X$ kompakti ja $B \Subset X$.
Tällöin $G(B|A) \Subset G$.

Tod. Osoitetaan, että $Q = G \setminus G(B|A) \Subset G$.
Olk. $h \in Q$. Tällöin $B \cap hA = \emptyset$, eli

$$hA \subset X \setminus B,$$

eli

$$\Phi(\{h\} \times A) \subset X \setminus B,$$

ja koska $X \setminus B \Subset X$, niin $\Phi^{-1}(X \setminus B)$ on joukon $\{h\} \times A$ ympäristö $G \times X$:ssä.
Lemman 3.9. nojalla $\exists$ h:n ymp. $W \Subset G$ ja A:n ymp. $U \Subset X$ s.e.

$$\{h\} \times A \subset W \times U \subset \Phi^{-1}(X \setminus B).$$

$\longrightarrow$

Lemma 3.9. (Väisälä, s. 121)
Olk. $A \subset X$ ja $B \subset Y$ kompakteja ja olkoon W joukon $A \times B$ ympäristö $X \times Y$:ssä. Tällöin on olemassa avoimet joukot $U \supset A$ ja $V \supset B$, joille $U \times V \subset W$.

Tod. HT!

Siis $\Phi(W\times U) \subset X \setminus B$ ja erityisesti
$$\Phi(W\times A) \subset X\setminus B.$$
Jos nyt $k\in W$, niin $kA \subset X\setminus B$, eli $B\cap kA = \emptyset$ eli
$$k\in Q = G\setminus G(B|A).$$
Siis alkiolle $h\in Q$ löytyi ympäristö $W\subset Q$

Siis $Q \Subset G$ ja $G(B|A) \Subset G$.

$\square$

<u>Lemma 3.11.</u> Olk. G top. ryhmä ja X Hausdorff G-avaruus. Jos $A\subset X$ on kompakti, niin $G_{[A]} \Subset G$.

<u>Tod.</u> A kompakti, X Hausdorff $\Rightarrow A \Subset X$.
Ed. lemman nojalla
$$G_{[A]} = G(A|A) \Subset G.$$
$\square$

<u>Korollaari 3.12.</u> Olk. G top. ryhmä ja X Hausdorff G-avaruus. Jos $A\Subset X$ ja $B\subset X$ on kompakti, niin $G(B|A)\Subset G$.

<u>Tod.</u>
$$\text{Lemma 3.10.} \Rightarrow G(A|B) \Subset G$$
$$\Rightarrow G(B|A) = \underset{\uparrow \text{homeomorfismi } g\mapsto g^{-1}}{\cong} G(A|B) \Subset G.$$
$\square$

<u>Määr. 3.13.</u> Olk. X, Y Hausdorffin avaruuksia. Sanomme, että kuvaus $f: X\to Y$ on vahva (proper), jos $f^{-1}(B)$ on kompakti jokaiselle Y:in kompaktille osajoukolle B.

<u>Lemma 3.14.</u> (i) Yhdistetty kuvaus vahvoista kuvauksista on vahva.
(ii) Olk. X, Y, Z Hausdorffin avaruuksia, $f: X\to Y$ ja $h: Y\to Z$ kuvauksia, joille $h\circ f: X\to Z$ on vahva. Tällöin
1) $f: X\to Y$ on vahva
2) jos f on surjektio, niin h on vahva.

<u>Tod.</u> HT.

$\square$

Lemma 3.15. Olk. $f: X \to Y$ vahva kuvaus, missä X, Y ovat Hausdorffin avaruuksia ja Y on lokaalisti kompakti. Tällöin f on suljettu kuvaus.

Tod. HT.

$\square$

Lause 3.16. Olk. G lokaalisti kompakti top. ryhmä ja X Hausdorff G-avaruus. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(i) $\Phi: G \times X \to X$ on vahva toiminta

(ii) $\Phi^*: G \times X \to X \times X$, $(g,x) \mapsto (gx, x)$, on vahva kuvaus

(iii) $\Phi|: G \times A \to X$ on vahva kuvaus, $\forall$ kompakteilla $A \subset X$.

Tod. Olk. $A \subset X$. Os. ensin, että

$$(1) \qquad G_{[A]} = p\left(\Phi^{*-1}(A \times A)\right),$$

missä $p: G \times X \to G$ on projektio:

"$\subset$" olk. $g \in G_{[A]}$, jolloin siis $gA \cap A \neq \emptyset$ ja $\exists\, a \in A$ s.e. $ga = a_1 \in A$.

Nyt

$$\Phi^*(g,a) = (ga, a) = (a_1, a) \in A \times A,$$

joten

$$(g,a) \in \Phi^{*-1}(A \times A)$$

ja

$$g \in p\,\Phi^{*-1}(A \times A).$$

"$\supset$" olk. $g \in p\,\Phi^{*-1}(A \times A)$, jolloin siis $\exists\, x \in X$ s.e. $(g,x) \in \Phi^{*-1}(A \times A)$.

Tällöin $\Phi^*(g,x) = (gx, x) \in A \times A$.

Siis $x \in A$ ja $gx \in A$, joten $gA \cap A \neq \emptyset$ ja $g \in G_{[A]}$.

$\square$ (1)

(i) ⇒ (ii): olk. $C \subset \bar{X} \times \bar{X}$ kompakti. Tällöin $p_1(C) \subset \bar{X}$ ja $p_2(C) \subset \bar{X}$ ovat kompakteja (p_1, p_2 projektiot), ja $A = p_1(C) \cup p_2(C) \subset \bar{X}$ on kompakti.
Koska nyt $C \subset A \times A$ ja $\Phi^{*-1}(C) \subset \Phi^{*-1}(A \times A) \subset G \times \bar{X}$, riittää osoittaa, että $\Phi^{*-1}(A \times A)$ on kompakti.
Kuvauksen Φ^* määritelmästä seuraa, että

$$\Phi^{*-1}(A \times A) \subset G \times A.$$

(1):n nojalla $p(\Phi^{*-1}(A \times A)) = G_{[A]}$, joten

$$\Phi^{*-1}(A \times A) \subset G_{[A]} \times A.$$

Koska nyt $G_{[A]}$ ja A ovat kompakteja ja $\Phi^{*-1}(A \times A)$ on suljettu, väite seuraa tästä.

(ii) ⇒ (i): ol. A kompakti.

$$(1) \Rightarrow G_{[A]} = p\Big(\underbrace{\Phi^{*-1}(\underbrace{A \times A}_{\text{komp.}})}_{\text{(ii)} \Rightarrow \text{komp.}}\Big) \text{ on kompakti}$$

□ (i) ⇔ (ii)

Os. seuraavaksi, että jos $A, B \subset \bar{X}$, niin

$$(2) \qquad (\Phi|_{G \times A})^{-1}(B) = \Phi^{*-1}(B \times A):$$

"$\subset$" olk. $(g,x) \in (\Phi|_{G\times A})^{-1}(B)$.
Tällöin $(g,x) \in G \times A$ ja $\Phi(g,x) = gx \in B$.
Siis $\Phi^*(g,x) = (gx, x) \in B \times A$, eli $(g,x) \in \Phi^{*-1}(B \times A)$.

"$\supset$" olk. $(g,x) \in \Phi^{*-1}(B \times A)$.
Tällöin $\Phi^*(g,x) = (gx, x) \in B \times A$, joten $gx \in B$ ja $x \in A$.
Koska nyt $(g,x) \in G \times A$ ja $\Phi(g,x) = gx \in B$, niin $(g,x) \in (\Phi|_{G\times A})^{-1}(B)$.

□ (2)

(ii) $\Rightarrow$ (iii): olk. $A \subset \bar{X}$ kompakti, $B \subset \bar{X}$ kompakti.
Tällöin
$$\underbrace{(\Phi|_{G\times A})^{-1}(B) \overset{(2)}{=} \Phi^{*-1}(\underbrace{B\times A}_{\text{komp.}})}_{(ii) \Rightarrow \text{komp.}} \text{ on kompakti.}$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii): olk. $C \subset \bar{X}\times\bar{X}$ kompakti. Tällöin $C \subset A\times A \subset \bar{X}\times\bar{X}$, missä A on kompakti (vrt. todistus (i) $\Rightarrow$ (iii)).
Nyt
$$\Phi^{*-1}(C) \subset \Phi^{*-1}(A\times A) \overset{(2)}{=} \underbrace{(\Phi|_{G\times A})^{-1}(A)}_{(iii)\Rightarrow\text{komp.}},$$
joten $\Phi^{*-1}(C)$ on kompakti, koska se on suljettu.

$\square$ 3.16.

Korollaari 3.17. Olk. $\bar{X}$ vahva G-avaruus, $\overset{(G \text{ lok. komp.})}{}$ $\bar{X}$ lok. kompakti Hausdorff.
Olk. $F \Subset G$ ja $A \subset \bar{X}$ kompakti.
Tällöin $FA = \{gx \mid g \in F, x \in A\} \Subset \bar{X}$.
Erityisesti $GA \Subset \bar{X}$.

Tod. Lauseen 3.16. nojalla $\Phi|_{G\times A}$ on vahva kuvaus.
Koska $\bar{X}$ on lok. kompakti Hausdorff, on $\Phi|_{G\times A}$ suljettu kuvaus.
Koska $F\times A \Subset G\times A$, on $(\Phi|)(F\times A) = \Phi(F\times A) = FA \Subset \bar{X}$.

$\square$

Lause 3.18. Olk. $\bar{X}$ lok. kompakti Hausdorff vahva G-avaruus, ja $x \in \bar{X}$.
Tällöin:
a) G_x on G:n kompakti aliryhmä
b) rata Gx on suljettu $\bar{X}$:ssä
c) $\varphi_x : G/G_x \to Gx$, $gG_x \mapsto gx$, on homeomorfismi.

Tod. a) Nyt

$$G_x = \{ g \in G \mid gx = x \} = \{ g \in G \mid g\{x\} \cap \{x\} \neq \emptyset \} = G_{[\{x\}]}.$$

Koska $\{x\}$ on kompakti ja toiminta on vahva, on $G_{[\{x\}]}$ kompakti. Siis myös G_x on kompakti.

b) val. korollaarissa 3.17. $F = G$, $A = \{x\}$
$\Rightarrow \quad FA = Gx \in \overline{X}$.

c) vrt. Lause 2.31, jossa tämä todistettiin kompaktille ryhmälle G.
Kuten 2.31:ssä nähdään, että φ_x on jatkuva bijektio.
Tällöin käänteiskuvauksen jatkuvuus seuraisi suoraan G:n kompaktisuuden avulla.
Os. nyt, että φ_x on suljettu kuvaus:
Tark. kommutoivaa kaaviota

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\Phi_x"] & \\ G/G_x \arrow[r, "\varphi_x"'] & \overline{X} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} g \arrow[d, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & \\ gG_x \arrow[r, mapsto] & gx \end{tikzcd}$$

Nyt Φ_x on suljettu kuvaus:
Jos $F \in G$, niin $\Phi_x(F) = Fx \in \overline{X}$ 3.17:n nojalla.
Jos $B \in G/G_x$, niin

$$\varphi_x(B) = \Phi_x(\underbrace{\pi^{-1}(B)}_{\in G}) \in \overline{X}.$$

Siis $\varphi_x : G/G_x \to \overline{X}$ on suljettu kuvaus, joten myös $\varphi_x : G/G_x \to Gx$ on suljettu kuvaus.

Tästä seuraa, että $\varphi_x^{-1} : Gx \to G/G_x$ on jatkuva.

$\square$

Esim. Irrationaalinen virtaus toruksella: φ_x^{-1} ei jatkuva.

Lause 3.19. Olk. X lokaalisti kompakti (Hausdorff) vahva G-avaruus. Tällöin rata-avaruus X/G on Hausdorff ja lok. kompakti.

Tod. Olk. $\bar{x}, \bar{y} \in X/G$, $\bar{x} \neq \bar{y}$ ja $x, y \in X$ s.e. $p(x) = \bar{x}$, $p(y) = \bar{y}$. Tällöin $Gx \cap Gy = \emptyset$ ja Gx, Gy ovat suljettuja X:ssä Lauseen 3.18. b) nojalla. Olk. A x:n ympäristö, jolle $\bar{A}$ on kompakti ja $\bar{A} \cap Gy = \emptyset$ (lok. kompakti Hausdorff-avaruus on säännöllinen). Koska projektio $p : X \to X/G$ on avoin kuvaus, on $p(A)$ $\bar{x}$:n ympäristö X/G:ssä.

Os. että $p(\bar{A}) \subset X/G$:

$p^{-1} p(\bar{A}) = G\bar{A}$ ja $G\bar{A} \subset X$ Korollaarin 3.17. nojalla. Tekijätopologia $\Rightarrow$ $p(\bar{A}) \subset X/G$.

Nyt

$$\bar{y} \in X/G \setminus p(\bar{A}) = W$$

ja W on $\bar{y}$:n ympäristö X/G:ssä, koska

$$p(A) \cap (X/G \setminus p(\bar{A})) = \emptyset,$$

nämä ovat $\bar{x}$:n ja $\bar{y}$:n erilliset ympäristöt X/G:ssä.

Lokaalisti kompaktin avaruuden kuva jatkuvassa avoimessa kuvauksessa on lok. kompakti. $\square$

Erilaisia "proper"-käsitteen määritelmiä

[Abels, Strantzalos: Proper transformation groups, manuscript]

G lokaalisti kompakti, $\overline{X}$ Hausdorff G-avaruus

Määr. 3.20. G:n toiminta on Cartan-toiminta, jos
$\forall x \in \overline{X}$ $\exists$ ymp. U s.e.
$\overline{G(U|U)}$ on kompakti.

Määr. 3.21. Toiminta on vahva', jos
$\forall x, y \in \overline{X}$ $\exists$ ympäristöt U ja V $(x \in U, y \in V)$ s.e.
$\overline{G(U|V)}$ on kompakti.

Määr. 3.22. Toiminta on Palais-toiminta (Palais proper), jos
$\forall x \in \overline{X}$ $\exists$ ymp. U s.e. $\forall y \in \overline{X}$ $\exists$ ymp. V s.e.
$\overline{G(U|V)}$ on kompakti.

Huom 3.23. selvästi Palais-toiminta
$\Downarrow$
vahva'
$\Downarrow$
Cartan-toiminta

Voidaan osoittaa mm.
1) Cartan-toiminta on vahva' $\Leftrightarrow$ $\overline{X}/G$ on Hausdorff.
2) $\overline{X}$ lok. kompakti: vahva' $\Leftrightarrow$ Palais
3) $\overline{X}$ säännöllinen:
Cartan-toiminta on Palais $\Leftrightarrow$ $\overline{X}/G$ on säännöllinen.

Huom 3.24. Jos topologisen ryhmän G toiminta toteuttaa Cartan-ehdon, on G välttämättä lokaalisti kompakti:
Jos $U \subset\subset \overline{X}$, on $G(U|U) \in G$ (HT),
joten $G(U|U)$ on e:n ympäristö, jonka sulkeuma on kompakti
$\Rightarrow G$ lok. kompakti.
Siis em. määritelmät eivät ole järkeviä käyttää, jos G ei ole lok. kompakti.

Yleisessä tapauksessa (G Hausdorff topologinen ryhmä, $\overline{X}$ Hausdorff) Abels & Strantzalos käyttää Lauseen 3.16 ehtoa (ii):

(*) kuvaus $G \times \overline{X} \to \overline{X} \times \overline{X}$, $(g, x) \mapsto (gx, x)$, on vahva

&

vahvan kuvauksen määritelmää:

$f : \overline{X} \to Y$ vahva $\Leftrightarrow$ f suljettu ja $f^{-1}(y)$ kompakti $\forall y \in Y$.

Void. myös määritellä:

(**) toiminta on Cartan, jos jokaisella pisteellä $x \in \overline{X}$ on G-invariantti ympäristö, johon rajoitettuna toiminta on vahva yllä esitetyssä mielessä.

Void. os.: lokaalisti kompaktin ryhmän G tapauksessa nämä määritelmät (*) ja (**) ovat yhtäpitäviä määritelmien 3.20 ja 3.21 kanssa.

Lause 3.25. Olk. G lok. komp., $\overline{X}$ lok. komp. Hausdorff G-avaruus. Tällöin G:n toiminta on vahva $\Leftrightarrow$ se on vahva'.

Tod. "$\Rightarrow$" olk. $x, y \in \overline{X}$

val. niille ympäristöt U, V s.e. $\overline{U}$ ja $\overline{V}$ kompakteja.

Nyt

$$G(U|V) \subset G(\overline{U}|\overline{V}) \subset G(\overline{U} \cup \overline{V} \,|\, \overline{U} \cup \overline{V})$$

Valitaan vahvan toiminnan määritelmässä

$$A = \overline{U} \cup \overline{V},$$ joka on kompakti.

Siis $G(\overline{U} \cup \overline{V} \,|\, \overline{U} \cup \overline{V})$ on kompakti

ja myös $\overline{G(U|V)}$ on kompakti.

"$\Leftarrow$" olk. $A \subset \overline{X}$ kompakti.

Valitaan $\forall\, x, y \in A$ ympäristöt U_x ja V_y s.e. $\overline{G(U_x | V_y)}$ on kompakti. Koska A on kompakti, void. val. pisteet $x_1, \dots, x_n$ ja $y_1, \dots, y_m$ s.e.

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \quad \text{ja} \quad A \subset \bigcup_{j=1}^{m} V_{y_j}.$$

Käyttämällä lemmojen 3.2 ja 3.3 kaavoja (ja induktiota) saadaan

$$G_{[A]} = G(A|A) \overset{3.4.(i)}{\subset} G\Big(\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \Big| \bigcup_{j=1}^{m} V_{y_j}\Big)$$
$$\overset{3.2.(ii)}{=} \bigcup_{i=1}^{n} G\Big(U_{x_i} \Big| \bigcup_{j=1}^{m} V_{y_j}\Big)$$
$$\overset{3.3.(i)}{=} \bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m} G(U_{x_i}|V_{y_j}) \subset \underbrace{\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m} \underbrace{\overline{G(U_{x_i}|V_{y_j})}}_{\text{komp.}}}_{\text{komp.}}$$

Koska $G_{[A]} \Subset G$ Lemman 3.11. nojalla, väite seuraa tästä.

$\square$

Huom. todistuksessa "$\Leftarrow$" ei tarvittu oletusta X lok. kompakti.

<u>Lause 3.26.</u> Olk. G lok. komp., X lok. komp. Hausdorff. Tällöin G:n toiminta on vahva $\Leftrightarrow$ se on Palais-toiminta.

<u>Tod.</u> "$\Leftarrow$" Palais $\Rightarrow$ vahva' $\overset{3.25.}{\Rightarrow}$ vahva

"$\Rightarrow$" olk. $x \in X$. Val. x:n ympäristö U s.e. $\overline{U}$ on kompakti.
olk. $y \in X$. Val. y:n ymp. V s.e. $\overline{V}$ on kompakti.

Nyt $G(U|V) \subset G(\overline{U}|\overline{V}) \subset \underbrace{G(\underbrace{\overline{U}\cup\overline{V}}_{\text{komp.}}|\overline{U}\cup\overline{V})}$.

komp., koska toiminta vahva. Lisäksi suljettu.

Siis $\overline{G(U|V)} \subset G(\overline{U}\cup\overline{V}|\overline{U}\cup\overline{V})$
ja $\overline{G(U|V)}$ on kompakti.

$\square$