Hilbertin 5. ongelma [Montgomery, Zippin: Topological transformation groups., s. 67]

(kalvo)

II Topologiset transformaatioryhmät

Määr. 2.1. G = top. ryhmä
X = top. avaruus

G:n toiminta X:ssä on jatkuva kuvaus
$$\varphi : G \times X \to X,$$
(merkitään $\varphi(g,x) = gx$) s.e.

1) $ex = x \quad \forall x \in X$

2) $g_1(g_2 x) = (g_1 g_2)x \quad \forall x \in X,\ g_1, g_2 \in G.$

(G, X, φ) on topologinen transformaatioryhmä. Sanomme: X on G-avaruus.

Esim. 2.2. 1) G top. ryhmä
$$\varphi : G \times G \to G$$
$$(g, g') \mapsto gg' \qquad \text{(jatkuvuus ok.)}$$
Selvästi $eg' = g' \quad \forall g' \in G$ (seuraa neutr. alkion ominaisuudesta)

$g_1(g_2 g') = (g_1 g_2)g' \quad \forall g_1, g_2, g' \in G$ (seuraa tulon liitännäisyydestä)

2) konjugointi:
$$\varphi : G \times G \to G$$
$$(g, \bar{g}) \mapsto g\bar{g}g^{-1} \qquad \text{(jatkuvuus ok.)}$$
(i) $\varphi(e, \bar{g}) = e\bar{g}e^{-1} = \bar{g}$

(ii) $\varphi(g_1, \varphi(g_2, \bar{g})) = \varphi(g_1, g_2\bar{g}g_2^{-1})$

$= g_1(g_2\bar{g}g_2^{-1})g_1^{-1} = (g_1g_2)\bar{g}(g_1g_2)^{-1}$

$= \varphi(g_1g_2, \bar{g}).$

3) G top. ryhmä, H sulj. aliryhmä

$$\varphi : G \times G/_H \to G/_H$$
$$(g, \bar{g}H) \mapsto (g\bar{g})H$$

HT.

(vrt. s. 1)

Kuten aiemmin, jos $\varphi : G \times \bar{X} \to \bar{X}$ on jatk. toiminta ja $g \in G$, määr.

$$\varphi_g : \bar{X} \to \bar{X}$$
$$x \mapsto gx,$$

joka on jatkuva $\left(\begin{array}{ccccc} \bar{X} & \longrightarrow & G \times \bar{X} & \to & \bar{X} \\ x & \longmapsto & (g, x) & \mapsto & gx \end{array} \right)$

ja $(\varphi_g)^{-1} = \varphi_{g^{-1}}$ on jatkuva.

Siis φ_g on homeomorfismi $\bar{X} \to \bar{X}$.

Lisäksi $\bar{\varphi} : G \to (\text{Homeo}(\bar{X}), \circ)$
$\qquad g \mapsto \varphi_g$

on ryhmien homomorfismi: $\varphi_{g_1 g_2} = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}$.

Olk. $\bar{X}$ G-avaruus, $x \in \bar{X}$.

Osajoukkoa
$$\{ gx \mid g \in G \} \subset \bar{X}$$
sanotaan pisteen x <u>radaksi</u>; merk. Gx.

Merk. $G_x = \{ g \in G \mid gx = x \}$

<u>Lemma 2.3</u> G_x on G:n aliryhmä, G:n <u>isotropia-aliryhmä pisteessä x</u>.

<u>Tod.</u> Selvästi $e \in G_x$.

Jos $g_1, g_2 \in G_x$, niin $g_1 g_2 \in G_x$:
$$(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x) = g_1 x = x.$$
Jos $g \in G_x$, niin $g^{-1} \in G_x$:
$$g^{-1}x = g^{-1}(gx) = (g^{-1}g)x = ex = x. \quad \square$$

Lemma 2.4. Olk. $\bar{X}$ G-avaruus ja ol. että $\bar{X}$ on T_1. Tällöin G_x on suljettu G:ssä.

Tod. Tark. kuvausta
$$\hat{\varphi} : G \to \bar{X}$$
$$g \mapsto gx.$$

Nyt
$$G_x = \hat{\varphi}^{-1}(\underbrace{\{x\}}_{\substack{\Subset \bar{X} \\ T_1\text{-ehdon nojalla}}}) \Subset G.$$

$\square$

Jos $\varphi : G \times \bar{X} \to \bar{X}$ on toiminta, määr.
$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{ g \in G \mid gx = x \ \forall x \in \bar{X} \},$$
toiminnan ydin.

Selvästi $\mathrm{Ker}(\varphi) = \bigcap_{x \in \bar{X}} G_x$.

Kor. 2.5. Jos $\bar{X}$ on T_1 G-avaruus, niin $\mathrm{Ker}(\varphi)$ on G:n sulj. aliryhmä.

Tod. $2.4. \Rightarrow G_x \Subset G \ \forall x \Rightarrow \mathrm{Ker}(\varphi) = \bigcap_{x \in \bar{X}} G_x \Subset G$. $\square$

Lause 2.6. $\mathrm{Ker}(\varphi)$ on G:n normaali aliryhmä.

Tod. olk. $h \in G$

väite: $h(\mathrm{Ker}(\varphi))h^{-1} \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$:

jos $g \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, niin
$$(hgh^{-1})(x) = h(g(h^{-1}x)) \overset{g \in \mathrm{Ker}(\varphi)}{=} h(h^{-1}x) = ex = x \quad \forall x.$$
Siis $hgh^{-1} \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.

$\square$

Määr. 2.7. Sanomme, että toiminta on tehokas (= effective), jos $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{e\}$, eli
$$(gx = x \ \forall x \in \bar{X} \Rightarrow g = e).$$

[redacted] $\rightarrow$

Teoreema 2.8. Olk. X G-avaruus ; $\varphi : G \times X \to X$;
X T_1

Tällöin $G/\ker\varphi$ on topologinen ryhmä ja $G/\ker\varphi$ toimii X:ssä kaavalla

$$G/\ker\varphi \times X \to X$$
$$(g\ker\varphi, x) \mapsto gx .$$

Lisäksi tämä toiminta on tehokas.

Tod. HT

$\square$

Olk. X G-avaruus. Määr. relaatio $\sim$ X:ssä :

$$x_1 \sim x_2 \iff \exists\ g \in G \text{ s.e. } gx_1 = x_2 .$$

$\sim$ on ekvivalenssirelaatio :

1) $x \sim x$, koska $ex = x$

2) $x_1 \sim x_2 \Rightarrow \exists\ g \in G$ s.e. $gx_1 = x_2$

$\Rightarrow g^{-1}(gx_1) = g^{-1}x_2 \Rightarrow g^{-1}x_2 = x_1 \Rightarrow x_2 \sim x_1$

3) ol. $x_1 \sim x_2$ ja $x_2 \sim x_3$

$\Rightarrow \exists\ g_1, g_2$ s.e. $g_1x_1 = x_2$ ja $g_2x_2 = x_3$

$\Rightarrow (g_2 g_1)(x_1) = g_2(g_1 x_1) = g_2 x_2 = x_3 \Rightarrow x_1 \sim x_3 .$

Siis $\sim$ on ekviv. relaatio ja pisteen $x \in X$ ekviv. luokka

$$[x] = \{ y \in X \mid y \sim x \} = \{ gx \mid g \in G \} = Gx .$$

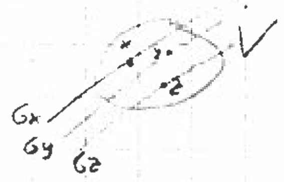
Merk.

$$X/G = \{ Gx \mid x \in X \} , \text{ ratojen joukko}$$

Merk. $\pi : X \to X/G$ projektio,
$x \mapsto Gx$

annetaan joukolle X/G tekijätopologia π:n avulla.
Avaruutta X/G sanotaan k.o. toiminnan rata-avaruudeksi.

Lemma 2.9. $\pi : X \to X/G$ on avoin kuvaus.



Tod. Olk. $V \Subset X$.
Nyt
$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{x \in V} Gx$$
$$= \{gx \mid g \in G, x \in V\} = \bigcup_{g \in G} gV.$$

Nyt $gV = \varphi_g(V) \Subset X$, koska $V \Subset X$ ja φ_g on homeomorfismi.
$$\Rightarrow \pi^{-1}(\pi(V)) \Subset X \overset{\text{tekijätop.}}{\Rightarrow} \pi(V) \Subset X/G.$$
$\square$

Teoreema 2.10. Olk. G kompakti top. ryhmä, $\varphi : G \times X \to X$ toiminta Hausdorffin avaruudessa X. Tällöin φ on suljettu kuvaus.

Tod. Ol. että G ja X ovat N_1-avaruuksia (jolloin myös $G \times X$ on N_1-avaruus), jolloin voimme käyttää jonoja:
$$x \in \bar{A} \iff \exists \text{ jono } A\text{:n pisteitä, jotka} \xrightarrow{n\to\infty} x.$$

Olk. $B \Subset G \times X$. Väite: $\varphi(B) \Subset X$.
Olk. $y \in \overline{\varphi(B)}$ (väite: $y \in \varphi(B)$).

X N_1 $\Rightarrow \exists$ jono $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y_n \in \varphi(B)$ s.e. $y_n \xrightarrow{n\to\infty} y$.

Olk. $(g_n, x_n) \in B$ s.e. $\varphi(g_n, x_n) = g_n x_n = y_n$, $n \in \mathbb{N}$.
Koska G on kompakti, on jonolla (g_n) suppeneva osajono,
$$\lim_{n\to\infty} g_{n_i} = g.$$

Nyt myös $y_{n_i} \to y$.
Koska
$$x_n = g_n^{-1}(g_n x_n) = g_n^{-1} y_n,$$
niin
$$\lim_{i\to\infty} x_{n_i} = \lim g_{n_i}^{-1} y_{n_i} = \lim \varphi(g_{n_i}^{-1}, y_{n_i})$$
$$= \varphi(\lim g_{n_i}^{-1}, \lim y_{n_i}) = \varphi(g^{-1}, y) = g^{-1}y.$$

Siis
$$\lim (g_{n_i}, x_{n_i}) = (g, g^{-1}y).$$
Koska
$$(g_{n_i}, x_{n_i}) \in B \ \forall i \quad \text{ja } B \Subset G \times \bar{X}, \text{ niin } (g, g^{-1}y) \in B.$$
Siis
$$y = g(g^{-1}y) = \varphi(g, g^{-1}y) \in \varphi(B).$$
$\square$

Huom. 2.11. Jos $\bar{X}$ ja G eivät ole N_1, edellinen todistus ei toimi, esim. $y \in \overline{\varphi(B)} \not\Rightarrow \exists$ jono (y_n) $\varphi(B)$:ssä s.e. $y_n \to y$.

Todistus voidaan tehdä täsmälleen samoin kuin yllä (ilman N_1-oletusta), jos käytetään jonojen sijasta n.s. verkkoja (net), kts. esim. Bredon: Introduction to Compact Transformation Groups, Th. 1.2., s. 34.

Verkko on jonon yleistys:
jono $\bar{X}$:ssä on funktio $\mathbb{N} \to \bar{X}$,
verkossa $\mathbb{N}$ korvataan jollakin suunnatulla joukolle (directed set). Kts. esim. Väisälä: Top. II, s. 29.

Kor. 2.12. Olk. G kompakti top.r., $\bar{X}$ Hausdorff G-avaruus, $A \Subset \bar{X}$.
Tällöin $GA = \{ga \mid g \in G, a \in A\} \Subset \bar{X}$.
Lisäksi jos A on kompakti, niin GA on kompakti.

Tod. $A \Subset \bar{X} \Rightarrow G \times A \Subset G \times \bar{X}$
Nyt
$$GA = \varphi(G \times A) \Subset \bar{X}, \text{ koska } \varphi \text{ on sulj. kuvaus (2.10.)}.$$

Jos A kompakti, niin $G \times A$ on kompakti ja
$GA = \varphi(G \times A)$ on kompakti.

$\square$

Teoreema 2.13. G komp. top. r.
$\bar{X}$ Hausdorff G-avaruus

Tällöin

1) Rata-avaruus $\bar{X}/G$ on Hausdorff
2) Projektio $\pi : \bar{X} \to \bar{X}/G$ on suljettu kuvaus
3) Kuvaus π on vahva (proper), eli ($B \subset \bar{X}/G$ komp. $\Rightarrow \pi^{-1}(B)$ komp.
4) $\bar{X}$ on kompakti $\Leftrightarrow$ $\bar{X}/G$ on kompakti
5) $\bar{X}$ on lok. kompakti $\Leftrightarrow$ $\bar{X}/G$ on lok. kompakti

Tod. 2) : olk. $A \in \bar{X}$.
Nyt $\pi^{-1}\pi A = GA$, joka on suljettu $\bar{X}$:ssä (Kor. 2.12)
Siis $\pi(A) \in \bar{X}/G$ (tekijätopologia).

Huom. Tekijätopologian määritelmä $U \in \bar{X}/G \Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \in \bar{X}$
on yhtäpitävästi $A \in \bar{X}/G \Leftrightarrow \pi^{-1}(A) \in \bar{X}$.

1) : olk. $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{X}/G$, $\bar{x} \neq \bar{y}$.
olk. $x, y \in \bar{X}$ s.e. $\pi(x) = \bar{x}$, $\pi(y) = \bar{y}$.
Nyt $\pi^{-1}(\bar{x}) = Gx$ ja $\pi^{-1}(\bar{y}) = Gy$.
Radat Gx ja Gy ovat kompakteja (Kor. 2.12.) ja erillisiä,
joten niillä on erilliset ympäristöt
(kuva!) $Gx \subset U$, $Gy \subset V$ (Topologia II).
Erityisesti $\bar{U} \cap Gy = \emptyset$.
Nyt $\bar{y} = \pi(y) \notin \pi(\bar{U})$. Lisäksi $\pi(\bar{U}) \in \bar{X}/G$ 2):n nojalla.
Siis $\bar{X}/G \setminus \pi(\bar{U})$ on $\bar{y}$:n ympäristö $\bar{X}/G$:ssä.
Koska $\pi : \bar{X} \to \bar{X}/G$ on avoin kuvaus, on $\pi(U)$ alkion
$\bar{x} = \pi(x)$ ymp. $\bar{X}/G$:ssä.
Koska $\pi(U) \cap (\bar{X}/G \setminus \pi(\bar{U})) = \emptyset$, tämä todistaa 1):n.

3) : olk. $C \subset \bar{X}/G$ kompakti ja olk. $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ joukon
$\pi^{-1}C$ avoin peite $\bar{X}$:ssä.
Jokaisella $y \in C$ on $\pi^{-1}(y)$ kompakti (rata),
joten $\exists$ äärellinen $A_y \subset A$ s.e.

$$\pi^{-1}(y) \subset \bigcup_{\alpha \in A_y} U_\alpha \overset{\text{merk.}}{=} U_y .$$

Merkitään $V_y = \bar{X}/G \setminus \pi(\bar{X} \setminus U_y)$.

Koska $\bar{X} \setminus U_y \Subset \bar{X}$, niin å) $\Rightarrow \pi(\bar{X} \setminus U_y) \Subset \bar{X}/G \Rightarrow V_y \Subset \bar{X}/G$.

Nyt $\pi^{-1}(V_y) \subset U_y$:

$x \in \pi^{-1}(V_y) \Rightarrow \pi(x) \in V_y \Rightarrow \pi(x) \notin \pi(\bar{X} \setminus U_y)$

$\Rightarrow x \notin \bar{X} \setminus U_y \Rightarrow x \in U_y$.

Lisäksi $y \in V_y$:

Koska $\pi^{-1}(y) \subset U_y$, niin $y \notin \pi(\bar{X} \setminus U_y)$,

eli $y \in \bar{X}/G \setminus \pi(\bar{X} \setminus U_y) = V_y$.

Joukot V_y, $y \in C$, muodostavat C:n avoimen peitteen. Koska C on kompakti, $\exists\ y_1, \ldots, y_n$ s.e.

$$C \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}.$$

Siis $\pi^{-1}(C) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \pi^{-1}(V_{y_i}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{\alpha \in A_{y_i}} U_\alpha$,

eli peitteen $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ äärellinen osapeite peittää $\pi^{-1}(C)$:n. $\square$ 3)

4): $\bar{X}$ komp. $\Rightarrow \bar{X}/G = \pi(\bar{X})$ on kompakti.

$\bar{X}/G$ komp. $\overset{3)}{\Rightarrow} \bar{X} = \pi^{-1}(\bar{X}/G)$ on kompakti

5): $\bar{X}$ lok.komp., π jatkuva avoin surjektio $\Rightarrow \bar{X}/G$ lok.komp.

Ol. $\bar{X}/G$ lok.komp., $x \in \bar{X}$,

olk. V $\pi(x)$:n ympäristö $\bar{X}/G$:ssä s.e. $\bar{V}$ on kompakti.

Nyt $\pi^{-1}(V)$ on x:n ymp. $\bar{X}$:ssä ja $\overline{\pi^{-1}(V)}$ on kompakti,

koska $\pi^{-1}(V) \subset \underbrace{\pi^{-1}(\bar{V})}_{\text{kompakti 3):n nojalla}}$, jolloin myös $\overline{\pi^{-1}(V)} \subset \pi^{-1}(\bar{V})$,

eli $\overline{\pi^{-1}(V)}$ on kompaktin joukon sulj. osajoukkona kompakti.

$\square$ Th. 2.13.

Kiintopistejoukot

Olk. X G-avaruus, $H \leq G$.

Määr. 2.14. Aliryhmän H kiintopistejoukko

$$X^H = \{ x \in X \mid hx = x \ \forall h \in H \}.$$

(Tätä merkintää käytetään joskus myös yhteydessä, jossa kyseessä ei ole aliryhmä, siis: $J \subset G$
$$X^J = \{ x \in X \mid gx = x \ \forall g \in J \} \quad).$$

Esim. 2.15. 1) Jos $H = \{e\}$, on $X^H = X$.

2) Voi olla $X^H = \emptyset$ $\forall H \neq \{e\}$, esim. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(t, (x,y)) \mapsto (x+t, y$

3) Jos $H \subset K \subset G$, niin $X^K \subset X^H$.

Lemma 2.16. Olk. X G-avaruus, X Hausdorff, $J \subset G$.
Tällöin $X^J \Subset X$.

Tod. Jos $g \in G$, merk. $X^g = \{ x \in X \mid gx = x \}$, jolloin
$$X^J = \bigcap_{g \in J} X^g.$$

Riittää siis os., että $\forall g \in G$: $X^g \Subset X$.

Olk. $g \in G$.

Määr. $d_g : X \to X \times X$
$x \mapsto (x, gx)$,

jolloin $X^g = d_g^{-1}(\Delta)$, missä $\Delta = \{ (x,x) \in X \times X \mid x \in X \}$.

$$\Big(x \in X^g \Leftrightarrow d_g(x) = (x, gx) = (x,x) \in \Delta \Leftrightarrow x \in d_g^{-1}(\Delta) \Big)$$

Nyt X Hausdorff $\Rightarrow \Delta \Subset X \times X$ (HT)

d_g jatk. $\Rightarrow X^g \Subset X$.

$\square$

Suljetun ali-ryhmän $H \leq G$ normalisaattori

$$N(H) = \{ g \in G \mid gHg^{-1} = H \}.$$

Normalisaattori $N(H) \in G$ suljettu aliryhmä (HT).

Nyt H on $N(H)$:in suljettu normaali aliryhmä, joten

$$WH := N(H)/H$$

on topologinen ryhmä (Teor. 1,16.).

Lause 2.17. Olk. X G-avaruus, $H \leq G$ sulj. aliryhmä. Tällöin

$$\Psi : W(H) \times X^H \longrightarrow X^H$$
$$(nH, x) \longmapsto nx$$

on ryhmän $W(H)$ toiminta X^H:ssa.

Tod. Os. ensin että rajoittamalla toimintaa $\Phi : G \times X \to X$ saadaan toiminta

$$\Phi| : N(H) \times X^H \to X^H.$$

On siis os. että jos $n \in N(H)$ ja $x \in X^H$, niin $nx \in X^H$:

Olk. $h \in H$. Koska $n \in N(H)$, on $nHn^{-1} = H$ eli $nH = Hn$.

Siis $\exists\, h' \in H$ s.e. $hn = nh'$.

Nyt $h(nx) = (hn)x = (nh')x = n\underbrace{(h'x)}_{= x,\text{ koska } x \in X^H \text{ ja } h' \in H} = nx$.

Siis $h(nx) = nx \ \forall h \in H$, eli $nx \in X^H$.

Koska H toimii X^H:ssa triviaalisti, on

$$\Psi : N(H)/H \times X^H \to X^H,$$
$$(nH, x) \longmapsto nx$$

hyvin määritelty (vrt. Teoreeman 2.8. todistus (Ker φ)).

Toiminnan ehdot on helppo tarkistaa:

1) $(eH)x = ex = x \quad \forall x \in X$

2) Jos $nH, n'H \in N(H)/H$, $x \in X$, niin

$$nH((n'H)x) = nH(n'x) = n(n'x) = (nn')x$$
$$= (nn'H)x = ((nH)(n'H))x.$$

Jatkuvuus :

$$\begin{tikzcd} N(H) \times X^H \arrow[r, "\Phi|"] \arrow[d, "\pi \times id"'] & X^H \arrow[d, "id"] \\ N(H)/H \times X^H \arrow[r, "\Psi"] & X^H \end{tikzcd}$$

Kaavio kommutoi (Ψ:n määritelmä).
Lisäksi π avoin (Lemma 1.14.) ja
Harj. 8 / Teht. 1 $\Rightarrow$ $\pi \times id$ on avoin $\overset{1.17}{\Rightarrow}$ $\pi \times id$ samaistuskuvaus

Nyt $id \circ \Phi|$ jatkuva $\overset{1.18.}{\Longrightarrow}$ Ψ on jatkuva. $\square$

Eräs kompaktien ryhmien tärkeä ominaisuus

Lemma 8.18. Olk. G kompakti ryhmä, $g_0 \in G$.
Merk.
$$A = \{ g_0^n \mid n = 0, 1, 2, \dots \}.$$
Tällöin $\bar{A}$ on G:n aliryhmä.
(Tässä siis käänteisalkion olemassaolo on epätriviaalia, esim. HT).

Tod. Selvästi $\mu(A \times A) \subset A$ $\quad (g_0^n \cdot g_0^m = g_0^{n+m})$
Tästä seuraa
$$\mu(\bar{A} \times \bar{A}) = \mu(\overline{A \times A}) \overset{\text{jatk.}}{\subset} \overline{\mu(A \times A)} \subset \bar{A},$$
eli $\bar{A}$ on sulj. kertolaskun suhteen.

Myös $e \in A \subseteq \bar{A}$.

Käänteisalkiot ?

Merk. $B = \{ g_0^m \mid m \in \mathbb{Z} \}$.
Nyt B on G:n aliryhmä, joten 1.12. $\Rightarrow$ $\bar{B}$ on aliryhmä.

Jaetaan tarkastelu kahteen osaan :

(i) e on B:n erillinen piste, eli $\exists\ e \in U \Subset G$ s.e.

$$U \cap B = \{e\}.$$

Oi., että $U \cap \bar{B} = \{e\}$:

olk. $B' = B \setminus \{e\}$. Nyt $B' \subset G \setminus U$, joten $\overline{B'} \subset G \setminus U$, koska $G \setminus U$ on suljettu.

Koska

$$\bar{B} = \overline{B' \cup \{e\}} = \overline{B'} \cup \overline{\{e\}} = \overline{B'} \cup \{e\},$$

on

$$U \cap \bar{B} = U \cap (\overline{B'} \cup \{e\}) = \underbrace{(U \cap \overline{B'})}_{= \emptyset,\ \text{koska } \overline{B'} \subset G \setminus U} \cup (U \cap \{e\}) = \{e\}.$$

Siis e on erill. piste myös $\bar{B}$:ssä, eli $\{e\} \Subset \bar{B}$.

$\bar{B}$ top. ryhmä $\Rightarrow$ jokainen yksiö on avoin $\Rightarrow$ $\bar{B}$:n topologia on diskreetti.

Kuitenkin $\bar{B}$ on kompakti, koska $\bar{B} \Subset G$ ja G on kompakti.

Siis $\bar{B}$ on äärellinen, joten $\exists\ m > 0$ s.e.

$$g_0^m = e:$$

kuvaus $\mathbb{Z} \to B \subset \bar{B}: m \mapsto g_0^m$

ei voi olla inj., koska $\bar{B}$ on äärellinen:

Siis $\exists\ m', m'' \in \mathbb{Z}, m' \neq m''$, s.e. $g_0^{m'} = g_0^{m''}$.

Void. ol. $m' > m''$. Tällöin $m = m' - m'' > 0$

ja $g_0^m = g_0^{m'-m''} = (g_0^{m'})(g_0^{m''})^{-1} = e$.

Siis

$$\bar{B} = \{e, g_0, g_0^2, \dots, g_0^{m-1}\} = A$$

(äärellinen syklinen ryhmä) ja $\bar{A} = A$ on G:n aliryhmä.

(Huom. $(g_0^k)^{-1} = g_0^{m-k}$)

8.10.07 $\rightarrow$

(ii) Ol. sitten, että jokainen e:n ympäristö kohtaa joukon $B \setminus \{e\}$.

Erityisesti, jos W on e:n symmetrinen ympäristö, niin $\exists\ m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, s.e.

$$g_0^m \in W.$$

Koska W on symmetrinen, myös $g_0^{-m} \in W$, joten void. ol. $m > 0$.

Nyt

$$g_0^{m-1} = g_0^{-1} \cdot g_0^m \in g_0^{-1} W \cap A, \quad \text{koska } m-1 \geq 0.$$

Siis

$$g_0^{-1} W \cap A \neq \emptyset$$

jokaisella $\underbrace{e\text{:n}}_{\text{symm.}}$ ympäristöllä W.

(Pal. mieleen H1/T5: jokainen e:n ympäristö sisältää e:n symmetr. ympäristön

Koska muotoa $g_0^{-1}W$ olevat joukot, missä W on ei-symmetrinen ympäristö, muodostavat ympäristökannan pisteessä g_0^{-1}, on
$$g_0^{-1} \in \bar{A}.$$

Todistuksen alussa todettiin, että $\bar{A}$ on suljettu kertolaskun suhteen, joten
$$g_0^{-n} \in \bar{A} \quad \forall n > 0.$$
Siis $\quad B \subset \bar{A}$, joten $\bar{B} \subset \bar{A}$,
Koska myös $A \subset B$, on $\bar{A} \subset \bar{B}$, eli $\bar{A} = \bar{B}$.
Alussa todettiin, että $\bar{B}$ on aliryhmä, joten myös $\bar{A}$ on. $\square$

<u>Lemma 2.13.</u> Olk. G kompakti top. r., H suljettu aliryhmä.
Jos $g_0 \in G$ on sellainen, että $g_0 H g_0^{-1} \subset H$,
niin $g_0 H g_0^{-1} = H$, eli $g_0 \in N(H)$.

<u>Tod.</u> Koska $g_0 H g_0^{-1} \subset H$, on
$$g_0^2 H (g_0^2)^{-1} = g_0 (g_0 H g_0^{-1}) g_0^{-1} \subset g_0 H g_0^{-1} \subset H \quad \text{jne.}$$
Siis
$$g_0^n H (g_0^n)^{-1} \subset H \quad \forall n \geq 0.$$
Jos merk. $A = \{g_0^n \mid n \geq 0\}$, niin edellisen lemman nojalla $\bar{A}$ on G:n aliryhmä.
Tark. jatkuvaa funktiota
$$\Psi : G \times G \to G$$
$$(g, g') \mapsto g g' g^{-1}.$$
Edellä es. nojalla
$$(*) \qquad \Psi(A \times H) \subset H,$$
joten
$$(**) \quad \Psi(\bar{A} \times H) \overset{H \text{ sulj.}}{=} \Psi(\overline{A \times H}) \overset{\text{jatk.}}{\subset} \overline{\Psi(A \times H)} \overset{(*)}{\subset} \bar{H} \overset{H \text{ sulj.}}{=} H.$$
Koska $\bar{A}$ on aliryhmä, on
$$g_0^{-1} \in \bar{A},$$
joten
$$(**) \Rightarrow g_0^{-1} H (g_0^{-1})^{-1} \subset H,$$
$$\text{eli} \quad g_0^{-1} H g_0 \subset H$$
$$\text{eli} \quad H \subset g_0 H g_0^{-1}.$$
Koska oletimme, että
$$g_0 H g_0^{-1} \subset H,$$
saadaan $\quad g_0 H g_0^{-1} = H. \quad \square$

Lemma 2.20. Olk. G kompakti top. ryhmä; H, K sulj. aliryhmiä. Ol., että H on konjugoitu K:n aliryhmän kanssa ja K o. konjugoitu H:n aliryhmän kanssa. Tällöin H ja K ovat konjugoituja.

Tod. Ol. $\Rightarrow$ $\exists$ K:n aliryhmä K_1 ja $g_1 \in G$ s.e.
$$g_1 H g_1^{-1} = K_1,$$
sekä $\exists$ H:n aliryhmä H_2 ja $g_2 \in G$ s.e.
$$g_2 K g_2^{-1} = H_2.$$

Siis
$$\left.\begin{aligned}(g_1 g_2) K (g_1 g_2)^{-1} &= g_1 (g_2 K g_2^{-1}) g_1^{-1} \\ &\subset g_1 H g_1^{-1} \subset K.\end{aligned}\right\} (*)$$

Ed. lemmasta saadaan nyt
$$(g_1 g_2) K (g_1 g_2)^{-1} = K$$
eli $(*)$:in nojalla
$$g_1 H g_1^{-1} = K.$$

(Void. myös os., että $g_2 K g_2^{-1} = H$). $\square$

Isotropiatyypit

Tutkitaan seuraavaksi aliryhmien n.s. konjugaatioluokkia. Yhteys transf.ryhmien teoriaan tulee seur. lemmasta:

Lemma 2.21. Olk. G top. ryhmä, X G-avaruus; $x \in X$, $g \in G$. Tällöin
$$G_{gx} = g G_x g^{-1}.$$

Tod. HT. $\square$

Olk. nyt G (topologinen) ryhmä, H aliryhmä.
Merk.
$$[H] = \{ g H g^{-1} \mid g \in G \},$$
H:n konjugaatioluokka, eli kaikkien H:n kanssa konjugoitujen G:n aliryhmien joukko.

Jos halutaan välttää tietyn aliryhmän käyttöä merkinnässä $[H]$, käytetään usein kaunokirj. kirjainta konjugaatioluokan merkkinä, esim. $\mathcal{H}$.

Konjugaatioluokkaa sanotaan myös *isotropiatyypiksi*.

Olk. X G-avaruus ja $x \in X$. Ed. lemman nojalla isotropiaryhmät pisteen x radan eri pisteissä gx muodostavat konjugaatioluokan

$$[G_x] = \{ g G_x g^{-1} \mid g \in G \}.$$

Tätä sanotaan pisteen x (tai radan Gx) *isotropiatyypiksi*.

Jos $H \leq G$, sanomme että isotropiatyyppi $[H]$ esiintyy G-avaruudessa X, jos $\exists\, x \in X$ s.e. $[G_x] = [H]$.

Isotropiatyyppien välille voidaan määritellä *järjestysrelaatio*:

Määr. 2.22. G top. ryhmä; $H, K \leq G$.
Määr.

$$[H] \leq [K] \iff H \text{ on konjugoitu jonkin } K\text{:n aliryhmän kanssa.}$$

Hyvin määritelty:
Jos $H' \in [H]$ ja $K' \in [K]$, on osoitettava, että H' on konjugoitu jonkin K':n aliryhmän kanssa.
Nyt

$$H' = g_1 H g_1^{-1} \quad \text{joll. } g_1 \in G$$

ja

$$K' = g_2 K g_2^{-1} \quad \text{joll. } g_2 \in G,$$

lisäksi

$$g_0 H g_0^{-1} \subset K \quad \text{joll. } g_0 \in G.$$

Siis

$$g_0 (\underbrace{g_1^{-1} H' g_1}_{=H}) g_0^{-1} \subset \underbrace{g_2^{-1} K' g_2}_{=K}$$

ja

$$(g_2 g_0 g_1^{-1}) H' (g_2 g_0 g_1^{-1})^{-1} \subset K'. \quad \square$$

Jatkossa tutkimme ainoastaan *suljettujen aliryhmien* H isotropiatyyppejä $[H]$.
Huom! Jos H on suljettu ja $H' \in [H]$, niin H' on suljettu:
Jos $H' = \bar{g} H \bar{g}^{-1}$, niin $H' = \gamma(H)$, missä γ on homeomorfismi $\gamma : G \to G$,

$$g \mapsto \bar{g} g \bar{g}^{-1}. \quad \square$$

<u>Lause 2.23.</u> Olk. G kompakti top. ryhmä. Tällöin relaatio $\leq$ on osittainen järjestys kaikkien isotropiatyyppien joukossa, eli

1) $[H] \leq [H] \quad \forall [H]$.
2) $[H] \leq [K]$ ja $[K] \leq [L] \Rightarrow [H] \leq [L] \quad \forall [H],[K],[L]$.
3) $[H] \leq [K]$ ja $[K] \leq [H] \Rightarrow [H] = [K] \quad \forall [H],[K]$.

<u>Tod.</u> 1) selvä, koska $eHe^{-1} = H$

2) Jos $g_1 H g_1^{-1} \subset K$ ja $g_2 K g_2^{-1} \subset L$, niin

$$g_2 g_1 H (g_2 g_1)^{-1} = g_2 g_1 H g_1^{-1} g_2^{-1} \subset g_2 K g_2^{-1} \subset L,$$

joten $[H] \leq [L]$.

3) seuraa suoraan Lemmasta 2.20. $\square$

[redacted]

<u>Merkintöjä</u> $[H] < [K]$, jos $[H] \leq [K]$ ja $[H] \neq [K]$.

Olk. nyt $\underline{X}$ G-avaruus, H G:n sulj. aliryhmä.

$$\underline{X}^H = \{x \in \underline{X} \mid hx = x \ \forall h \in H\} = \{x \in \underline{X} \mid H \subset G_x\}$$

$$\underline{X}_H = \{x \in \underline{X} \mid G_x = H\}$$

$$\underline{X}^{>H} = \{x \in \underline{X} \mid H \subsetneq G_x\}.$$

Selvästi $\underline{X}^{>H} = \underline{X}^H \setminus \underline{X}_H$ ja $\underline{X}_H = \underline{X}^H \setminus \underline{X}^{>H}$, koska

$$\underline{X}^H = \underline{X}_H \cup \underline{X}^{>H} \quad \text{ja} \quad \underline{X}_H \cap \underline{X}^{>H} = \emptyset.$$

Vastaavat merkinnät konjugaatioluokille el. Isotropiatyypeille:

$$\underline{X}^{(H)} = \{x \in \underline{X} \mid [H] \leq [G_x]\}$$

$$\underline{X}_{(H)} = \{x \in \underline{X} \mid [H] = [G_x]\}$$

$$\underline{X}^{>(H)} = \{x \in \underline{X} \mid [H] < [G_x]\}.$$

Siis $\underline{X}^{>(H)} = \underline{X}^{(H)} \setminus \underline{X}_{(H)}$ ja $\underline{X}_{(H)} = \underline{X}^{(H)} \setminus \underline{X}^{>(H)}$.

Lemma 2,24. ol. G top.ryhmä, H sulj. aliryhmä ja $\underline{X}$ G-avaruus. Tällöin

1) $\underline{X}^{(H)} = G\underline{X}^H$
2) $\underline{X}_{(H)} = G\underline{X}_H$

Tod. 1) "$\subset$" olk. $y \in \underline{X}^{(H)}$. Tällöin $(H) \leq (G_y)$, eli $gHg^{-1} \subset G_y$ jollakin $g \in G$.
Siis
$$H \subset g^{-1}G_y g \overset{HT}{=} G_{g^{-1}y} \quad \text{ja siis} \quad g^{-1}y \in \underline{X}^H.$$
Siis
$$y \in g\underline{X}^H \subset G\underline{X}^H.$$

"$\supset$" olk. $y \in G\underline{X}^H$. Tällöin $y = gx$ jollakin $x \in \underline{X}^H$, $g \in G$.
Nyt $H \subset G_x$, joten
$$gHg^{-1} \subset gG_xg^{-1} = G_{gx} = G_y.$$
Siis $(H) \leq (G_y)$ eli $y \in \underline{X}^{(H)}$.

2) "$\subset$" olk. $y \in \underline{X}_{(H)}$. Tällöin siis $(G_y) = (H)$, joten $\exists\, g \in G$ s.e. $gHg^{-1} = G_y$.
Siis
$$H = g^{-1}G_y g = G_{g^{-1}y},$$
joten
$$g^{-1}y \in \underline{X}_H \quad \text{ja} \quad y \in g\underline{X}_{(H)} \subset G\underline{X}_{(H)}.$$

"$\supset$" olk. $y \in G\underline{X}_H$. Tällöin $y = gx$ jollakin $x \in \underline{X}_H$, $g \in G$.
Nyt siis $G_x = H$ ja
$$G_y = G_{gx} = gG_xg^{-1} = gHg^{-1},$$
joten
$$(G_y) = (H) \quad \text{ja siis} \quad y \in \underline{X}_{(H)}.$$
$\square$

Jos $\underline{X}$ on G-avaruus ja $A \subset \underline{X}$, sanomme osajoukkoa A <u>G-invariantiksi</u>, jos $GA = A$ eli jos $ga \in A$ $\forall\, g \in G, a \in A$.

Ylläesitetystä seuraa, että joukot $\underline{X}^{(H)}$ ja $\underline{X}_{(H)}$ ovat G-invariantteja.
Huom. $\underline{X}^H$ ja $\underline{X}_H$ eivät yleensä ole.

Lemma 2.25. Olk. G kompakti top. r., $\underline{X}$ T_1 G-avaruus ja H G:n sulj. aliryhmä. Tällöin
$$\underline{X}^{>[H]} = G\underline{X}^{>H}.$$

Tod. "$\subset$" olk. $y \in \underline{X}^{>[H]}$, eli $[H] < [G_y]$.
Siis $\exists$ $g \in G$ s.e.
$$gHg^{-1} \subset G_y,$$
mutta $[H] \neq [G_y]$ eli H ja G_y eivät ole konjugoituja.
Siis
$$gHg^{-1} \subsetneq G_y$$
ja
$$H \subsetneq g^{-1}G_y g = G_{g^{-1}y},$$
joten
$$g^{-1}y \in \underline{X}^{>H}.$$
Siis
$$y \in g\underline{X}^{>H} \subset G\underline{X}^{>H}.$$

Huom. tässä ei tarvittu oletusta G:n kompaktisuudesta.

"$\supset$" olk. $y \in G\underline{X}^{>H}$, eli $y = gx$ joillakin $x \in \underline{X}^{>H}$, $g \in G$.
Siis $H \subsetneq G_x$ ja
$$gHg^{-1} \subsetneq gG_xg^{-1} = G_{gx} = G_y,$$
josta saadaan
$$[H] \leq [G_y].$$
Os. nyt että $[H] \neq [G_y]$, mistä väite seuraa:
Antiteesi: $[H] = [G_y]$ eli $\exists$ $\bar{g} \in G$ s.e.
$$G_y = \bar{g}H\bar{g}^{-1}.$$
Tällöin siis $gHg^{-1} \subsetneq \bar{g}H\bar{g}^{-1}$ ja
$$\bar{g}^{-1}gHg^{-1}\bar{g} \subsetneq H,$$
eli H on konjugoitu aidon aliryhmänsä kanssa RR, koska G on kompakti.

Siis $[H] < [G_y]$ eli $y \in \underline{X}^{>[H]}$. $\square$

Ekvivariantit kuvaukset

Olk. G top. ryhmä ja X, Y G-avaruuksia.
Sanomme, että (jatkuva) kuvaus $f: X \to Y$ on **G-ekvivariantti** tai **G-kuvaus**, jos

$$(*) \qquad f(gx) = g\,f(x) \quad \forall g \in G,\ x \in X.$$

$$\begin{tikzcd} gx \arrow[r, dotted] & gf(x) \\ x \arrow[u, "g"] \arrow[r, "f"] & f(x) \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

Tai täsmällisemmin, jos merkitään G:n toimintoja
$\Phi: G \times X \to X$ ja $\Psi: G \times Y \to Y$:

$$f(\Phi(g,x)) = \Psi(g, f(x)) \quad \forall g \in G,\ x \in X,$$

t.s. kaavio

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "id \times f"] \arrow[d, "\Phi"'] & G \times Y \arrow[d, "\Psi"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

kommutoi.

Esim. 2.26.

1) $G = \mathbb{Z}_2 = \{e, t\}$, $t^2 = e$

$X = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{R}$, G:n toiminta
$$\bar{g}(g,x) = (\bar{g}g, x) \quad \forall (g,x) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{R},\ \bar{g} \in \mathbb{Z}_2.$$

$Y = \mathbb{R}^2$, G:n toiminta
$$t(x_1, x_2) = (x_1, -x_2) \quad \forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

Tällöin funktio $f: X \to Y$
$$(e,x) \mapsto (x,1), \quad (t,x) \mapsto (x,-1) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
on ekvivariantti:
$$f(t(e,x)) = f(t,x) = (x,-1) = t(x,1) = t f(e,x)$$
ja
$$f(t(t,x)) = f(e,x) = (x,1) = t(x,-1) = t f(t,x).$$

2) $G, \bar{X}, Y$ kuten edellä.

$$h : \bar{X} \to Y$$
$$(e,x) \mapsto (x,0)$$
$$(t,x) \mapsto (x,0) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

on ekvivariantti, koska

$$h(t(e,x)) = h(t,x) = (x,0) = t(x,0) = t\,h(e,x)$$

ja $h(t(t,x)) = h(e,x) = (x,0) = t(x,0) = t\,h(t,x)$.

3) $G, \bar{X}, Y$ kuten edellä.

$$h' : \bar{X} \to Y$$
$$(e,x) \mapsto (x,1)$$
$$(t,x) \mapsto (x,1) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

ei ole ekvivariantti:

$$h'(t(e,0)) = h'(t,0) = (0,1)$$
$$t(h'(e,0)) = t(0,1) = (0,-1)$$
$\neq$.

Lemma 2.27. Olk. $f: \bar{X} \to Y$ bijektiivinen G-kuvaus ($\bar{X}, Y$ G-avaruuksia). Tällöin $f^{-1}: Y \to \bar{X}$ toteuttaa G-kuvauksen määritelmän ehdon $(*)$.

(huom. f^{-1} ei välttämättä jatkuva)

Tod. Olk. $g \in G$, $y \in Y$.
Nyt $f(f^{-1}(gy)) = gy$
ja $f(g f^{-1}(y)) \underset{f\ G\text{-kuv.}}{=} g(f f^{-1}(y)) = gy$

f inj. $\Rightarrow f^{-1}(gy) = g f^{-1}(y)$. $\square$

Lemma 2.28. Olk. $f: \bar{X} \to Y$ G-kuvaus ja $x \in \bar{X}$. Tällöin $G_x \subset G_{f(x)}$.

Tod. Olk. $h \in G_x$.
Nyt $h f(x) \overset{f\text{ ekviv.}}{=} f(hx) \overset{h \in G_x}{=} f(x)$, eli $h \in G_{f(x)}$. $\square$

Määr. 2.29. Sanomme, että G-kuvaus $f: \bar{X} \to Y$ on <u>isovariantti</u>, jos $G_x = G_{f(x)}$ $\forall x \in \bar{X}$.

[redacted]

Lemma 2.30. Olk. $f: \bar{X} \to Y$ G-ekvivariantti homeomorfismi (eli G-homeomorfismi). Tällöin f on isovarianntti.

Tod. Olk. $x \in \bar{X}$. Nyt $G_x \subset G_{f(x)}$ ed. lemman nojalla. Lemman 2.27 nojalla f^{-1} on ekvivariantti ja siis

$$G_{f(x)} \underset{\substack{\uparrow \\ 2.28.}}{\subset} G_{f^{-1}(f(x))} = G_x .$$

Siis $G_x = G_{f(x)}$.

$\square$

Palautetaan mieleen, että jos G on top. ryhmä, H suljettu aliryhmä, niin

$$\Psi : G \times G/H \to G/H$$
$$(g, \bar{g}H) \mapsto g\bar{g}H$$

on hyvin määr. jatkuva toiminta.

Lause 2.31. Olk. G kompakti top. ryhmä, $\bar{X}$ Hausdorff G-avaruus ja $x \in \bar{X}$. Tällöin rata Gx on $\bar{X}$:n G-invariantti suljettu ja kompakti osajoukko ja $\exists$ G-ekviv. homeomorfismi

$$f : Gx \to G/G_x .$$

Tod. • Gx G-invariantti : $\bar{g}(gx) = (\bar{g}g)x \in Gx$ ok.
• Gx kompakti : $Gx = \Phi(G \times \{x\})$, missä Φ on G:n toiminta ok
• Gx sulj. koska se on kompakti.

Merk. $G_x = H$, jolloin H on G:n suljettu aliryhmä.
Määr. $\eta : G/H \to Gx$
$gH \mapsto gx$.

1) η hyvin määr. : Jos $gH = g'H$, niin $g = g'h$ jollakin $h \in H = G_x$.
Tällöin $gx = g'hx = g'x$ ok.

2) η on surjektio : olk. $y \in Gx$. Tällöin $y = gx$ jollakin $g \in G$ ja $\eta(gH) = gx = y$.

3) η on injektio:

olk. $\eta(gH) = \eta(g_1H)$, eli $gx = g_1 x$.

Tällön $g_1^{-1} g x = x$ eli $g_1^{-1} g \in G_x = H$.

Siis $g = g_1 h$ jollakin $h \in H$ ja

$g_1 H = gH \in G/H$.

4) η on jatkuva:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\vartheta"] & \\ G/H \arrow[r, "\eta"] & Gx \end{tikzcd}$$

$\vartheta : g \mapsto gx$ on toiminnan Φ rajoittumana jatkuva
π on tekijäkuvaus

$\overset{1.18}{\Longrightarrow}$ η on jatkuva.

5) η^{-1} on jatkuva: Koska G/H on kompakti ja Gx on Hausdorff, tämä seuraa siitä, että η on jatkuva bijektio.

(Huom. 1) – 5) $\Rightarrow$ η on homeomorfismi)

6) η on G-kuvaus:

$$\eta(\bar{g}(gH)) = \eta((\bar{g}g)H) = (\bar{g}g)x = \bar{g}(gx) = \bar{g}\,\eta(gH),$$

$$\forall\, \bar{g} \in G,\ gH \in G/H$$

$\square$

Huom. $\eta^{-1} : Gx \to G/H$ on myös G-ekviv. homeomorfismi.
$gx \mapsto gH$

Tarkastellaan seuraavaksi G-kuvauksia
$$f: G/H \to G/K,$$
missä H ja K ovat top. ryhmän G suljettuja aliryhmiä.

Jos $f: G/H \to G/K$ on G-kuvaus, merk. $f(eH) = g_0K$.
Tällöin
$$\forall\, gH \in G/H: \quad f(gH) = f(g(eH)) \overset{f\text{ ekviv.}}{=} g\, f(eH) = g(g_0K) = gg_0K,$$
joten f:n arvo alkiolla eH määrää koko funktion f.

Lisäksi $G_{eH} = H$, koska $g(eH) = eH \Leftrightarrow gH = eH \Leftrightarrow g \in H$.
Siis
$$G_{g_0K} = G_{g_0(eK)} = g_0 G_{eK} g_0^{-1} = g_0 K g_0^{-1}.$$
Koska f on G-kuvaus, on siis
$$G_{eH} \subset G_{g_0K}$$
eli
$$H \subset g_0 K g_0^{-1}$$
eli
$$g_0^{-1} H g_0 \subset K.$$

Siis: Jos on olemassa G-kuvaus $G/H \to G/K$, niin välttämättä H on konjugoitu K:n aliryhmän kanssa, eli $[H] \leq [K]$.

Kääntäen:

Lause 2.32. Oletetaan, että $g_0 \in G$ ja $H \subset g_0 K g_0^{-1}$.
Tällöin voidaan määritellä G-kuvaus
$$f: G/H \to G/K$$
kaavalla
$$gH \mapsto gg_0K.$$

Tod. 1) f hyvin määr.:
Jos $gH = g'H$, niin $g = g'h$ jollakin $h \in H$
ja
$$f(gH) = gg_0K = g'hg_0K = g'g_0\underbrace{g_0^{-1}hg_0}_{\in K,\ \text{koska } g_0^{-1}Hg_0 \subset K}K$$
$$= g'g_0K = f(g'H). \qquad \text{ok.}$$

2) f G-kuvaus:

$$f(\bar{g}(gH)) = f((\bar{g}g)H) = \bar{g}gg_0K = \bar{g}f(gH) \quad \forall\, \bar{g}\in G,\ gH \in G/H.$$

3) f jatkuva:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "r_{g_0}"] \arrow[d, "\pi"'] & G \arrow[d, "\pi'"] \\ G/H \arrow[r, "f"'] & G/K \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} g \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & gg_0 \arrow[d, mapsto] \\ gH \arrow[r, mapsto] & gg_0K \end{tikzcd}$$

eli kaavio kommutoi.

Nyt $\pi' \circ r_{g_0}$ on jatkuva ja π on tekijäkuvaus, joten f on jatkuva. $\square$

<u>Lause 2.33.</u> Olk. G toporyhmä, H, K suljettuja aliryhmiä. Tällöin G/H ja G/K ovat G-homeomorfiset $\iff$ H ja K ovat konjugoituja G:ssä.

<u>Tod.</u> "$\Leftarrow$" ol. että $H = g_0Kg_0^{-1}$, jolloin ed. lauseesta seuraa, että

$$f: G/H \to G/K,\quad gH \mapsto gg_0K$$

on jatkuva G-kuvaus.

Nyt myös $K = g_0^{-1}Hg_0$, joten ed. lauseen mukaan

$$\bar{f}: G/K \to G/H,\quad gK \mapsto gg_0^{-1}H$$

on jatkuva G-kuvaus.

Lisäksi

$$(\bar{f}\circ f)(gH) = \bar{f}(gg_0K) = gg_0g_0^{-1}H = gH$$

ja $$(f\circ \bar{f})(gK) = f(gg_0^{-1}H) = gg_0^{-1}g_0K = gK.$$

Siis f on G-homeomorfismi ja $f^{-1} = \bar{f}$.

" $\Rightarrow$ " ol., että $f: G/H \to G/K$ on G-homeomorfismi, merk. $f(eH) = g_0 K$.
Tällöin $G_{eH} = G_{f(eH)}$ Lemman 2.30 nojalla
ja
$$H = G_{eH} = G_{g_0 K} = G_{g_0(eK)} = g_0 G_{eK} g_0^{-1} = g_0 K g_0^{-1},$$
eli H ja K ovat konjugoituja.

$\square$

Lause 2.34. Olk. G kompakti top. ryhmä, H, K sulj. aliryhmiä, jotka ovat konjugoituja keskenään.
Tällöin jokainen G-kuvaus
$$f: G/H \to G/K$$
on G-homeomorfismi.

Tod. Olk. $f: G/H \to G/K$ G-kuvaus, merk. $f(eH) = g_0 K$.
Siis $H \subset g_0 K g_0^{-1}$.
Olk. $\bar{g} \in G$ s.e. $K = \bar{g} H \bar{g}^{-1}$, jolloin
$$(*) \quad H \subset g_0 K g_0^{-1} = g_0 \bar{g} H \bar{g}^{-1} g_0^{-1} = g_0 \bar{g} H (g_0 \bar{g})^{-1},$$
eli
$$(g_0 \bar{g})^{-1} H (g_0 \bar{g}) \subset H.$$
Koska G on kompakti, seuraa Lemmasta 2.19 nyt, että y.o. inkluusio on yhtäsuuruus ja $(*)$:ssä välttämättä $H = g_0 K g_0^{-1}$ eli $K = g_0^{-1} H g_0$.

Tästä seuraa, että $\bar{f}: G/K \to G/H$
$$gK \mapsto g g_0^{-1} H$$
on hyvin määr., jatkuva G-kuvaus.
Nyt $\bar{f} \circ f = id$ ja $f \circ \bar{f} = id$, josta seuraa että f on G-homeomorfismi.

$\square$

Lause 2.35 Olk. G komp. top. ryhmä, H, K sulj. aliryhmiä. Ol., että $\exists$ G-kuvaukset

$$f_1 : G/H \to G/K$$
$$\text{ja} \quad f_2 : G/K \to G/H .$$

Tällöin H ja K ovat konjugoituja ja f_1, f_2 ovat G-homeomorfismeja.

Tod. Olk. $f_1(eH) = g_1 K$ ja $f_2(eK) = g_2 H$.
Tällöin $H \subset g_1 K g_1^{-1}$ ja $K \subset g_2 H g_2^{-1}$

ell. $g_1^{-1} H g_1 \subset K$ ja $g_2^{-1} K g_2 \subset H$.

Lemman 2.20 nojalla H ja K ovat konjugoituja ja Lauseen 2.34 nojalla f_1 ja f_2 ovat G-homeomorfismeja.

$\square$